1º.- Calcular la matriz X que cumple $3X-B=2AX$ siendo:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathrm{B}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -5\end{pmatrix}$$

Solución:

$$3X-B=2AX \Leftrightarrow 3IX-2AX=B \Rightarrow (3I-2A)X=B \Rightarrow$$

$$X=\left(3I-2A\right)^{-1}B$$

$$X=\left[3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{9} & -1\\ \frac{1}{9} & -1\end{pmatrix}$$

2º.- Estudiar el siguiente sistema en función del parámetro "m" y resolverlo en el caso de que $m=2$, indicando, en éste caso, qué figura geométrica representa

$$\left.\begin{array}{l} mx+3y-z=2\\ (m+1)x+2y+z=3\\ x-(m-1)y+2z=1\end{array}\right\}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} m & 3 & -1\\ m+1 & 2 & 1\\ 1 & -(m-1) & 2\end{vmatrix}=2m^2-3m-2 \quad \text{que se anula para } \begin{cases} x=-\frac{1}{2}\\ x=2\end{cases}$$

Si $x\neq-\frac{1}{2}$ ó $x\neq 2$ el sistema es compatible y determinado

Si $x=-\frac{1}{2}$ el sistema toma la forma:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{-1}{2}x+3y-z=2\\ \frac{1}{2}x+2y+z=3\\ x+\frac{3}{2}y+2z=1\end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+6y-2z=4\\ x+4y+2z=6\\ 2x+3y+4z=2\end{cases}$$

Como $\begin{vmatrix} 6 & -2 & 4\\ 4 & 2 & 6\\ 3 & 4 & 2\end{vmatrix}\neq 0$ el sistema es incompatible

Si $x=2$ el sistema toma la forma:

$$\begin{cases} 2x+3y-z=2\\ 3x+2y+z=3\\ x-y+2z=1\end{cases} \quad \text{en el que } Ran\begin{pmatrix}2 & 3 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 2 & 1\end{pmatrix}=2 \text{ ; luego el sistema es}$$

compatible e indeterminado, con solución

.........................……………………………………………………………………………...

$$\begin{cases} 2x+3y-z=2 \\ 3x+2y+z=3 \\ x-y+2z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y=2+z \\ 3x+2y=3-z \end{cases}$$ que resolvemos por Cramer

$$\begin{cases} x=1-z \\ y=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=t \end{cases} \quad (1)$$

Los tres planos representan una recta de ecuación paramétricas (1)

3º.-Resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+y-z=0 \\ 4x-y=0 \\ -13x+12y-7z=0 \\ 3x-2y+z=0 \end{array}\right\}$$

e indicar que figura geométrica representan

Solución:

Es fácil comprobar que $Rango\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \\ -13 & 12 & -7 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}=2$

Luego el sistema es compatible e indeterminado, equivalente a:

$\begin{cases} x+y=z \\ 4x-y=0 \end{cases}$ con solución: $\begin{cases} x=\dfrac{z}{5} \\ y=\dfrac{4z}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=4t \\ z=5t \end{cases}$ (2)

Se trata de una recta de ecuación paramétrica (2)

4º.-Un rombo tiene por lados los vectores $\vec{a}=2i+2j+k$ y $\vec{b}=i+2j+2k$. Si su vértice está en el punto $A(0,0,0)$, calcular:

a) la ecuación de la recta que contienen la diagonal que pasa por el vértice A
b) el área del rombo
c) Los otros tres vértices

Solución:

a)

La diagonal que pasa por el vértice $(0,0,0)$ contiene el vector $\vec{a}+\vec{b}=[3,4,3]$, luego la recta es $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{3}$

b) El área del rombo es el área del paralelogramo formado por ambos vectores:

$$S = \left|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}\right| = |2,-3,2| = \sqrt{17} \quad \text{unidades de área}$$

c) Las rectas que contiene a los otros dos lados son $\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ y $\begin{cases} x = \eta \\ y = 2\eta \\ z = 2\eta \end{cases}$

Como cada vértice dista del (0,0,0) $|2,2,1| = 3$ y $|1,2,2| = 3$, dos de los vértices buscados son:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9 \begin{cases} 4\lambda^2 + 4\lambda^2 + \lambda^2 = 9 \Rightarrow \lambda = 1 \\ \eta^2 + 4\eta^2 + 4\eta^2 = 9 \Rightarrow \eta = 1 \end{cases}$$ luego los dos vértices que están en los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son $(2,2,1)$ y $(1,2,2)$

El vértice opuesto a (0,0,0) está en la recta $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$ y dista $|[3,4,3]| = \sqrt{34}$ unidades de (0,0,0), luego:

$$9\mu^2 + 16\mu^2 + 9\mu^2 = 34 \Rightarrow \mu = 1$$, es decir, el vértice es $(3,4,3)$

5º.-Estudia la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 6x + 8} & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{Ln(2x-3)}{Sen(x-2)} & \text{si } 2<x<3 \end{cases}$$

Solución:

La función es continua dentro de cada rama; veamos si lo es en el punto de cambio de rama:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+6} = \frac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x-4}{x-3} = 2 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{Ln(2x-3)}{Sen(x-2)} = \frac{0}{0} = \lim\limits_{y\to 0^+} \dfrac{Ln(2y+1)}{Sen(y)} \cdot \dfrac{2y+1}{2y+1} \cdot \dfrac{y}{y} = 2 \end{cases}$$

luego la función es siempre continua si la redefinimos en la forma:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 6x + 8} & \text{si } x < 2 \\ 2 & \text{si } x = 2 \\ \dfrac{Ln(2x-3)}{Sen(x-2)} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$