EXAMEN DE DERIVABILIDAD.

1. Dada la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{senx}{x} & si \ \ x<0 \\ x\cdot e^x+1 & si \ \ x\geq 0 \end{cases}$ estudiar la derivabilidad y calcular f’ cuando sea posible.

   a. Continuidad.

   $$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{senx}{x} \text{ es continua en } \mathbb{R}\text{-}\{0\} \\ y=xe^x+1 \text{ es continua en } \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow contiuas \ \ en \ \mathbb{R}\text{-}\{0\}$$

   Estudiamos la continuidad en x=0

   $$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{senx}{x}=\left(\frac{0}{0}ind\right)\underset{\substack{senx\approx x \\ \text{infinitésimo}}}{=}\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} xe^x+1=0\cdot 1+1=1$$

   $f(0)=1$ → La función es continua en x=0 y por tanto en todo $\mathbb{R}$

   b. Derivabilidad.

   $$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{x\cos x-\operatorname{sen} x}{x^2} & si \ \ x<0 \\ e^x+xe^x & si \ \ x>0 \end{cases}$$

   $$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x\cos x-senx}{x^2}=\left(\frac{0}{0}Ind\right)\underset{L'Hôpital}{=}\lim_{x\to 0^-}\frac{-xsenx}{2x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-2senx}{2}=0$$

   $$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\left(e^x+xe^x\right)=1$$

   $\Rightarrow$ no es derivable en x=0

2. Calcular “a”y “b” para que la función $f(x)=\begin{cases} senx & si \ \ x\leq 0 \\ -x^2+ax+b & si \ \ x>0 \end{cases}$ sea derivable x=0.

   a. Continuidad en x=0

   $$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(-x^2+ax+b\right)=b \ \wedge \ \lim_{x\to 0^-} f(x)=senx=0 \ \wedge \ f(0)=0 \Rightarrow \text{continua si } b=0$$

   b. Derivabilidad en x=0

   $$f'(x)=\begin{cases} \cos x & si \ \ x<0 \\ -2x+a & si \ \ x>0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\cos x=1 \\ f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}-2x+a=a \end{array} \Rightarrow a=1 \Rightarrow derivable \ \ para \ a=1 \ y \ b=0.$$

3. Calcular “a”y “b” para que la función $f(x)=\begin{cases} ax^2+b & si \ \ x\leq 1 \\ \ln x & si \ \ x>1 \end{cases}$ sea derivable en x=1.

   a. Continuidad en x=1

   $$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\ln x=0 \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x)=ax^2+b=a+b \qquad f(1)=a+b \qquad \Rightarrow \text{a+b=0}$$

   b. Derivabilidad en x=1

   $$f'(x)=\begin{cases} 2ax & si \ \ x<1 \\ \dfrac{1}{x} & si \ \ x>1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} f'(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-}2ax=2a \\ f'(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x}=1 \end{array} \Rightarrow 2a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

   $$\frac{1}{2}+b=0 \Rightarrow b=-\frac{1}{2} \Rightarrow y=f(x) \ es \ derivable \ en \ x=1 \ si \ a=1/2 \ y \ b=-1/2$$