

GEOMETRÍA

1.- Calcula a y b para que los puntos $A(1, 2, -1)$, $B(3, 0, -2)$ y $C(4, a, b)$ estén alineados.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB}(2, -2, -1) \\ \overrightarrow{AC}(3, a-2, b+1) \end{array} \right\} \text{ Para que estén alineados ha de ser: } \frac{3}{2} = \frac{a-2}{-2} = \frac{b+1}{-1}$$

Por tanto:

$$\frac{a-2}{-2} = \frac{3}{2} \rightarrow a-2 = -3 \rightarrow a = -1$$

$$\frac{b+1}{-1} = \frac{3}{2} \rightarrow b = \frac{-3}{2} - 1 \rightarrow b = \frac{-5}{2}$$

2.- Halla las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $A(-4, 2, 5)$ y es paralela al eje OZ .

Si es paralela al eje OZ , tiene como vector dirección $(0, 0, 1)$.

• *Ecuación vectorial:*

$$(x, y, z) = (-4, 2, 5) + \lambda(0, 0, 1)$$

• *Ecuaciones paramétricas:*

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \\ z = 5 + \lambda \end{cases}$$

• *Forma continua:*

$$\frac{x+4}{0} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-5}{1}$$

• *Forma implícita:*

$$\left. \begin{array}{ll} x = -4 & \rightarrow x + 4 = 0 \\ y = 2 & \rightarrow y - 2 = 0 \end{array} \right\}$$

3.- Escribe las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $P(1, -3, 0)$ y es paralela al vector $u \times v$, siendo $u(1, -1, 2)$ y $v(2, 0, 0)$.

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = (0, 4, 2) // (0, 2, 1)$$

• *Ecuación vectorial:*

$$(x, y, z) = (1, -3, 0) + \lambda(0, 2, 1)$$

• Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

• Forma continua:

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-0}{1}$$

• Forma implícita:

$$\left. \begin{aligned} x &= 1 && \rightarrow x-1=0 \\ \frac{y+3}{2} &= \frac{z}{1} && \rightarrow y+3=2z \rightarrow y-2z+3=0 \end{aligned} \right\}$$

4.- Estudia la posición relativa de las siguientes rectas y halla el punto de corte, cuando sea posible:

a) $r: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{4}$ $s: \frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{3}$

b) $r: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{1}$ $s: \frac{x-4}{4} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{2}$

c) $r: \frac{x}{2} = y-1 = \frac{z+1}{3}$ $s: \begin{cases} x-2y-1=0 \\ 3y-z+1=0 \end{cases}$

d) $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ $s: \begin{cases} x=3+4\lambda \\ y=3+6\lambda \\ z=4+8\lambda \end{cases}$

a) $\vec{d}_r(3, 2, 4); P(1, -2, 1)$

$\vec{d}_s(-1, 2, 3); P(-2, 3, 2)$

$\vec{PP}(-3, 5, 1)$

$M' = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_M \rightarrow |M'| = -51 \neq 0 \rightarrow \text{Las rectas se cruzan.}$

b) $\vec{d}_r(-1, 2, 1); P(1, 1, 2)$

$\vec{d}_s(4, 1, 2); P(4, 4, 5)$

$\vec{PP}(3, 3, 3)$

$M' = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_M \rightarrow |M'| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow \text{rang}(M) = \text{rang}(M') = 2 \rightarrow$
 $\rightarrow \text{Las rectas se cortan.}$

Para hallar el punto de corte, escribimos las dos rectas en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 4 + 4\mu \\ y = 4 + \mu \\ z = 5 + 2\mu \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 - \lambda = 4 + 4\mu \\ 1 + 2\lambda = 4 + \mu \\ 2 + \lambda = 5 + 2\mu \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Sumando la 1ª y la 3ª: } 3 = 9 + 6\mu \rightarrow \mu = -1 \\ \text{Sustituyendo en la 1ª: } 1 - \lambda = 4 - 4 \rightarrow \lambda = 1 \end{array}$$

Sustituyendo $\lambda = 1$ en las ecuaciones de r (o bien $\mu = -1$ en las de s), obtenemos el punto de corte: $(0, 3, 3)$.

$$c) \vec{d}_r(2, 1, 3); P(0, 1, -1)$$

$$\vec{d}_s(1, -2, 0) \times (0, 3, -1) = (2, 1, 3)$$

Tienen la misma dirección, y el punto $P \in r$, pero $P \notin s$, luego las rectas son paralelas.

$$d) \left. \begin{array}{l} \vec{d}_r(2, 3, 4) \\ \vec{d}_s(4, 6, 8) \end{array} \right\} \text{Tienen la misma dirección.}$$

Veamos si el punto $P(1, 0, 0) \in r$, pertenece también a s :

$$\left. \begin{array}{l} 3 + 4\lambda = 1 \rightarrow \lambda = -1/2 \\ 3 + 6\lambda = 0 \rightarrow \lambda = -1/2 \\ 4 + 8\lambda = 0 \rightarrow \lambda = -1/2 \end{array} \right\} P \in s$$

Por tanto, las rectas r y s coinciden, son la misma recta.

5.- Obtén el valor de a para el cual las rectas r y s se cortan, y halla el punto de corte:

$$r: x = y = z - a \quad s: \frac{2x-1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{0}$$

$$r: x = y = z - a \rightarrow \vec{d}_r(1, 1, 1); P(0, 0, a)$$

$$s: \frac{x-1/2}{3/2} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{0} \rightarrow \vec{d}_s\left(\frac{3}{2}, -2, 0\right); P'\left(\frac{1}{2}, -3, 2\right)$$

$$PP'\left(\frac{1}{2}, -3, 2-a\right)$$

$$M' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 2-a \end{pmatrix}}_M \rightarrow \text{rang}(M) = 2$$

Para que las rectas se corten, ha de ser $\text{rang}(M') = 2$, es decir, $|M'| = 0$:

$$|M'| = \frac{7\alpha - 21}{2} = 0 \rightarrow \alpha = 3$$

Para hallar el punto de corte, escribimos las rectas en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mu \\ y = -3 - 2\mu \\ z = 2 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mu \\ \lambda &= -3 - 2\mu \\ 3 + \lambda &= 2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} -1 &= -3 - 2\mu \rightarrow \mu = -1 \\ \lambda &= -1 \end{aligned}$$

Sustituyendo $\lambda = -1$ en las ecuaciones de r (o $\mu = -1$ en las de s), obtenemos el punto de corte: $(-1, -1, 2)$.

6.- Halla los valores de m y n para que las rectas r y s sean paralelas:

$$r: \begin{cases} x = 5 + 4\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \quad s: \frac{x}{m} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+3}{n}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{d}_r(4, 1, -1) \\ \vec{d}_s(m, 3, n) \end{aligned} \right\} \text{ Las coordenadas han de ser proporcionales:}$$

$$\frac{m}{4} = \frac{3}{1} = \frac{n}{-1} \rightarrow m = 12, n = -3$$

(El punto $P(0, 1, -3) \in s$, pero $P \notin r$; luego las dos rectas son paralelas si $m = 12$ y $n = -3$).

7.- Calcula m y n para que los planos $\alpha: mx + y - 3z - 1 = 0$ y $\beta: 2x + ny - z - 3 = 0$ sean paralelos. ¿Pueden ser coincidentes?

$$\left. \begin{aligned} \vec{n}_\alpha(m, 1, -3) \\ \vec{n}_\beta(2, n, -1) \end{aligned} \right\} \text{ Las coordenadas han de ser proporcionales:}$$

$$\frac{m}{2} = \frac{1}{n} = \frac{-3}{-1} \rightarrow m = 6, n = \frac{1}{3}$$

Así, quedaría:

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha: 6x + y - 3z - 1 &= 0 \rightarrow 6x + y - 3z - 1 = 0 \\ \beta: 2x + \frac{1}{3}y - z - 3 &= 0 \rightarrow 6x + y - 3z - 9 = 0 \end{aligned} \right.$$

Los planos son paralelos, no coincidentes. No pueden ser coincidentes pues los términos independientes no son proporcionales a los anteriores.

8.- Escribe la ecuación del plano que pase por los puntos $(0, 0, 0)$, $(2, 2, 0)$ y $(1, 1, 2)$.

$$(2, 2, 0) \times (1, 1, 2) = (4, -4, 0) \rightarrow \vec{n}(1, -1, 0)$$

$$P(0, 0, 0)$$

$$\text{El plano es: } x - y = 0$$

9.- Determina el valor de a para que las rectas r y s sean coplanarias. Halla el plano que las contiene.

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y-a}{1} = \frac{z}{0} \quad s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$$

$$\vec{d}_r(1, 1, 0); P(0, a, 0)$$

$$\vec{d}_s(1, -1, 1); P(1, 1, -1)$$

$$\vec{PP}(1, 1-a, -1)$$

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1-a \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Para que las rectas sean coplanarias, ha de ser } |M'| = 0.$$

$$|M'| = a + 2 = 0 \rightarrow a = -2$$

$$\text{Un vector normal al plano es: } \vec{d}_r \times \vec{d}_s = (1, 1, 0) \times (1, -1, 1) = (1, -1, -2)$$

$$\text{El plano que las contiene es: } 1(x-1) - 1(y-1) - 2(z+1) = 0$$

$$x - y - 2z - 2 = 0$$

10.- Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(1, 3, 2)$ y $B(-2, 5, 0)$ y es paralelo a la recta:

$$\begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -2 - 3\lambda \end{cases}$$

$$\text{El plano será paralelo a } \vec{AB}(-3, 2, -2) \text{ y a } \vec{d}(-1, 1, -3).$$

$$\text{Un vector normal al plano es: } (-3, 2, -2) \times (-1, 1, -3) = (-4, -7, -1) \rightarrow \vec{n}(4, 7, 1)$$

$$\text{El plano es: } 4(x-1) + 7(y-3) + 1(z-2) = 0$$

$$4x + 7y + z - 27 = 0$$

11.-

$$\text{Dado el plano } \pi: 2x - 3y + z = 0 \text{ y la recta } r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2},$$

halla la ecuación del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π .

$$\text{El plano será paralelo a } (2, -3, 1) \text{ y a } (1, -1, 2).$$

$$\text{Un vector normal al plano es: } (2, -3, 1) \times (1, -1, 2) = (-5, -3, 1) \rightarrow \vec{n}(5, 3, -1)$$

$$\text{El punto } (1, 2, -1) \text{ pertenece al plano.}$$

$$\text{La ecuación del plano es: } 5(x-1) + 3(y-2) - 1(z+1) = 0$$

$$5x + 3y - z - 12 = 0$$

12.- Estudia la posición de los siguientes planos:

$$\text{a)} \begin{cases} x + 2y - z - 3 = 0 \\ 3y + 2z - 1 = 0 \\ x + y + z - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{b)} \begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \\ 3x - y + z - 4 = 0 \end{cases} \quad \text{c)} \begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \\ 2x + 2y - 3z + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{a)} \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 3y + 2z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \quad M' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_M$$

$|M| = 8 \rightarrow \text{ran}(M) = \text{ran}(M') = 3 \rightarrow$ Los tres planos se cortan en un punto.

$$\text{b)} \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - y + z = 2 \\ 3x - y + z = 4 \end{cases} \quad M' = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}}_M$$

La 3ª columna es $-1 \cdot 2^a$, y la 4ª columna se obtiene sumando la 1ª y la 3ª.

Luego $\text{ran}(M) = \text{ran}(M') = 2 \rightarrow$ Los tres planos se cortan en una recta.

$$\text{c)} \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3x + y - 2z = 0 \\ 2x + 2y - 3z = -4 \end{cases} \quad M' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}}_M$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \text{ y } |M| = 0 \rightarrow \text{ran}(M) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(M') = 3$$

Los planos se cortan dos a dos, pero no hay ningún punto común a los tres.

13.- Halla el valor de a para que las rectas r y s estén en un mismo plano y halla la ecuación de ese plano:

$$r: \begin{cases} x - 2z = 0 \\ y - z = 2 \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2z = a \end{cases}$$

Escribimos las ecuaciones de r y s en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x - 2z = 0 \rightarrow x = 2z \\ y - z = 2 \rightarrow y = 2 + z \end{cases} \quad r: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x + y = 1 \rightarrow y = 1 - x \\ x + 2z = \alpha \rightarrow z = \frac{\alpha}{2} - \frac{x}{2} \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = \frac{\alpha}{2} - \lambda \end{cases}$$

Obtenemos un punto y un vector dirección de cada recta:

$$\vec{d}_r(2, 1, 1); P(0, 2, 0)$$

$$\vec{d}_s(2, -2, -1); P'(0, 1, \alpha/2)$$

$$\vec{PP'}(0, -1, \alpha/2)$$

Para que las rectas estén en el mismo plano, los vectores $\vec{d}_r$, $\vec{d}_s$ y $\vec{PP'}$ han de ser coplanarios:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & \alpha/2 \end{vmatrix} = -3\alpha - 4 = 0 \rightarrow \alpha = \frac{-4}{3}$$

El plano será paralelo a $\vec{d}_r$ y a $\vec{d}_s$. Un vector normal al plano es:

$$\vec{n} = (2, 1, 1) \times (2, -2, -1) = (1, 4, -6)$$

El punto $P(0, 2, 0)$ pertenece al plano.

La ecuación del plano es: $1(x - 0) + 4(y - 2) - 6(z - 0) = 0$

$$x + 4y - 6z - 8 = 0$$

14.-

Halla la ecuación de la recta paralela a $r: \begin{cases} x + 2z = 5 \\ y + 3z = 5 \end{cases}$ que pase por

el punto de intersección de la recta $s: \frac{x-1}{4} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{3}$ con el plano $\pi: x - y + z = 7$.

Un vector dirección de la recta es: $(1, 0, 2) \times (0, 1, 3) = (-2, -3, 1) // (2, 3, -1)$

Escribimos la recta s en forma paramétrica para hallar el punto de corte de s y π :

$$s: \begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = -2 + 3\lambda \end{cases} \quad \pi: \begin{cases} x - y + z = 7 \\ 1 + 4\lambda + 3 - 2\lambda - 2 + 3\lambda = 7 \\ 5\lambda = 5 \rightarrow \lambda = 1 \end{cases}$$

El punto de corte de s y π es $(5, -1, 1)$.

Por tanto, la recta que buscamos es:

$$\begin{cases} x = 5 + 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-1}$$

15.- Estudia la posición de los siguientes planos según los valores de m :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ my + z = 0 \\ x + (1+m)y + mz = m+1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} x + y &= 1 \\ my + x &= 0 \\ x + (1+m)y + mx &= m+1 \end{aligned} \right\} M' = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & 1+m & m \end{pmatrix}}_M \mid \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ m+1 \end{pmatrix} \right)$$

$$|M| = m^2 - m = 0 \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$$

• Si $m = 0$, queda:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ El 1º y el 3º son el mismo plano; el 2º los corta. Por tanto, se cortan en una recta.}$$

• Si $m = 1$, queda:

$$M' = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_M \mid \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \text{ y } |M| = 0 \rightarrow \text{ran}(M) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(M') = 3$$

Los planos se cortan dos a dos, pero no hay ningún punto común a los tres.

• Si $m \neq 0$ y $m \neq 1 \rightarrow \text{ran}(M) = \text{ran}(M') = 3$. Los planos se cortan en un punto.

16.- Halla la ecuación de la recta r que pasando por el punto $P(2, 0, -1)$ corta a las rectas:

$$s_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{1} \quad s_2: \begin{cases} x+y+4=0 \\ y-3z+3=0 \end{cases}$$

Escribimos las dos rectas en forma paramétrica:

$$s_1: \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \quad s_2: \begin{cases} x = -1 - 3\lambda \\ y = -3 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

La recta r está determinada por los siguientes planos:

$$\alpha: \text{ contiene a la recta } s_1 \text{ y al punto } P: \begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\beta: \text{ contiene a la recta } s_2 \text{ y al punto } P: \begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ -3 & 3 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Así, } r: \begin{cases} x - 2x - 4 = 0 \\ x + 3z + 1 = 0 \end{cases}$$