

1º.- a) Transforma la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ en otra equivalente B en que la submatriz formada por las tres primeras columnas sea una matriz triangular.

b) Aprovecha la transformación de la matriz A realizada en el apartado anterior para resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = -4 \end{cases} \quad (\text{Método de Gauss})$$

Solución:

a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -5 & -13 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -32 & -96 \end{pmatrix}$$

b)

La transformación anterior significa que el sistema dado puede tomar la forma:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ -7y + 3z = -5 \\ -32z = -96 \end{cases} \quad \text{que lo tenemos escalonado en forma de}$$

Gauss, luego:

$$z = \frac{-96}{-32} = 3 \Rightarrow -7y + 3 \cdot 3 = -5 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow 2x + 3 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 5 \Rightarrow x = 1$$

2º.- a) Encontrar, si existen, para qué valores de " x ", la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x+1 & 2 & x-1 \\ x-1 & 1 & x+1 \end{pmatrix}$

no tiene inversa

b) Encontrar la matriz inversa de A

Solución:

a)

La matriz no tiene inversa si su determinante se anula; como:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x+1 & 2 & x-1 \\ x-1 & 1 & x+1 \end{vmatrix} = 6 \quad , \text{ la matriz siempre tiene inversa, independientemente}$$

de lo que valga x

b)

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} x+3 & -4x & 3-x \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow [\text{Adj}(A)]^t = \begin{pmatrix} x+3 & 1 & -2 \\ -4x & 2 & 2 \\ 3-x & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Luego la matriz inversa es:

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} x+3 & 1 & -2 \\ -4x & 2 & 2 \\ 3-x & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{6} + \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-2x}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{3-x}{6} & \frac{-1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

3º) Sean I y A las matrices cuadradas siguientes: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}$. Se

pide calcular, escribiendo explícitamente las operaciones necesarias:

a) Las matrices A^2 y A^3

b) Los números reales α y β para que se verifica $(I + A)^3 = \alpha I + \beta A$

[Selectivo 2008-Valencia]

Solución:

a)

$$\begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 17 \cdot 17 - 29 \cdot 10 & 17 \cdot 29 - 29 \cdot 17 \\ -10 \cdot 17 + 17 \cdot 10 & -10 \cdot 29 + 17 \cdot 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

$$\begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix} = -1 \cdot I \cdot \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & -29 \\ 10 & 17 \end{pmatrix} = -A$$

b)

$$(I + A)^3 = I^3 + 3I^2A + 3IA^2 + A^3 = I + 3A + 3A^2 + A^3 = I + 3A - 3I - A = 2A - 2I$$

Luego $\alpha = -2$ y $\beta = 2$

4º.- Dado el sistema dependiente del parámetro real “a” $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$, se pide:

a) Determinar, razonadamente, los valores de “a” para los que el sistema es compatible determinado

b) Resolver el sistema cuando es compatible determinado

[Selectivo 2008-Valencia]

.....
Solución:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2 \quad \text{que se anula para } \begin{cases} a = -2 \\ a = 1 \end{cases}$$

Si $a = -2$ el sistema toma la forma:

$$\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = 1 \\ x + y - 2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Luego el sistema es incompatible

Si $a = 1$ el sistema toma la forma:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x + y + z = 1 \quad \text{obviamente compatible e indeterminado}$$

Si $a \neq -2$ y $a \neq 1$, el sistema es compatible y determinado

b)

Como hemos visto el sistema es compatible y determinado cuando $a \neq -2$ ó $a \neq 1$ y lo podemos resolver por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{a^3 - 3a^2 + 2} = \frac{a^2 - 2a + 1}{a^3 - 3a^2 + 2} = \frac{(a-1)^2}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{1}{a+2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{(a-1)^2}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{1}{a+2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{(a-1)^2}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{1}{a+2}$$

.....
5°. -a) Dado los vectores $\vec{a} = xi - 3j + 2k$, $\vec{b} = i + j + xk$, encontrar el valor de “x” que hace que esos vectores sean perpendiculares

b) Encontrar un vector $\vec{c}$ que con los dos anteriores forme una base ortogonal para V^3

c) Encontrar el volumen de la figura cuyas aristas son los vectores $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$

d) Calcular el área total de la figura del apartado c)

Solución:

a)

Para que los dos vectores sean perpendiculares $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, luego:

$$(x \quad -3 \quad 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ x \end{pmatrix} = x - 3 + 2x = 0 \Rightarrow x = 1$$

Luego los vectores $i - 3j + 2k$ y $i + j + k$ son perpendiculares

b)

El vector $\vec{a} \times \vec{b}$ es perpendicular a los vectores dados, luego:

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5i + j + 4k$$

c)

Al ser los tres vectores perpendiculares, la figura que delimitan es un prisma rectangular, luego su volumen es:

$$V = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 42 \text{ unidades de volumen}$$

-Volumen que también podríamos haber calculado, en este caso, multiplicando los módulos de los tres vectores:

$$V = (|[1, -3, 2]|)(|[1, 1, 1]|)(|[-5, 1, 4]|) = \sqrt{14}\sqrt{3}\sqrt{42} = 42 \text{ unidades de volumen}$$

d)

El área total es la suma del área de sus caras que son seis rectángulos iguales dos a dos.

$$\begin{aligned} A_{total} &= 2 \left[\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & 4 \end{vmatrix} \right] = 2 \left[|[-5, 1, 4]| + |[-14, -14, -14]| + |[3, -9, 6]| \right] = \\ &= 2(\sqrt{42} + 14\sqrt{3} + 3\sqrt{14}) \cong 83.9 \text{ unidades de área} \end{aligned}$$