

1°.-Sabido que :

$$2A+B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 8 & 3 & 11 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y que } A+2B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 7 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

calcular la matriz X que cumple $AX = B$

Solución:

Para poder resolver la ecuación debemos calcular previamente A y B :

$$\left. \begin{matrix} 2A+B=C \\ A+2B=D \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2A+B=C \\ 2A+4B=2D \end{cases} \Rightarrow B = \frac{2D-C}{3} = \frac{1}{3} \left(2 \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 7 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 8 & 3 & 11 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{cases} 4A+2B=2C \\ A+2B=D \end{cases} \Rightarrow A = \frac{2C-D}{3} = \frac{1}{3} \left(2 \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 8 & 3 & 11 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 7 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\text{Luego: } X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 4 & -3 & -5 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

2°.-a) Discutir el siguiente sistema en función de parámetro λ

$$\begin{cases} 3x - \lambda y + z = 4 \\ \lambda x - 2y + 2z = 5 \\ 2x + \lambda y - z = -\lambda \end{cases}$$

y resolverlo en el caso de que sea compatible e indeterminado

b) cuando $\lambda = 1$, ¿cuál es la posición relativa de los tres planos definidos por las ecuaciones del sistema?

Solución:

a) Dado que el rango de la matriz de coeficientes es 2

$$\begin{cases} 3x - \lambda y + z = 4 \\ \lambda x - 2y + 2z = 5 \\ 2x + \lambda y - z = -\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -\lambda & 1 \\ \lambda & -2 & 2 \\ 2 & \lambda & -1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -\lambda \end{pmatrix}}_B$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -\lambda & 1 \\ \lambda & -2 & 2 \\ 2 & \lambda & -1 \end{vmatrix} = -10\lambda + 10 \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } \lambda \neq 1 \text{ Rango de } A = 3 \\ \text{SI } \lambda = 1 \text{ Rango de } A = 2, \text{ pues } \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \end{cases}$$

Por ello:

SI $\lambda \neq 1$, sistema es compatible y determinado

Si $\lambda = 1$, el sistema es compatible e indeterminado, pues:

$$\text{Rang}(AB) = \text{Rang} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \text{Rang} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 4 & 11 \\ 0 & 5 & -4 & -11 \end{pmatrix} = \text{Rang} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Cuya solución es :

$$\begin{cases} 3x - y + z = 4 \\ x - 2y + 2z = 5 \\ 2x + y - z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y + z = 4 \\ x - 2y + 2z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 4 - z \\ x - 2y = 5 - 2z \end{cases}$$

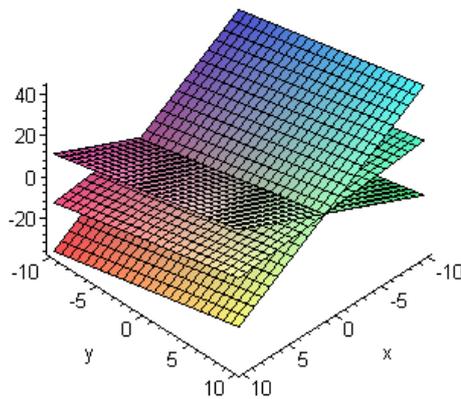
Que podemos resolver por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4-z & -1 \\ 5-2z & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{3}{5} \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4-z \\ 1 & 5-2z \end{vmatrix}}{-5} = \frac{5z-11}{5}$$

b)

Se trata de tres planos que se cortan en la recta :

$$r: \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = -\frac{11}{5} + t \\ z = t \end{cases}$$



3°.-Dados los puntos $A(1,1,1)$, $B(0,3,-3)$ y $C(3,1,3)$, encontrar:

- a) El centro de la circunferencia que pasa por esos puntos.
- b) La ecuación de la tangente a esa circunferencia que pasa por el punto A

Solución:

a)

Los tres puntos estén en el plano

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ y-1 & -2 & 0 \\ z-1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y - 2z + 3 = 0 \quad (1)$$

Por otra parte, si el centro es el punto $O(x, y, z)$, el radio es la distancia de cada uno de dichos puntos al punto O , es decir:

$$d_{AO} = d_{BO} = d_{CO} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = (x-0)^2 + (y-3)^2 + (z+3)^2 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 \end{cases}$$

Que desarrollando y simplificando obtenemos las ecuaciones:

$$2x - 4y + 8z + 15 = 0 \quad (2)$$

$$x + z - 4 = 0 \quad (3)$$

Y resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1), (2) y(3) , obtenemos el centro:

$$\left. \begin{matrix} 2x - 3y - 2z + 3 = 0 \\ 2x - 4y + 8z + 15 = 0 \\ x + z - 4 = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{161}{34} \\ y = \frac{79}{17} \\ z = -\frac{25}{34} \end{cases} , \text{ es decir } O = \left(\frac{161}{34}, \frac{79}{17}, -\frac{25}{34} \right)$$

También podríamos encontrar el centro como punto de intersección entre el plano (1) y los planos perpendiculares a las cuerdas $\overline{AB}(2')$ y $\overline{AC}(3')$,en sus puntos medios

- Plano que es perpendicular a la cuerda \overline{AB} por su punto medio:

$$\overline{BA} = [1, -2, 4] \text{ , punto medio de } \overline{AB} \left(\frac{1}{2}, 2, -1 \right)$$

$$\text{Plano : } x - 2y + 4z + \frac{15}{2} = 0 \Leftrightarrow 2x - 4y + 8z + 15 = 0 \quad (2')$$

- Plano que es perpendicular a la cuerda \overline{AC} por su punto medio:

$$\overline{AC} = [2, 0, 2] \text{ , punto medio de } \overline{AC} (2, 1, 2)$$

$$\text{Plano : } 2x + 2y - 8 = 0 \Leftrightarrow x + y - 4 = 0 \quad (3')$$

.....
 Dichos planos coinciden con los anteriormente calculados $(2) = (2')$ y $(3) = (3')$, ya cada uno es el conjunto de punto (lugar geométrico) que equidistan de los extremos de la cuerda.

b)

La tangente en una circunferencia es perpendicular al radio: Dado que el radio está en la recta que pasa por el punto A y por el punto O , estará en un plano cuyo vector normal será $\overrightarrow{OA} = \left[\frac{127}{34}, \frac{62}{17}, -\frac{59}{34} \right] \Leftrightarrow [127, 124, -59]$ y contiene el punto A ; es pues:

$$127x + 124y - 159z - 192 = 0$$

Como la tangente tiene que estar en el plano de la circunferencia (1), la ecuación de la recta tangente buscada es:

$$\begin{cases} 2x - 3y - 2z + 3 = 0 \\ 127x + 124y - 159z - 192 = 0 \end{cases}$$

4°.- Calcular la distancia entre las rectas $r: \begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x - z = 8 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

Solución:

Pasando la recta a forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = -1 + t \\ z = 2t \end{cases}$$

a) Aplicando la fórmula:

$$d_{r,s} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{6}{|[3, 1, -2]|} = \frac{6}{\sqrt{14}} = \frac{3}{7}\sqrt{14} \text{ u. de l.}$$

b) Por métodos geométricos:

Vector genérico que une puntos de r con puntos de s :

$$[[4 + t, -1 + t, 2t] - [2 + \lambda, -1 - \lambda, \lambda]] = [2 + t - \lambda, t + \lambda, 2t - \lambda]$$

La distancia entre las dos rectas debe ser la longitud del segmento perpendicular a ambas, luego:

$$\begin{cases} [1, 1, 2] \cdot [2 + t - \lambda, t + \lambda, 2t - \lambda] = 0 \\ [1, -1, 1] \cdot [2 + t - \lambda, t + \lambda, 2t - \lambda] = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2t - 3\lambda + 2 = 0 \\ 3t - \lambda + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{7} \\ \lambda = \frac{4}{7} \end{cases}$$

Luego la distancia entre las rectas es la distancia entre los puntos:

$$p_r \left(\frac{27}{7}, -\frac{8}{7}, -\frac{2}{7} \right) \quad \text{y} \quad p_s \left(\frac{18}{7}, -\frac{11}{7}, \frac{4}{7} \right)$$

$$d_{p_r, p_s} = \frac{3}{7} \sqrt{14} \text{ uni. de l.}$$

5°.- Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x) = \frac{|x+1|}{1-|x|}$$

Solución:

Primera explicitamos la función:

$$f(x) = \frac{|x+1|}{1-|x|} \Rightarrow \begin{cases} |x+1| = \begin{cases} -x-1 & \text{si } x < -1 \\ x+1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases} \\ |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{|x+1|}{1-|x|} = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -1 \\ 1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \frac{x+1}{1-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Dentro de las ramas la función es discontinua en $x=1$. Veamos lo que sucede en los cambios de rama:

En $x=-1$ la función es discontinua de salto 2 ya que los límites laterales no coinciden.

En $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1, \quad \text{y} \quad f(0) = 1, \quad \text{luego la función es}$$

continua en $x=0$

Así pues, la función es discontinua en los puntos $x=-1$ y $x=1$

6°.- Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x^3 + 3x^2 - 9x + 5} & \text{si } x < 1 \\ \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Cómo podríamos redefinir la función para que fuese continua en toda la recta real

Solución:

.....
 Para $x < 1$ la función presenta una discontinuidad en $x = -5$, y además no existe $\lim_{x \rightarrow -5} f(x)$

Para $x > 1$ la función es siempre continua.

Veamos que sucede en $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x^3 + 3x^2 - 9x + 5} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 + 4x - 5} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x + 1}{x + 5} = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1 + \sqrt{x}} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Podríamos redefinir la función en $x = 1$, en la forma:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x^3 + 3x^2 - 9x + 5} & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \\ \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Para que fuese continua en dicho punto. La nueva función sería continua en todos los puntos de la recta real menos en $x = -5$

