

.....
 1º.-Calcular razonadamente el área de la superficie S limitada por la curva
 $y = \frac{1}{(3-x)(3+x)}$, el eje OX y la rectas $x = -2$ y $x = 2$ [PAU C. Valenciana]

Solución:

$\frac{1}{(3-x)(3+x)} = \frac{\frac{1}{6}}{x+3} - \frac{\frac{1}{6}}{x-3}$, por otra parte como la curva no corta al eje OX en el intervalo $[-2,2]$, podemos integrar directamente:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \frac{1}{(3-x)(3+x)} dx &= \int_{-2}^2 \frac{\frac{1}{6}}{x+3} dx - \int_{-2}^2 \frac{\frac{1}{6}}{x-3} dx = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x+3}{x-3} \right| \Big|_{-2}^2 = \\ &= \frac{1}{6} (\ln 5 - \ln 1 + \ln 5) = \frac{\ln 5}{3} \cong 0,54 \text{ uni. de área} \end{aligned}$$

2º.- Calcula $\int x^2 \cos x \, dx$

Solución:

Integrando por partes:

$$\begin{cases} u = x^2 \xrightarrow{\text{diferenciando}} du = 2x dx \\ dv = \cos x dx \xrightarrow{\text{integrando}} v = \sin x \end{cases}$$

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x \, dx \quad , \text{ y volviendo a integrar por partes:}$$

$$\begin{cases} u = x \xrightarrow{\text{diferenciando}} du = dx \\ dv = \sin x dx \xrightarrow{\text{integrando}} v = -\cos x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos x \, dx &= x^2 \sin x - 2 \int x \sin x \, dx = x^2 \sin x - 2 \left[-x \cos x + \int \cos x \, dx \right] = \\ &= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + k \end{aligned}$$

3º.-Considera la función $f(x) = \frac{x(a-x)}{a^3}$, siendo "a" un parámetro positivo.

Comprueba razonadamente que el área del recinto limitado por la gráfica de la función y el eje de abscisas no depende del valor del parámetro "a" [PAU Cataluña]

Solución:

La gráfica de la función corta al eje de abscisas en $x(a-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=a \end{cases}$, luego:

$$\int_0^a \frac{x(a-x)}{a^3} dx = \frac{1}{a^3} \int_0^a (xa - x^2) dx = \frac{1}{a^3} \left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{1}{a^3} \left(\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} \right) = \frac{1}{6} \text{ uni. de área}$$

que no depende de "a"

4º.-Calcula la integral definida $\int_1^4 \frac{\sqrt{x} + e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

Solución:

Haciendo el cambio $x = t^2 \Leftrightarrow dx = 2t dt$, tenemos:

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{\sqrt{x} + e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx &= \int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx + \int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int_1^4 dx + \int_1^4 \frac{e^t dt}{t} 2t dt = x \Big|_1^4 + 2e^t \Big|_{x=1, t=\sqrt{x}}^{x=4, t=\sqrt{x}} = \\ &= 2e^2 - 2e + 3 \cong 12.34 \end{aligned}$$

5º.- Calcula el área limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^3 - 4x$ y $g(x) = 3x - 6$ [PAU Andalucía]

Solución:

Las gráficas se cortan en los puntos: $x^3 - 4x = 3x - 6 \Rightarrow x^3 - 7x + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$;

dado que en el intervalo $[-3, 1]$, $f(x) > g(x)$ y en $[1, 2]$, $g(x) > f(x)$, tenemos:

$$S = \int_{-3}^1 [(x^3 - 4x) - (3x - 6)] dx + \int_1^2 [(3x - 6) - (x^3 - 4x)] dx = 32 + \frac{3}{4} = \frac{131}{4} \text{ uni. de área}$$