

1º-Hallar **a** y **b** para que las rectas siguientes sean paralelas:

$$r \equiv \begin{cases} 2x + ay - z = 1 \\ 2x + 3y + bz = 3 \end{cases} \quad s \equiv 4x = 2y + 6 = z \quad \text{Sol: } a=1 ; b=-2$$

2º-Dadas las rectas de ecuaciones $\frac{x}{2} = y - 1 = \frac{z - 2}{2}$ $(x, y, z) = (2, 0, 1) + \alpha(1, 1, -2)$

- a) Estudiar su posición relativa en el espacio.
- b) Calcular las distancias entre ellas.
- c) Trazar una recta que corte perpendicularmente a ambas.

$$\text{Sol: a) Cruzan} \quad \text{b) } d(r, s) = 2,06 \quad \text{c) } t \equiv \begin{cases} x = \frac{18}{53} + 4\lambda \\ y = \frac{62}{53} - 6\lambda \\ z = \frac{124}{53} - \lambda \end{cases}$$

3º-Dados los planos de ecuaciones: **$ax - 2z = 15$ $2x + y + z = -7$ $x + y + az = -8a$**

- a) Determinar los valores de **a** para que los tres planos pasen por una recta.
 - b) En este caso, determinar dos puntos de esta recta.
- Sol: a) $a = -1$ b) A(-15, 23, 0) B(1, -1, -8).

4º-Encontrar las ecuaciones de todos los planos paralelos al plano $\pi \equiv 4x - 4y + 2z = 1$ y que disten de éste 1 unidad de longitud. Sol: $\pi' \equiv 4x - 4y + 2z = 7$
 $\pi'' \equiv 4x - 4y + 2z = -5$

5º-Averiguar la posición relativa de las rectas: $r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{4}$

$$s \equiv \frac{x+2}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{4}$$

Sol: Se cruzan.

6º-Dada la recta **r** de ecuación $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{4}$ hallar:

- a) Las ecuaciones implícitas de otra recta cualquiera **r'** que sea ortogonal a **r**, pase por el punto **A(0, -3, 2)** y no corte a **r**.
- b) Un punto **B** en **r** y otro **B'** en **r'** de modo que el módulo del segmento **BB'** sea la distancia entre **r** y **r'**.

$$\text{Sol: a) } r' \equiv \begin{cases} z = 2 \\ 3x + 2y + 6 = 0 \end{cases} \quad \text{b) } B(-40/29, 41/29, 24/29) \quad B'(-32/13, 9/13, 2)$$

7º-Determinar condiciones en el parámetro **a** para que la recta definida por las ecuaciones:

$$r \equiv \begin{cases} 3x + ay + z - 1 = 0 \\ 2x + 6y - 2z - 6 = 0 \end{cases} \quad \text{esté situada en el plano } \mathbf{x+y+z+1=0}$$

$$\text{Sol: } r \equiv \begin{cases} 3x + 5y + z - 1 = 0 \\ 2x + 6y - 2z - 6 = 0 \end{cases}$$

8º-Determinar, en función de x, la distancia de un punto de coordenadas (x,0,0) a la recta de ecuaciones:

$$r \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \quad \text{¿Para qué punto (x,0,0) la distancia a dicha recta es igual a la distancia al plano } \mathbf{x=0} ?$$

$$\text{Sol: a) } d(p,r) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} |x| \quad \text{b) } x=0$$

9º-Determinar t para que los puntos **A(1,1,1)** **B(3,0,2)** **C(5,-2,2)** **D(2,1,t)** sean coplanarios. Para el valor t calculado anteriormente, obtener el área del polígono

$$\mathbf{ABCD.} \quad \text{Sol: } t=2 \quad \text{Area} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$$

10º-Dados los puntos **A(3,-2,0)** y **B(1,-2,-2)** y la recta de ecuación $r \equiv x = y = z$ calcular la distancia desde el punto **B** al plano que contiene a **r** y al punto **A**.. Sol:

$$d = \frac{6}{\sqrt{38}} = 0,973$$

11º-Hallar la ecuación del plano que pasa por **P(0,0,1)** y contiene a la recta

$$r \equiv \begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Sol: } \pi = 4x - 3y + 7z - 7 = 0$$

12º-Hallar la distancia del punto **Q(5,5,-3)** al plano $\pi \equiv (x,y,z) = (0,0,4) + \lambda(2,2,-1) + \mu(-3,2,0)$

$$\text{Sol: a) } d = \frac{45}{\sqrt{113}}$$

13º-Dado el sistema de ecuaciones lineales:
$$\begin{cases} \alpha x + \alpha \beta y + (1 - \alpha)z = \beta \\ x + \beta y + z = 2 \\ \alpha x + \alpha y + (1 - \alpha)z = \beta \end{cases}$$

a) Demostrar que si $\alpha=0$, dicho sistema representa una recta y hallar sus ecuaciones paramétricas.

b) Para que valores de α y β representa un plano. Sol: b) $\alpha = \frac{1}{2}\beta = 1$

14º-Calcular el ángulo que forma la recta r y el plano $\pi : r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{3}$

$$\pi \equiv x - y - z = 0$$

Sol: Recta paralela al plano

15º-Dado el plano de ecuación $\pi \equiv 2x + 2y + z - 3 = 0$ y el punto **A(1,0,2)**; sea B el pie de la perpendicular de A a π y **C(2,1,-2)** un punto. Se pide el área del triángulo

ABC. Sol: $A = \frac{\sqrt{2}}{2}$

16º-Dadas las rectas de ecuaciones:

$$r \equiv \begin{cases} 3x - 2z = -3 \\ 3x - kz = 3 - 4k \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} 3y - 2z = -2 \\ kx - 2y = k - 4 \end{cases}$$

determinar los valores de k para los cuales las rectas están en un mismo plano y buscar una ecuación de este plano.

Sol: $K = -2$ $3x + 2z - 11 = 0$

17º-Determinar el plano que pasa por la recta de ecuación: $r \equiv \begin{cases} x + y + z = -5 \\ x - 2y - z = 3 \end{cases}$

y es paralelo a la recta de ecuación: $r' \equiv \frac{2x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{-z+174}{2}$

Sol: $\pi \equiv 13x - 8y - z + 9 = 0$

18º-Hallar la distancia del punto A(1,2,3) a la recta $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ y la ecuación del plano π que pasa por A y es perpendicular a la recta. Sol: $d = \sqrt{5}$ $\pi \equiv z = 3$

19º-Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto A(2,0,1) y contiene a la recta de ecuación

$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{-1}$ Sol: $\pi \equiv 4x - 3y + 5z - 13 = 0$

20º-Sean las rectas: $r \equiv \begin{cases} x = 3 - 5t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$

a) Hallar la ecuación de un plano que pasa por A(-1,-1,0) y es paralelo a las dos rectas.

b) Hallar las intersecciones de dicho plano con los ejes coordenados.

Sol: $\pi \equiv 14x + 35y - 18z + 49 = 0$ $(-7/2, 0, 0)$ $(0, -7/5, 0)$ $(0, 0, 49/18)$

21º-Comprobar que los puntos A,B,C forman un triángulo: A(1,1,1) B(0,-1,0)
C(2,3,0). Hallar el área de dicho triángulo. Sol: $A = \sqrt{5}$

22º-Obtener las coordenadas del punto simétrico del A(1,-3,7) respecto de la recta:

$r \equiv x - 1 = y + 3 = \frac{z - 4}{2}$ Sol: A'=(3,-1,5)

23º-Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$ $s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{-2}$ estudiar su posición y, si

fuese posible, la ecuación del plano que las contiene. Sol: Las rectas se cruzan. No hay plano que las contengan.

24º-Hallar la distancia entre el punto (3,2,7) y la recta diagonal del primer octante del espacio $\mathbb{R}^3$.

Sol: $d = \sqrt{14}$

25º-Una recta es paralela a los planos $x+y=1$ $x+z=0$ y pasa por el punto (2,0,0). Hallar sus ecuaciones.

Sol: $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-1}$

26º-Hallar la ecuación de un plano que es perpendicular a la recta dada por los planos $2x+y-z=0$, $x-y+z+3=0$ y pasa por el punto (3,2,1). Sol: $\pi \equiv y + z = 3$

27º-Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto (1,0,-1) es perpendicular al plano $x-y+2z+1=0$ y además es paralelo a la recta $\begin{cases} x-2y=0 \\ z=0 \end{cases}$. Sol:

$\pi \equiv 2x - 4y - 3z - 5 = 0$

28º-Sean los planos: $\pi_1 \equiv x + y + z = \alpha - 1$ $\pi_2 \equiv 2x + y + \alpha z = \alpha$ $\pi_3 \equiv x + \alpha y + z = 1$

Se pide: a) Estudiar, según los valores del parámetro la posición relativa de los tres planos anteriores.

b) Hallar la intersección de los planos cuando $\alpha=2$.

Sol: a) $\alpha = 1$ No tienen ningún punto común. $\alpha = 2$ Se cortan según una recta.
 $\alpha \neq 1 \neq 2$ Se cortan en un punto.

$$b) r \equiv \begin{cases} \frac{x-1}{-1} = \frac{z}{1} \\ y = 0 \end{cases}$$

29º-a) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (1,2,3) y es perpendicular al plano de ecuación $2x-y+3z+5=0$

b) Calcular la distancia del punto al plano.

$$\text{Sol: a) } \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{3} \quad b) d = \sqrt{14}$$

30º-Dados dos planos de ecuaciones $3x-y+z=1$ $x+y-2z=0$ hallar un vector cuya dirección sea paralela a ambos. Sol: $\mathbf{v}=(1,7,4)$

$$31^\circ\text{-Se consideran las rectas } r \equiv \begin{cases} x-2=0 \\ y+3=0 \end{cases} \text{ y } s \equiv \begin{cases} x-2z=1 \\ y+z=3 \end{cases}.$$

Se pide :

-Estudiar la posición relativa de r y s.

-Hallar la mínima distancia entre ambas. Sol: Se cruzan $d_m = \frac{11\sqrt{5}}{5}$

32º-Se considera la recta $r \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=4z \end{cases}$ y el punto P(3,4,1). Hallar el plano π que contiene a la recta r y al punto P. Calcular la distancia de P a r. Sol: d=3

33º-Sean los planos de ecuaciones: $x-y-1=0$ $2x+3y-5z+16=0$ $x+\alpha y-z=0$ donde α es un parámetro. Probar que, salvo para un cierto valor de α , dichos planos se cortan en un único punto. Determinar dicho valor. Sol: $\alpha_0 = 0$

34º-Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto (1,-1,2) y es perpendicular al plano determinado por los puntos (1,0,1) (3,2,1) y (2,-1,0). Expresarla como intersección de dos planos.

$$\text{Sol: } r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ \frac{z-2}{1} = \lambda \end{cases}$$

35º-Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A(1,1,1) es paralela al plano $x-2y-z=0$ y está en un mismo plano que la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ Sol:

$$r \equiv \begin{cases} x-1 = z-1 \\ y = 1 \end{cases}$$

36º-Dados los puntos A(1,0,-1) y el plano $\pi \equiv 2x - y + 3z = 4$ se pide:

a) La ecuación de la recta que pasa por **A** es perpendicular a π .

b) El punto simétrico de **A** respecto a π .

c) De todos los planos que pasan por **A** y son perpendiculares a π , hallar el que pasa por B(2,1,2).

d) Ecuación del plano que pasa por **A** y es paralelo a π .

Sol: a) $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{3}$ b) A' = (17/7, -5/7, 8/7) c) $\pi_1 \equiv 2x + y - z - 3 = 0$ d) $\pi_2 \equiv 2x - y + 3z + 1 = 0$

37º-Calcula los planos bisectores de los planos $x+y-z=0$ $x-y+z=0$ simplificando al máximo el resultado. ¿Que ángulo forman los planos bisectores? ¿Es esta una propiedad general? Razonar la respuesta.

Sol: $\pi_1 \equiv y - z = 0$ $\pi_2 \equiv x = 0$ $\alpha = 90^\circ$

38º-Calcular el ángulo formado por las rectas de ecuaciones:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{1} \quad s \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{1} \quad \text{Sol: } \alpha = 90^\circ$$

39º-Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto (1,2,3) y es paralela a la recta:

$$r \equiv \begin{cases} 2x + 3y - z = -1 \\ x - y + 3z = 4 \end{cases} \quad \text{Sol: } \frac{x-1}{8} = \frac{y-2}{-7} = \frac{z-3}{5}$$

40º-Hallar las coordenadas del punto de la recta $r \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z+4}{3}$ que equidista del origen de coordenadas y del punto (3,2,1). Sol: P(1,1,2)

41º-Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2 + \alpha \\ y = -\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$ y la recta **s** determinada por los puntos A(2,1,0) y B(1,0,-1) estudiar su posición relativa y determinar un punto C de **r** tal que los segmentos **CA** y **CB** sean perpendiculares.

Sol: a) Se cortan b) C(2,0,0) C'(1,1,-1)

42º-Justificar que los puntos A(1,1,1) B(2,0,-1) C(5,2,1) y D(4,3,3) son los vértices consecutivos de un paralelogramo y obtener la ecuación del plano que lo contiene.

Sol: $\pi \equiv 2x - 8y + 5z + 1 = 0$

43º-a) Determinar la ecuación del plano π que pasa por el punto de coordenadas (1,-1,2) y es ortogonal a la recta de ecuación

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-2}{1}$$

b) Hallar el punto de π cuya distancia al (3,-4,3) es mínima.

Sol: a) $\pi \equiv 2x - 3y + z - 7 = 0$

b) P(5/7, -4/7, 13/7)

44º-Calcular la distancia del punto (-2,4,-3) a la recta cuya ecuación es $\begin{cases} x = 2z + \frac{1}{2} \\ y = 4 - \frac{2z}{3} \end{cases}$

Sol: d=1'4

45º-Hallar una recta que sea perpendicular al plano $\mathbf{x-y+2z=-1}$ y que pase por el punto de dicho plano que está más próximo al origen de coordenadas.

Sol: $\frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$