

1º.- Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x + 2y + (\alpha + 1)z = 3 \\ -x + y + z = 1 \\ \alpha x + 2y + 3z = 3 \end{cases}, \text{ se pide:}$$

- a) Deducir, razonadamente, para qué valores de α es compatible determinado
- b) Deducir, razonadamente, para que valores de α es compatible indeterminado
- c) Resolver el sistema en los casos compatibles determinados

Solución:

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} 2 & 2 & \alpha + 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ \alpha & 2 & 3 \end{pmatrix} = ? \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 2 & \alpha + 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ \alpha & 2 & 3 \end{vmatrix} = -\alpha^2 - \alpha + 6 = (2 - \alpha)(\alpha + 3) \quad \text{que se}$$

anula para $\alpha = -3$ y $\alpha = 2$

a) Si $\alpha \neq -3$ ó $\alpha \neq 2$, el sistema es compatible y determinado, pues el rango de la matriz de coeficientes y el de la matriz ampliada coincide y es igual a 3

b) Si $\alpha = 2$, el sistema toma la forma:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 3 \\ -x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 3z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y + 3z = 3 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}, \text{ sistema compatible e indeterminado}$$

c)

Aplicando la regla de Cramer cuando $\alpha \neq -3$ ó $\alpha \neq 2$:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & \alpha + 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{(2 - \alpha)(\alpha + 3)} = \frac{2 - \alpha}{(2 - \alpha)(\alpha + 3)} = \frac{1}{(\alpha + 3)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & \alpha + 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ \alpha & 3 & 3 \end{vmatrix}}{(2 - \alpha)(\alpha + 3)} = \frac{(2 - \alpha)(\alpha + 3)}{(2 - \alpha)(\alpha + 3)} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ \alpha & 2 & 3 \end{vmatrix}}{(2 - \alpha)(\alpha + 3)} = \frac{2 - \alpha}{(2 - \alpha)(\alpha + 3)} = \frac{1}{\alpha + 3}$$

2º.-Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $T = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$, se pide razonadamente:

a) La matriz $A^{-1}B - BA^{-1}$

b) La matriz T que cumple que su determinante es -2 y que $TA = BT$

Solución:

a)

$$\begin{aligned} A^{-1}B - BA^{-1} &= \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 11 & 15 \end{pmatrix} - \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 7 & 13 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b)

$$TA = BT \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5x-2y & 2x+y \\ 5y-2z & 2y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x & 3y \\ x+3y & y+3z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-2y=3x \\ 2x+y=3y \\ 5y-2z=x+3y \\ 2y+z=y+3z \end{cases}$$

Y por otra parte: $xz - y^2 = -2$

$$\text{Como. } \begin{cases} 5x-2y=3x \\ 2x+y=3y \\ 5y-2z=x+3y \\ 2y+z=y+3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ x-2y+2z=0 \\ y-2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ y=2z \end{cases} \text{ luego:}$$

$$y \frac{y}{2} - y^2 = -2 \Rightarrow -\frac{y^2}{2} = -2 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2, \text{ luego la matriz } T \text{ es:}$$

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ o bien } T = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

3º.-Dados los puntos $P = (3,4,4)$ y $Q = (1,5,3)$ y los planos de ecuaciones:

$\pi_1 : x + y - z = 0$ y $\pi_2 : 2x + y = 4$, se pide calcular razonadamente:

a) La Ecuación en forma paramétrica de la recta “ r ” que es intersección de los dos planos π_1 y π_2

b) Las coordenadas del punto R de la recta “ r ” que equidista de los puntos P y Q

Solución:

a) El vector director de la recta es $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = [1, -2, -1]$ y un punto de ella es:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y = x \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow (4, -4, 0)$$

Luego la recta buscada es: $\begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = -4 - 2\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$

b) Los puntos de la recta r tienen la forma $(4 + \lambda, -4 - 2\lambda, -\lambda)$, luego:

$$\sqrt{(\lambda + 1)^2 + (-2\lambda - 8)^2 + (-\lambda - 4)^2} = \sqrt{(\lambda + 3)^2 + (-2\lambda - 9)^2 + (-\lambda - 3)^2}$$

O lo que es lo mismo:

$$6\lambda^2 + 42\lambda + 81 = 6\lambda^2 + 48\lambda + 99 \Leftrightarrow 6\lambda + 18 = 0 \Rightarrow \lambda = -3$$

Luego el punto buscado es:

$$\begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = -4 - 2\lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \Big|_{\lambda = -3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

4º.-Un tetraedro tiene por vértices los puntos

$$A = (6, 6, 6), B = (-6, -6, -6), C = (-6, 6, -6) \text{ y } D = (-6, -6, 6)$$

Se pide razonadamente:

- Calcular la longitud de cada una de sus aristas
- Hallar el volumen del tetraedro

Solución:

a) $\overline{AB} = 12\sqrt{3} \text{ u.}$, $\overline{AC} = 12\sqrt{2} \text{ u.}$, $\overline{AD} = 12\sqrt{2} \text{ u.}$, $\overline{BD} = 12 \text{ u.}$, $\overline{CD} = 12\sqrt{2} \text{ u.}$

b) $V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 12 & 12 & 12 \\ 12 & 0 & 12 \\ 12 & 12 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1728}{6} = 288 \text{ unidades de volumen}$

5º.-Encontrar las asíntotas de la función:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$$

Solución:

- Asíntotas horizontal: $y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \begin{cases} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{+\sqrt{x^2 + 1}}{x} = 1 \\ y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\sqrt{x^2 + 1}}{x} = -1 \end{cases}$
- Asíntota vertical: $y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \infty \Rightarrow x = 0$
- No hay asíntotas oblicuas ya que hay horizontales

[nota: los ejercicios del 1 al 4 se ha sacado de los modelos propuestos en las orientaciones para la PAU del presente curso]