

1.- Sean las rectas $r \equiv \frac{x-5}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{4}$ y $s \equiv \begin{cases} 3x-2y+z=2 \\ -x+2y-3z=2 \end{cases}$

a) [2p] Determina su posición relativa.

b) [2p] Calcula la distancia entre ambas.

2.- [3p] Halla el punto de la recta $r \equiv \begin{cases} x+3y+z=1 \\ y+z=1 \end{cases}$ que está más cercano al punto $P(1, -1, 0)$.

3.- [3p] Halla las ecuaciones de una recta que corta a la recta $r \equiv x = y = z$, pasa por el punto $A(1, 2, -1)$ y es paralela al plano $\pi \equiv 3x + 2y - z = 4$.

SOLUCIONES

1.- Sean las rectas $r \equiv \frac{x-5}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{4}$ y $s \equiv \begin{cases} 3x-2y+z=2 \\ -x+2y-3z=2 \end{cases}$

a) Determina su posición relativa.

Las pasamos a paramétricas:

$$s \equiv \begin{cases} 3x-2y=2-\mu \\ -x+2y=2+3\mu \end{cases} \rightarrow 2x=4+2\mu \rightarrow x=2+\mu \rightarrow 2y=2+3\mu+2+\mu$$

$$r \equiv \begin{cases} x=5+2\lambda \\ y=-2-\lambda \\ z=4\lambda \end{cases} \begin{matrix} \vec{d}(2,-1,4) \\ P(5,-2,0) \end{matrix} \quad s \equiv \begin{cases} x=2+\mu \\ y=2+2\mu \\ z=\mu \end{cases} \begin{matrix} \vec{e}(1,2,1) \\ Q(2,2,0) \end{matrix} \quad \text{distinta dirección}$$

$$\begin{cases} 5+2\lambda=2+\mu \\ -2-\lambda=2+2\mu \\ 4\lambda=\mu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2\lambda-\mu=-3 \\ \lambda+2\mu=-4 \\ 4\lambda-\mu=0 \end{cases} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & -4 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A^*| \neq 0 \Rightarrow r(A^*) = 3, r(A) = 2 \Rightarrow \text{Incompatible, las rectas se cruzan}$$

b) Calcula la distancia entre ambas.

Hallamos el plano π paralelo a r (vector $\vec{d}$) y que contiene a s (punto Q y vector $\vec{e}$) y la distancia entre las rectas será la distancia de r a π :

$$\pi : \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 8x-16+2y-4-z-4z+x-2-4y+8=0$$

$$\pi \equiv 9x-2y-5z-14=0$$

$$d(r,s) = d(P,\pi) = \frac{|9 \cdot 5 - 2 \cdot (-2) - 5 \cdot 0 - 14|}{\sqrt{9^2 + (-2)^2 + (-5)^2}} = \frac{35}{\sqrt{110}} = \frac{35\sqrt{110}}{110} = \frac{7\sqrt{110}}{22} u.$$

2.- Halla el punto de la recta $r \equiv \begin{cases} x+3y+z=1 \\ y+z=1 \end{cases}$ que está más cercano al punto

$P(1, -1, 0)$.

Para ello hallamos la ecuación del plano π que pasa por P y es perpendicular a r , y la intersección de ese plano π con la recta r

$$r \equiv \begin{cases} x+3y+z=1 \\ y+z=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=1-\lambda \\ x=1-\lambda-3(1-\lambda) \end{cases}$$

$$r \equiv \begin{cases} x=-2+2\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \rightarrow \vec{d}(2, -1, 1) = \vec{n} \text{ del plano } \pi$$

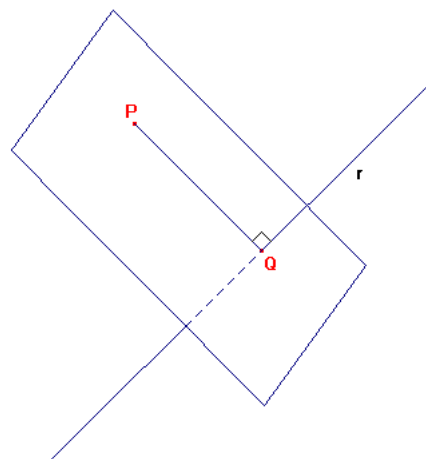
$\pi \equiv 2x - y + z + D = 0$, pasa por el punto P :

$$2+1+0+D=0 \Rightarrow D=-3$$

$$\pi \equiv 2x - y + z - 3 = 0$$

Intersección de r y π : $2(-2+2\lambda) - (1-\lambda) + \lambda - 3 = 0 \rightarrow -4 + 4\lambda - 1 + \lambda + \lambda - 3 = 0$

$$6\lambda - 8 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{4}{3} \rightarrow Q \begin{cases} x = -2 + \frac{8}{3} \\ y = 1 - \frac{4}{3} \\ z = \frac{4}{3} \end{cases} \rightarrow Q\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$$



3.- Halla las ecuaciones de una recta que corta a la recta $r \equiv x = y = z$, pasa por el

punto $A(1, 2, -1)$ y es paralela al plano $\pi \equiv 3x + 2y - z = 4$. $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

Hallamos un plano π' , que sea paralelo al plano π y pase por A . Después hallamos el punto de corte P entre el plano π' y la recta r , la recta pedida será la que pasa por los puntos P y A

$$\pi' \equiv 3x + 2y - z + D = 0 \rightarrow 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 1(-1) + D = 0 \Rightarrow D = -8$$

$\pi' \equiv 3x + 2y - z - 8 = 0$, ahora la intersección con r , que será el punto P :

$$\pi' \equiv 3\lambda + 2\lambda - \lambda - 8 = 0 \Rightarrow 4\lambda - 8 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \rightarrow P(2, 2, 2)$$

Recta pedida pasa por A y $P \rightarrow \vec{d}(2-1, 2-2, 2+1) \rightarrow \vec{d}(1, 0, 3)$

$$A(1, 2, -1) \text{ y } \vec{d}(1, 0, 3) \rightarrow r' \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}$$