014 Calcula el ángulo que forman la recta $r: (x, y, z) = (0, 0, 1) + \lambda(1, 0, -1)$ y el plano de ecuación $\pi: x + y - 3z + 2 = 0$.

015 Calcula el ángulo que forman las siguientes parejas de planos.

a) $\pi: 3x - 2y + z - 3 = 0$ $\pi': x - y - 25 = 0$

b) $\pi: x + y + z = 0$ $\pi': x + 2y + 3z - 2 = 0$

c) $\pi: 2y + 2z - 3 = 0$ $\pi': -y - z + 2 = 0$

017 Encuentra la proyección de los puntos $A(0, 0, 0)$, $B(-1, 1, 1)$ y $C(0, 2, 0)$ sobre la recta r .

a) $r: \frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{1}$ b) $r: \left. \begin{array}{l} x + 2z = 3 \\ y - z = 0 \end{array} \right\}$

019 Calcula la proyección ortogonal de la recta:

$$r: \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{-1}$$

sobre el plano:

$$\left. \begin{array}{l} x = \lambda - \mu \\ \pi: y = 2 - \lambda + 3\mu \\ z = 3 + 2\lambda - 2\mu \end{array} \right\}$$

021 Obtén el simétrico de $P(0, 0, 1)$ respecto de $Q(1, -2, 1)$.

022 Halla el simétrico del punto $P(-1, 2, 3)$ respecto de la recta $r: \frac{x-3}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{2}$.

024 Halla el simétrico del punto $P(0, 1, -3)$ respecto del plano cuya ecuación es:

$$\pi: x + y + z - 2 = 0$$

025 Si los puntos $P(2, 0, 2)$ y $P'(3, 1, -3)$ son simétricos, halla el punto, una recta y el plano respecto de los cuales dichos puntos son simétricos.
¿Son únicos?

026 Halla la distancia del punto $P(1, 1, -1)$ a la recta $r: \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-2}$.

031 Halla la distancia que hay entre los planos: $\pi: 2x - 2y + 3z = 0$
 $\pi': 4x - 4y + 6z = 12$

032 Calcula la distancia entre la recta $r: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}$ y el plano $\pi: x + 2y - 3z - 1 = 0$.

033 Calcula la distancia entre los siguientes pares de rectas.

a) $r: \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-1}$ $s: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{-1}$

b) $r: \frac{x+1}{-1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+1}{-1}$ $s: \begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 2y - 3z = 0 \end{cases}$

046 Escribe un vector de módulo 1 que sea ortogonal al vector de coordenadas (1, 2, 1).

(Extremadura. Junio 2007. Opción B. Ejercicio 4)

055 Dados los planos $\pi: mx + y + 2z - 7 = 0$ y $\pi': 3x + 4y + z + 1 = 0$, halla m para que los planos:

- a) Sean paralelos.
- b) Sean perpendiculares.

056 Sea $r: (x, y, z) = (0, 3, 3) + t(0, 1, 1)$. Demuestra que:

- a) r está contenida en el plano $\pi: 3x + 2y - 2z = 0$.
- b) r es paralela al plano $\pi': 3x + y - z - 5 = 0$.

057 Dada la recta $r: \begin{cases} -x + y + 4z + 7 = 0 \\ 6x - 2y + 2z + 8 = 0 \end{cases}$, halla la ecuación de un plano que la contenga y que sea perpendicular a $\pi: 4x + 2y - z - 7 = 0$.

062 Se consideran los puntos $A(3, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ y $C(0, 0, 1)$.

- a) Halla la ecuación general del plano π que los contiene.
- b) Halla la ecuación de la recta perpendicular a π y que pasa por el origen de coordenadas. Halla también el punto de intersección de la recta con el plano.

(Balears. Junio 2005. Opción A. Cuestión 2)

063 Encuentra la ecuación continua de la recta que corta perpendicularmente a las rectas:

$$r_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{0} \quad r_2: (x, y, z) = (0, 0, 1) + t(1, 1, 1)$$

(Navarra. Septiembre 2004. Grupo 1. Opción B)

065 Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $A(1, 0, -1)$, es perpendicular al plano $x - y + 2z + 1 = 0$ y es paralelo a la recta $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

(Andalucía. Junio 2001. Opción A. Ejercicio 4)

066 Considera $A(1, 1, 1)$, $B(2, 0, -1)$, $C(5, 2, 1)$ y $D(4, 3, 3)$.

- a) Justifica que los puntos son los vértices consecutivos de un paralelogramo.
- b) Razona si dicho paralelogramo es un rectángulo.
- c) Determina la ecuación general del plano que contiene a los cuatro puntos.

(Cantabria. Junio 2007. Bloque 3. Opción B)

070 Sean las rectas:

$$r: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-4} \quad s: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{1}$$

- Hallar la ecuación de la recta t que pasa por el origen y corta a las dos rectas anteriores.
- Hallar la perpendicular común a las rectas r y s .

(Madrid. Junio 2006. Opción A. Ejercicio 4)

071 Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(2, -1, 1)$ y corta perpendicularmente la recta:

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2}$$

(Balears. Septiembre 2007. Opción A. Cuestión 2)

094 Dadas las rectas:

$$r: \left. \begin{array}{l} x - y + 2 = 0 \\ z = -1 \end{array} \right\} \quad s: \left. \begin{array}{l} x = 2 \\ y - z - 5 = 0 \end{array} \right\}$$

- Determina su posición relativa.
- En caso de cortarse, determina el ángulo que forman y el punto de corte.

(Canarias. Junio 2008. Bloque 4. Opción A)

095 Calcula el ángulo que forma el plano $x + y + z = 0$ con la recta de ecuaciones $\left. \begin{array}{l} x + y = 1 \\ y + z = 1 \end{array} \right\}$.

(Extremadura. Septiembre 2006. Repertorio A. Ejercicio 2)

100 Dados la recta $r: \left. \begin{array}{l} x = -1 \\ y - z - 1 = 0 \end{array} \right\}$ y el plano $\pi: x + y - 2 = 0$:

- Determina su posición relativa.
- En caso de cortarse, determina el ángulo que forman y el punto de corte.

(Canarias. Junio 2007. Opción A. Cuestión 4)

107 Considera el punto $P(2, 0, 1)$ y la recta:

$$r: \left. \begin{array}{l} x + 2y = 6 \\ z = 2 \end{array} \right\}$$

- Halla la ecuación del plano que contiene a P y a r .
- Calcula el punto simétrico de P respecto de la recta r .

(Andalucía. Junio 2005. Opción A. Ejercicio 4)

108 Para cada valor de a los puntos $P(1, 2, 3)$ y $A(0, 1, a)$ son simétricos respecto a un plano.

Halla, de forma razonada, la ecuación de dicho plano. En particular encuentra el plano para $a = 2$.

(País Vasco. Junio 2005. Bloque B. Cuestión B)

(tema 6 del solucionario santillana – a partir de pág 331)

001 Calcula $\vec{u} \times \vec{v}$, sabiendo que $\vec{u} = (-1, 1, 0)$, $\vec{v} = (-1, 0, 1)$ y el ángulo que forman es $\alpha = 60^\circ$.

002 Si $\vec{u} = (-1, 1, 0)$, $\vec{v} = (-1, 0, 1)$ y su ángulo es $\alpha = 60^\circ$, halla el área del paralelogramo que forman.

005 Encuentra el vector normal al plano que pasa por:

a) $A(1, 1, 1)$ $B(3, 1, 0)$ $C(-1, 0, 1)$

b) $D(0, 0, 0)$ $E(2, 2, 2)$ $F(0, 1, -2)$

009 Dada la recta:

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

Halla su ecuación implícita, y comprueba que el producto vectorial de los vectores normales de los planos es proporcional a $\vec{v} = (1, -1, 2)$.

010 Halla el área encerrada en los triángulos cuyos vértices son:

a) $A(0, 0, 0)$ $B(-1, 2, 1)$ $C(-1, -1, -1)$

b) $A(3, 0, 0)$ $B(0, 2, 0)$ $C(0, 0, 1)$

012 Halla la distancia del punto $P(1, 0, 2)$ a las rectas.

a) $r: \begin{cases} x - y = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases}$ b) $s: \frac{x}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-5}{2}$

013 Calcula la distancia del origen de coordenadas a las siguientes rectas.

a) $r: \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 0 \end{cases}$ b) $s: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+4}{2}$

015 Calcula el volumen del paralelepípedo definido por los vectores $\vec{u} = (-2, 0, 0)$, $\vec{v} = (3, 2, 1)$ y $\vec{w} = (-2, 0, 4)$.

016 Calcula el producto mixto de los siguientes vectores:

$$\vec{u} = (3, 8, 0) \quad \vec{v} = (0, -1, 3) \quad \vec{w} = (-5, 4, 0)$$

019 Obtén el volumen del tetraedro cuyos vértices tienen las siguientes coordenadas:

$$A(0, 0, 0) \quad B(0, 0, 1) \quad C(0, 2, 0) \quad D(3, 0, 0)$$

020 Determina la distancia entre las siguientes rectas que se cruzan:

$$r: \left. \begin{array}{l} y = 1 \\ x + z = -2 \end{array} \right\} \quad s: \frac{x+1}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-4}{-2}$$

053 Determina la ecuación de una recta perpendicular a r y s que pase por el punto $P(3, -2, 0)$, siendo:

$$r: x = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+2}{3} \quad s: \left. \begin{array}{l} x = 2 \\ y = -3 + \lambda \\ z = 5 - 2\lambda \end{array} \right\}$$

056 Halla la distancia del punto $P(-2, 2, -9)$ a la recta:

$$r: \left. \begin{array}{l} x + 3y = 1 \\ x + 6y + 2z = 1 \end{array} \right\}$$

Encuentra también el punto de r que se encuentra a esa distancia de P . Comprueba que las dos distancias coinciden.

059 Halla la distancia entre las rectas:

$$r: x - 5 = y - 2 = 2 - z \quad s: \left. \begin{array}{l} x = -1 \\ y = 4 + \lambda \\ z = 4 + \lambda \end{array} \right\}$$

063 Encuentra la ecuación del plano que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s .

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-3}{-1} \quad s: \left. \begin{array}{l} 2x + y - z + 8 = 0 \\ 5x - 2y - 2z - 6 = 0 \end{array} \right\}$$

064 Determina la ecuación de una recta que pasa por el punto $(-1, 4, 2)$ y es paralela a la recta intersección de los planos:

$$\pi: 2x + 3y - z + 2 = 0 \quad \pi': x - 2y + 2z + 5 = 0$$

066 Una recta pasa por el punto $(1, -1, 0)$ y es paralela a los planos $x + y = 1, x + z = 1$. Halla sus ecuaciones.

(La Rioja. Junio 2004. Propuesta A. Ejercicio 1)

081 a) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el origen y es perpendicular al plano $\pi: x + y + z = 3$. Obtén el punto de corte de la recta con el plano π .

b) Halla el punto de la recta $r: \left. \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{array} \right\}$ cuya distancia al punto $P(1, 0, 2)$ sea $\sqrt{5}$.

(Aragón. Junio 2008. Bloque 2. Opción B)

086 Las trayectorias de dos aviones vienen dadas por las rectas:

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ r_1: y = 1 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ r_2: y = \lambda \\ z = 2 \end{array} \right\}$$

- Estudie si las trayectorias se cortan, se cruzan o son coincidentes.
- Calcule la distancia mínima entre ambas trayectorias.

(Murcia. Junio 2006. Bloque 2. Cuestión A)

089 Dados el punto $Q(3, -1, 4)$ y la recta r de ecuaciones paramétricas:

$$\left. \begin{array}{l} x = -2 + 3\lambda \\ r: y = -2\lambda \\ z = 1 + 4\lambda \end{array} \right\}$$

se pide:

- Hallar la distancia del punto Q a la recta r .
- Justificar que la recta s que pasa por Q y tiene a $(1, -1, 1)$ como vector direccional no corta a r .
- Calcular la distancia entre las rectas r y s .

(C. Valenciana. Junio 2007. Bloque 2. Problema 2)

090 Se considera la recta $r: \left. \begin{array}{l} x + 2y = 7 \\ y + 2z = 4 \end{array} \right\}$ y el punto $P(1, 2, 3)$.

- Calcula las ecuaciones paramétricas del plano π que es perpendicular a la recta r y contiene al punto P .
- Considera la recta:

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 \\ s: y = 2 + \alpha \\ z = 3 + 2\alpha \end{array} \right\}$$

¿Cuál es la posición relativa entre la recta s y el plano π ?

- Calcula cuáles son las coordenadas del punto Q de la recta s que está más próximo a la recta r . Justifica tu respuesta.

(Cantabria. Junio 2004. Bloque 3. Opción B)

091 Halla la distancia del punto $P(2, 1, 1)$ a la recta:

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{1}{3} \\ r: y = \frac{2}{3} + \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right\}$$

(Castilla y León. Junio 2003. Prueba A. Cuestión 2)

093 Calcula la distancia entre las rectas de ecuaciones:

$$r: x = \frac{y-1}{3} = \frac{z-4}{7} \quad s: x-2 = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$$

(Galicia. Junio 2005. Bloque 2. Pregunta 1)

- 095 Dados los vectores $\vec{u} = (1, 2, 0)$ y $\vec{v} = (0, 1, 2)$, calcula:
- El producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
 - Un vector unitario ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
 - El área del paralelogramo que tiene por lados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
- (La Rioja. Septiembre 2001. Propuesta A. Ejercicio 2)

- 107 Dadas las rectas $r_1: \begin{cases} x + 2y = 2 \\ x = -2z \end{cases}$ y $r_2: \begin{cases} x = -y \\ y = z + 1 \end{cases}$, se pide:
- Determinar las coordenadas del punto P en que se cortan y las ecuaciones del plano que las contiene.
 - Calcular la ecuación de la recta s que pasa por el punto $Q(2, 0, 1)$ y corta perpendicularmente a r_1 .
 - Obtener las coordenadas del punto R , intersección de r_1 y s , y el área del triángulo de vértices P, Q y R .
- (Cantabria. Junio 2002. Bloque 3. Opción A)

- 110 Se dan los puntos $A(2, 1, 1)$ y $B(1, 0, -1)$, y la recta:

$$r: x - 5 = y = \frac{z + 2}{-2}$$

Se pide que calcules razonadamente:

- El punto C de r que equidista de A y B .
- El área del triángulo ABC .

(C. Valenciana. Junio 2008. Bloque 2. Problema 1)

- 111 De los planos paralelos al plano $x + y + z = 8$ encontrar el que determina con los ejes coordenados un triángulo de área $8\sqrt{3}$.
- (Balears. Septiembre 2001. Opción A. Cuestión 2)

- 112 Dados el plano $\pi: 3x + 2y - z + 10 = 0$ y el punto $P(1, 2, 3)$, se pide:
- Halla la ecuación de la recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto P .
 - Halla el punto Q intersección de π y r .
 - Halla el punto R intersección de π con el eje Y .
 - Halla el área del triángulo PQR .
- (Madrid. Junio 2008. Opción B. Ejercicio 4)

- 127 Considera los puntos $A(2, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(2, 2, 1)$ y $D(1, 1, 2)$, y calcula:
- El volumen del tetraedro que determinan.
 - La ecuación cartesiana o implícita del plano que contiene al punto D y es paralelo al que contiene a los puntos A, B y C .
- (Castilla-La Mancha. Junio 2004. Bloque 4. Pregunta B)

- 129 Encuentra los puntos de la recta:

$$\frac{x + 1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z - 2}{2}$$

que equidistan de los planos: $x + y - z + 1 = 0$ y $x - y + z + 2 = 0$.

(Balears. Septiembre 2002. Opción B. Cuestión 4)