7 REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES LOGARÍTMICAS

1. Representa:

a) $y = \ln(x^2 + 4)$

- **Dominio:** $x^2 + 4 > 0$ para cualquier $x \Rightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- **Simetrías:** Es par, simétrica respecto eje Y
- **Asíntotas:**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \;;\; \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+4)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x}{x^2+4}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x^2+4} = 0$$

No tiene asíntotas.

- **Cortes con los ejes:** $x = 0 \Rightarrow y = \ln 4$
- **Crecimiento:**

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+4} = 0 \text{ si } x = 0$$

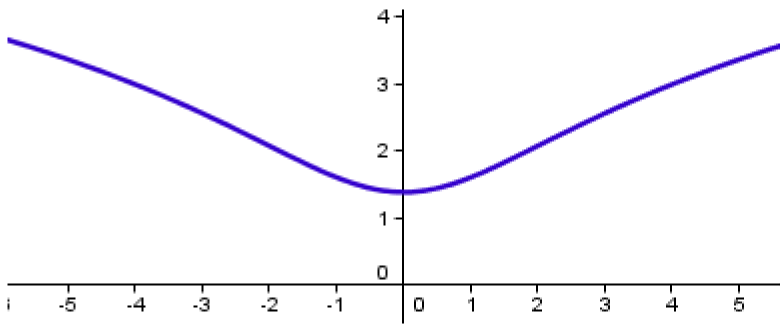
$f' < 0$	0	$f' > 0$
↘		↗

Mínimo: $(0, \ln 4)$

- **Curvatura:**

$$f''(x) = \frac{2(x^2+4) + 2x\cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{8 - 2x^2}{(x^2+4)^2} = 0 \text{ si } 8 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = 2,\ x = -2$$

$f'' < 0$	-2	$f'' > 0$	2	$f'' < 0$
$\cap$		$\cup$		$\cap$



b) $y = \ln(x^2 - 1)$

- **Dominio:** $x^2 - 1 > 0 \Rightarrow \text{Dom(f)} = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- **Simetrías:** Es par, simétrica respecto eje Y
- **Asíntotas:**

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \;;\; \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^2-1)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2x}{x^2-1}}{1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x^2-1} = 0$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \;;\; \lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$$

Asíntotas verticales: x = -1, x = 1.

- **Cortes con los ejes:**

- Eje X: $y = 0 \Rightarrow \ln(x^2 - 1) = 1 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

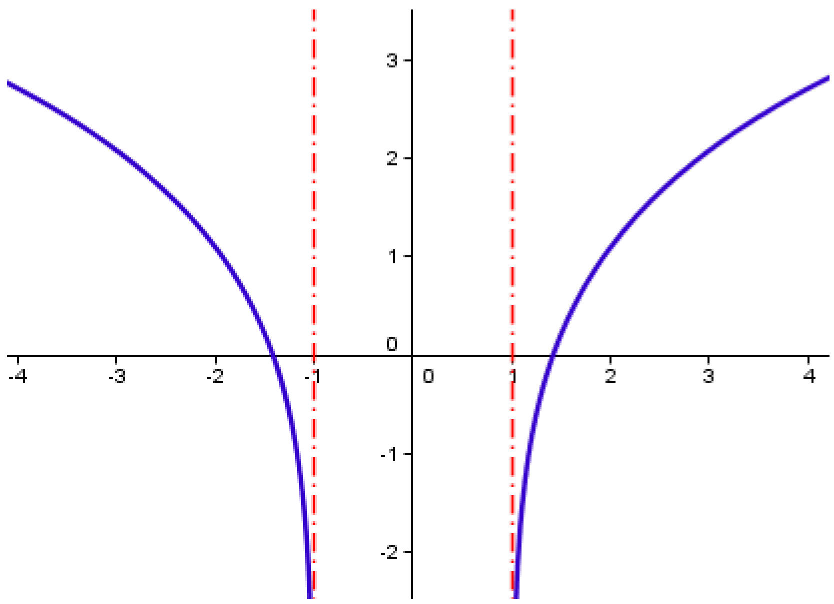
- **Crecimiento:**

$f'(x) = \dfrac{2x}{x^2-1} = 0$ si $x = 0$ (no válido)

$f'(x) < 0$ si $x < -1$; $f'(x) > 0$ $x > 1$

- **Curvatura:**

$$f''(x) = \frac{2(x^2-1) - 2x \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-2-2x^2}{(x^2+4)^2} > 0 \Rightarrow \text{f convexa}$$



c) $y = \frac{\ln x}{x}$

- **Dominio:** $Dom(f) = (0, +\infty)$
- **Asíntotas:**

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \underbrace{=}_{L'H} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ asíntota horizontal cuando } x \to +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \Rightarrow x = 0 \text{ A.V.}$$

- **Crecimiento:**

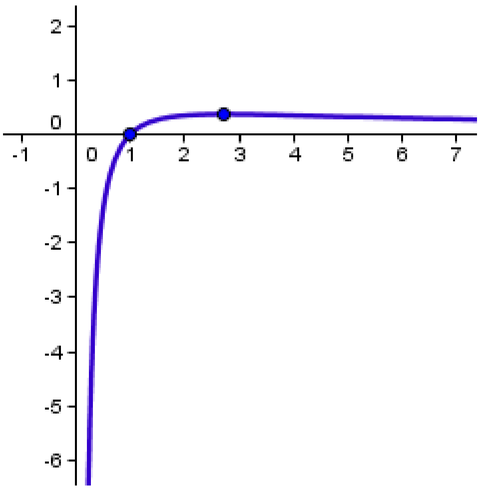
$$y' = \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$$

f´> 0 f´ < 0

e

$$x = e \Rightarrow y = \frac{1}{e} \Rightarrow \left(e, \frac{1}{e}\right) \text{ máximo}$$

Corte ejes: $x = 1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (1,0)$



d) $y = x \cdot \ln x$

- **Dominio:** $Dom(f) = (0, +\infty)$
- **Asíntotas:**

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underbrace{=}_{L'H} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ A.V.}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

- **Crecimiento:**

$$y' = \ln x + x\frac{1}{x} = 1 + \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1}$$

f´ < 0 f´ > 0

e^{-1}

$$x = e^{-1} \Rightarrow y = \frac{1}{e} \Rightarrow \left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right) \text{ mínimo}$$

Corte ejes: $x = 1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (1,0)$