

1º.-Dado el sistema:
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + 3y + 2z = 3 \\ 2x + 2y + z = a \end{cases}$$
, estudiar su compatibilidad en función del parámetro "a" y resolverlo en el caso de compatible indeterminado (pau. País Vasco)

Solución:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + 3y + 2z = 3 \\ 2x + 2y + z = a \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ a \end{pmatrix}}_B$$

$$\text{Ran}(A) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = a - 3 \Rightarrow \begin{cases} \text{si } a = 3, \text{ como } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{Ran}(A) = 2 \\ \text{si } a \neq 3 \Rightarrow \text{Ran}(A) = 3 \end{cases}$$

Si $a \neq 3$, el sistema es compatible y determinado

$$\text{Si } a = 3, \text{ Ran}(A) = 2 \text{ y } \text{Ran}(AB) = \text{Ran} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \text{Ran} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Luego el sistema es compatible e indeterminado; cuya soluciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + 3y + 2z = 3 \\ 2x + 2y + z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = -y \\ 2x + z = 3 - 2y \end{cases}$$

Y aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -y & 1 \\ 3-2y & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = 3 - y \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -y \\ 2 & 3-2y \end{vmatrix}}{-1} = -3$$

2º.-Sean la recta $r: \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$

a) ¿Qué ángulo forman los planos que definen la recta r

b) Determinar la recta que pasa por el punto $A(1, 2, 3)$ y no corta a ninguno de los dos planos que determinan la recta

c) Encontrar el punto que pertenece a la recta r y equidista de los puntos $A(1,2,3)$ y $B(2,1,0)$

Solución:

a)

$$\cos \alpha = \frac{[1 \ -1 \ 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}}{[1 \ -1 \ 1] \cdot [1 \ 1 \ -1]} = \frac{-1}{3} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{-1}{3}\right) \approx 109,47^\circ$$

b)

Es fácil ver que el punto A no pertenece a ninguno de los dos planos que definen la recta r , luego la recta buscada que pasa por A debe ser paralela a la recta r , es decir debe contener el vector:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = [0 \ 2 \ 2], \text{ paralelo a } [0 \ 1 \ 1]$$

Por lo que la recta buscada es :
$$\begin{cases} x=1 \\ y=2+\lambda \\ z=3+\lambda \end{cases}$$

c)

Si escribimos la recta r en forma paramétrica: $r: \begin{cases} x=1 \\ y=1+\mu \\ z=\mu \end{cases}$, cualquier punto de la

recta r tiene la forma: $(1, 1+\mu, \mu)$, luego el punto buscado debe cumplir:

$$d_{r,A} = d_{r,B} \Rightarrow \sqrt{(1-1)^2 + (1+\eta-2)^2 + (\eta-3)^2} = \sqrt{(2-1)^2 + (1-1-\eta)^2 + (0-\eta)^2}$$

Que resolviendo obtenemos: $\eta = \frac{9}{8}$, por lo que el punto buscado es : $\left(1, \frac{17}{8}, \frac{9}{8}\right)$

3º.-Sean las funciones $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ y $g(x) = x^2 - 1$. Encontrar:

a) las ecuaciones de las asíntotas de la función $h(x)$, definida como $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Elige entre b1) o b2) o ambas:

b1) calcula $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx$

b2) calcula $\int x \arctan(x) dx$

Solución.

a) Se trata de encontrar las asíntotas de $h(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x^2 - 1}$

- No tiene asíntotas horizontales pues: $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \infty$

- Asíntotas verticales:

En $x = 1$ pues $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \infty$

y en $x = -1$, ya que $\lim_{x \rightarrow -1} h(x) = \infty$

- Asíntota oblicua de la forma $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x)}{x} = 1 \quad \text{y} \quad n = \lim_{x \rightarrow \infty} [h(x) - x] = -3$$

Luego $y = x - 3$ es una asíntota oblicua.

b1)

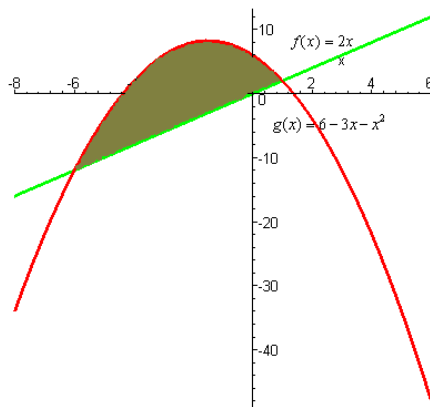
$$\begin{aligned} \int \frac{f(x)}{g(x)} dx &= \int \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x^2 - 1} dx = \int \left[x - 3 - \frac{6}{x+1} + \frac{3}{x-1} \right] dx = \\ &= \frac{x^2}{2} - 3x - 6 \ln|x+1| + 3 \ln|x-1| + k \end{aligned}$$

b2)

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x \arctan(x) dx}_{\substack{u = \arctan x \rightarrow du = \frac{1}{1+x^2} \\ dv = x dx \rightarrow v = \frac{x^2}{2}}} &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \int \frac{\frac{1}{2} x^2}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \left[1 - \frac{1}{1+x^2} \right] dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \arctan x + k = k - \frac{x}{2} + \left(\frac{1+x^2}{x} \right) \arctan x \end{aligned}$$

4º.-Calcular el área de la región del plano encerrada por las gráficas de las funciones $f(x) = 2x$ y $g(x) = 6 - 3x - x^2$ (pau. Navarra)

Solución:



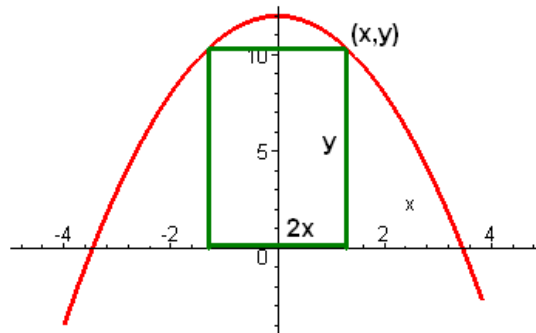
Cortes de la recta $f(x) = 2x$ con $f(x) = 6 - 3x - x^2$

$$2x = 6 - 3x - x^2 \Rightarrow \begin{cases} x = -6 \\ x = 1 \end{cases}, \text{ luego:}$$

$$A = \int_{-6}^1 [6 - 3x - x^2 - 2x] dx = \frac{343}{6} \text{ uni. de área}$$

5º.-Hallar las dimensiones del cartel rectangular de área máxima cuyos dos vértices superiores se sujetan a una estructura metálica rígida en forma parabólica de ecuación $y = 12 - x^2$ y los vértices inferiores están sujetos en el eje 0X. (pau.Valencia)

Solución:



Sean $2x$ e y las dimensiones del cartel; entonces la función a maximizar es:

$$f(x) = 2xy = 2x(12 - x^2) = 24x - 2x^3$$

$$f'(x) = 24 - 6x^2 \text{ que se anula para } \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}; \text{ como } f''(x) = -12x; f(2) < 0, \text{ luego}$$

para dicho valor de x hay un máximo; por lo que las dimensiones del cartel serán:

$$(4, 12 - 2^2) = 4 \text{ unidades de longitud de largo por } 8 \text{ de alto}$$