Autoras: Gloria Jarne, Esperanza Minguillón, Trinidad Zabal

EJERCICIOS RESUELTOS DE DERIVADAS DE UNA FUNCIÓN REAL

1. Estudiar la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones y escribir su función derivada:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{(x-1)^2} & \text{si } \; x < 0 \\ 7x + 2 & \text{si } \; 0 \le x < 1 \\ 3\sqrt{7x^2 + 2} & \text{si } \; x \ge 1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \sqrt{x+3}$ **c)** $f(x) = x^2 - 2x\left|x - 3\right|$

Solución

a) La función $f(x)$ está definida a trozos por lo que hay que estudiarla teniendo en cuenta los siguientes casos:

- Si $x < 0$, $f(x) = \dfrac{2}{(x-1)^2}$ es continua y derivable, por ser un cociente de polinomios con denominador no nulo, y su derivada es $f'(x) = \dfrac{-4}{(x-1)^3}$.
- Si $0 < x < 1$, $f(x) = 7x + 2$ es continua y derivable, por ser un polinomio, y $f'(x) = 7$.
- Si $x > 1$, $f(x) = 3\sqrt{7x^2 + 2}$ es continua, por ser una función irracional con radicando no negativo, y derivable cuya derivada es $f'(x) = \dfrac{3.14x}{2\sqrt{7x^2+2}} = \dfrac{21x}{\sqrt{7x^2+2}}$.
- Si $x = 0$, para estudiar la continuidad se hallan los límites laterales:

  $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (7x + 2) = 2$ y $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{2}{(x-1)^2} = 2$. Como ambos límites coinciden con $f(0) = 2$, f es continua en 0.

  Para estudiar si es derivable hallamos las derivadas laterales:

  $$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{7x + 2 - 2}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{7x}{x} = 7$$

  $$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{2}{(x-1)^2} - 2}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{2 - 2(x^2 - 2x + 1)}{(x-1)^2 x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-2x^2 + 4x}{(x-1)^2 x} =$$

  $$= \lim_{x \to 0^-} \frac{-2x + 4}{(x-1)^2} = 4$$

  Como no coinciden la función no es derivable en $x = 0$.
- Si $x = 1$, para estudiar la continuidad se hallan los límites laterales:

  $$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 3\sqrt{7x^2 + 2} = 9 \text{ y } \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (7x + 2) = 9.$$

Como su valor coincide con $f(1)=9$, se deduce que f es continua en $x = 1$.

Para estudiar si es derivable hallamos las derivadas laterales:

$$f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{3\sqrt{7x^2+2}-9}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\left(3\sqrt{7x^2+2}-9\right)\left(3\sqrt{7x^2+2}+9\right)}{(x-1)(3\sqrt{7x^2+2}+9)} =$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{9(7x^2+2)-81}{(x-1)(3\sqrt{7x^2+2}+9)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{63x^2-63}{(x-1)(3\sqrt{7x^2+2}+9)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{63(x-1)(x+1)}{(x-1)(3\sqrt{7x^2+2}+9)} =$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{63(x+1)}{3\sqrt{7x^2+2}+9} = \frac{63.2}{18} = 7$$

$$f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{7x+2-9}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{7(x-1)}{(x-1)} = 7$$

Como las derivadas laterales coinciden, la función es derivable en $x = 1$ y $f'(1) = 7$.

La función derivada es $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-4}{(x-1)^3} & \text{si} \quad x < 0 \\ 7 & \text{si} \quad 0 < x \le 1 \\ \dfrac{21x}{\sqrt{7x^2+2}} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

b) Como $f(x) = \sqrt{x+3}$ está dada por una raíz cuadrada, es continua en su dominio $D = [-3, +\infty)$.

La derivada de f es $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}$, que existe en $(-3, +\infty)$.

c) Teniendo en cuenta la definición de valor absoluto, la función $f(x) = x^2 - 2x|x-3|$ se escribe de la forma $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x(x-3) & \text{si} \quad x < 3 \\ x^2 - 2x(x-3) & \text{si} \quad x \ge 3 \end{cases} = \begin{cases} 3x^2 - 6x & \text{si} \quad x < 3 \\ -x^2 + 6x & \text{si} \quad x \ge 3 \end{cases}$.

Para estudiar la continuidad y derivabilidad de f se consideran los siguientes casos:

- Si $x < 3$, $f(x) = 3x^2 - 6x$ es continua y derivable por ser un polinomio, y $f'(x) = 6x - 6$.
- Si $x > 3$, $f(x) = -x^2 + 6x$ es continua y derivable por ser un polinomio, y $f'(x) = -2x + 6$.
- Si $x = 3$, para estudiar la continuidad se hallan los límites laterales:

  $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \left(-x^2+6x\right) = 9$ y $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \left(3x^2-6x\right) = 9$. Como ambos límites coinciden con $f(3)=9$, f es continua en 3.

  Para estudiar si es derivable hallamos las derivadas laterales:

  $$f'(3^+) = \lim_{x\to 3^+} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} \frac{-x^2+6x-9}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} \frac{-(x-3)^2}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} -(x-3) = 0$$

$$f'(3^-) = \lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^-}\frac{3x^2-6x-9}{x-3} = \lim_{x\to 3^-}\frac{3(x-3)(x+1)}{x-3} = \lim_{x\to 3} 3(x+1) = 12$$

Como no coinciden la función no es derivable en $x = 3$.

La función derivada es $f'(x) = \begin{cases} 6x-6 & \text{si } x<3 \\ -2x+6 & \text{si } x>3 \end{cases}$

2. Hallar a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} ax+b & \text{si } x<1 \\ \dfrac{1}{x^2+1} & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$ sea continua y derivable en $x = 1$.

Solución

Para que f sea continua en $x = 1$ se tiene que cumplir $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$ y efectuando los cálculos se obtiene: $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{2}$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(ax+b) = a+b$ y $f(1) = \frac{1}{2}$

Igualando queda $a+b=\frac{1}{2}$, es decir, $b=\frac{1}{2}-a$.

Para que f sea derivable en $x = 1$ se tiene que cumplir $f'(1^+) = f'(1^-)$ y realizando los cálculos:

$$f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{2}}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{2-x^2-1}{2(x^2+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1^+}\frac{1-x^2}{2(x^2+1)(x-1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{-(x+1)(x-1)}{2(x^2+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1^+}\frac{-(x+1)}{2(x^2+1)} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{ax+b-\frac{1}{2}}{x-1} \underset{b=\frac{1}{2}-a}{=} \lim_{x\to 1^-}\frac{ax+\frac{1}{2}-a-\frac{1}{2}}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{a(x-1)}{(x-1)} = a$$

Igualando queda $a=-\frac{1}{2}$ y sustituyendo se tiene $b=\frac{1}{2}-a=\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=1$

3. Calcular la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x^3+\frac{1}{x^5}+\sqrt[5]{x^2}$ **b)** $f(x)=\frac{2x-1}{2x+1}$ **c)** $f(x)=x\sqrt{x^2+2}$

d) $f(x)=xe^{3x^2+1}$ **e)** $f(x)=\ln\frac{2x+5}{2x-5}$ **f)** $f(x)=\sqrt[8]{x^3+sen2x}$

Solución

Para obtener las funciones derivadas usaremos la regla de la cadena y las reglas de derivación de las funciones elementales.

a) Para derivar de forma más sencilla, la función se escribe $f(x) = 2x^3 + \dfrac{1}{x^5} + \sqrt[5]{x^2} = 2x^3 + x^{-5} + x^{\frac{2}{5}}$ y derivando queda $f'(x) = 2.3x^{3-1} + (-5)x^{-5-1} + \dfrac{2}{5}x^{\frac{2}{5}-1} = 6x^2 - 5x^{-6} + \dfrac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}} = 6x^2 - 5\dfrac{1}{x^6} + \dfrac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$

b) Para obtener la función derivada de $f(x) = \dfrac{2x-1}{2x+1}$ se aplica la regla de la derivada del cociente quedando: $f'(x) = \dfrac{2(2x+1) - 2(2x-1)}{(2x+1)^2} = \dfrac{4x+2-4x+2}{(2x+1)^2} = \dfrac{4}{(2x+1)^2}$

c) Para derivar $f(x) = x\sqrt{x^2+2}$, la función se escribe $f(x) = x\left(x^2+2\right)^{\frac{1}{2}}$ y utilizando la regla de la derivada del producto queda:

$$f'(x) = \sqrt{x^2+2} + x\frac{1}{2}\left(x^2+2\right)^{-\frac{1}{2}}2x = \sqrt{x^2+2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} = \frac{x^2+2+x^2}{\sqrt{x^2+2}} = \frac{2x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}$$

d) Para calcular la función derivada de $f(x) = xe^{3x^2+1}$ hay que tener en cuenta la regla de la derivada del producto y la derivada de la función exponencial quedando:

$$f'(x) = e^{3x^2+1} + xe^{3x^2+1}6x = e^{3x^2+1} + 6x^2e^{3x^2+1} = e^{3x^2+1}(1+6x^2)$$

e) La función $f(x) = \ln\dfrac{2x+5}{2x-5}$ es composición de un logarítmo y una función racional, por tanto su derivada se puede calcular aplicando la regla de la cadena y operando queda:

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{2x+5}{2x-5}}\frac{2(2x-5)-2(2x+5)}{(2x-5)^2} = \frac{-20}{(2x+5)(2x-5)} = \frac{-20}{4x^2-25}$$

f) Para derivar esta función más fácilmente se escribe $f(x) = \sqrt[8]{x^3 + sen2x} = \left(x^3 + \text{sen}2x\right)^{\frac{1}{8}}$ y derivando queda:

$$f'(x) = \frac{1}{8}\left(x^3 + \text{sen}2x\right)^{\frac{1}{8}-1}\left(3x^2 + 2\cos 2x\right) = \frac{1}{8}\left(x^3 + \text{sen}2x\right)^{\frac{-7}{8}}\left(3x^2 + 2\cos 2x\right) = \frac{\left(3x^2 + 2\cos 2x\right)}{8\left(x^3 + \text{sen}2x\right)^{\frac{7}{8}}} =$$

$$= \frac{\left(3x^2 + 2\cos 2x\right)}{8\sqrt[8]{\left(x^3 + \text{sen}2x\right)^7}}$$

4. Calcular las derivadas de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x) = \sqrt{x+2}$ en $x = 7$ y en $x = -5$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ en $x = -1$ y en $x = 0$

c) $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ 2x^3 + 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ en $x = 1$ y en $x = 0$

d) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ en $x = 1$

Solución

a) En $x = 7$ la función $f(x) = \sqrt{x+2}$ es continua y derivable. Calculando la función derivada de f queda $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$, y sustituyendo en $x = 7$, $f'(7) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}$.

En $x = -5$ no tiene sentido hablar de derivada ya que en dicho punto no está definida la función.

b) La función derivada de $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$ es $f'(x) = (-2)x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$ y su valor en $x = -1$, $f'(-1) = \frac{-2}{(-1)^3} = 2$.

En $x = 0$, la función no es derivable ya que no es un punto del domino de f.

c) Se puede comprobar que la función $f(x) = \begin{cases} 3x^2+1 & \text{si } x<1 \\ 2x^3+2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ es continua en $x = 1$ y como su definición cambia antes y después de él, para calcular la derivada en este punto hay que hallar las derivadas laterales:

$$f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x^3+2-4}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x^3-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2(x^3-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1^+} 2(x^2+x+1) = 6$$

$$f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{3x^2+1-4}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{3x^2-3}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{3(x^2-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{3(x-1)(x+1)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1^-} 3(x+1) = 6$$

Al coincidir las dos derivadas laterales, $f'(1^+) = f'(1^-) = 6$, se concluye que f es derivable en $x = 1$ y $f'(1) = 6$.

Para calcular la derivada en $x = 0 < 1$, se considera la definición de la función dada por $f(x) = 3x^2 + 1$ que tiene por función derivada $f'(x) = 6x$, luego $f'(0) = 0$.

d) Observar que en este caso la función $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x<1 \\ x^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ no es continua en $x = 1$ ya que $\lim_{x\to 1^-} 2x \neq \lim_{x\to 1^+} x^2$, luego se puede afirmar sin necesidad de cálculo que no es derivable.

5. Calcular la ecuación de la recta tangente, si existe, a las curvas dadas por las funciones siguientes en los puntos indicados :

a) $f(x) = x^3 + 7x + 2$ en $x = 0$

b) $f(x) = \ln x^2$ en $x = 1$

c) $f(x) = \begin{cases} 5x+1 & \text{si } x<1 \\ x^2+3x+2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ en $x = 1$

Solución

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto dado por x_o es $y - f(x_o) = f'(x_o)(x - x_o)$.

a) Se calcula la derivada de la función $f(x) = x^3 + 7x + 2$ quedando $f'(x) = 3x^2 + 7$, cuyo valor en el punto $x = 0$ es $f'(0) = 7$. Teniendo en cuenta que $f(0) = 2$, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto (0, 2) es $y - 2 = 7(x - 0)$, es decir, y = 7x + 2.

b) Se calcula la derivada de la función $f(x) = \ln x^2$ quedando $f'(x) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$, cuyo valor en el punto $x = 1$ es $f'(1) = 2$. Teniendo en cuenta que $f(1) = \ln 1 = 0$, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto (1, 0) es $y - 0 = 2(x - 1)$, es decir, y = 2x - 2.

c) Se puede comprobar que la función $f(x) = \begin{cases} 5x + 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + 3x + 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ es continua en $x = 1$. Para calcular la derivada en dicho punto se hallan las derivadas laterales ya que la definición de f cambia antes y después de él, quedando:

$$f'(1^+) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 + 3x + 2 - 6}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x - 1)(x + 4)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} (x + 4) = 5$$

$$f'(1^-) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{5x + 1 - 6}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{5x - 5}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{5(x - 1)}{x - 1} = 5$$

Por tanto, la función es derivable en $x = 1$ y $f'(1) = 5$. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto (1, 6) es $y - 1 = 5(x - 6)$, es decir, y = 5x - 29.

6. Halla los siguientes límites utilizando la regla de L`Hôpital:

a) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{3x^2 - 2x}$ **b)** $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{\ln(e^x + 1)}$ **c)** $\lim_{x \to 0} \frac{2x - 3\text{sen}x + x\cos x}{x^5}$

d) $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{3x^3 - 3}$ **e)** $\lim_{x \to 0} \cos x^{1/\text{sen}^2 x}$ **f)** $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\text{sen}^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$

Solución

a) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{3x^2 - 2x} = \left[\frac{0}{0}\right] \underset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{6x - 2} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$

b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{\ln(e^x + 1)} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] \underset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{\frac{e^x}{e^x + 1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{e^x + 1}} = \lim_{x \to +\infty} \left(e^x + 1\right) = +\infty$

c) $\lim_{x \to 0} \frac{2x - 3\text{sen}x + x\cos x}{x^5} = \left[\frac{0}{0}\right] \underset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{2 - 3\cos x + \cos x - x\text{sen}x}{5x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{2 - 2\cos x - x\text{sen}x}{5x^4} =$

$$=\left[\frac{0}{0}\right]\underset{\text{(L'Hôpital)}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2\text{sen}x-\text{sen}x-x\cos x}{20x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}x-x\cos x}{20x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]\underset{\text{(L'Hôpital)}}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos x+x\text{sen}x}{60x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\text{sen}x}{60x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]\underset{\text{(L'Hôpital)}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}x+x\cos x}{120x}=\left[\frac{0}{0}\right]\underset{\text{(L'Hôpital)}}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+\cos x-x\text{sen}x}{120}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x+x\text{sen}x}{120}=\frac{2}{120}=\frac{1}{60}$$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{3x^3-3}=\left[\frac{0}{0}\right]\underset{\text{(L'Hôpital)}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{9x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{9x^3}=\frac{1}{9}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\cos x^{1/\text{sen}^2x}=\left[1^{+\infty}\right]=e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{\text{sen}^2x}(\cos x-1)}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\text{sen}^2x}}=e^{\left[\frac{0}{0}\right]}\underset{\text{(L'Hôpital)}}{=}e^{\lim_{x\to 0}\frac{-\text{sen}x}{2\text{sen}x\cos x}}=$

$$=e^{\lim_{x\to 0}\frac{-1}{2\cos x}}=e^{\frac{-1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\text{sen}^2x}-\frac{1}{x^2}\right)=\left[+\infty-\infty\right]=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-\text{sen}^2x}{x^2\text{sen}^2x}\right)=\left[\frac{0}{0}\right]$, en este caso si aplicamos directamente la regla de L'Hôpital el proceso no se acaba. Por ello vamos a sustituir la equivalencia "$\text{sen}x\sim x$ si $x\to 0$" cuando $\text{sen}x$ aparezca como factor, es decir, en el denominador, quedando

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-\text{sen}^2x}{x^2x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-\text{sen}^2x}{x^4}\right)=\left[\frac{0}{0}\right]$ y ahora se resuelve por la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-\text{sen}^2x}{x^4}\right)=\left[\frac{0}{0}\right]\underset{\text{(L'Hôpital)}}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x-2\text{sen}x\cos x}{4x^3}\right)\underset{\text{sen}2x=2\text{sen}x\cos x}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x-\text{sen}2x}{4x^3}\right)=$$

$$=\left[\frac{0}{0}\right]\underset{\text{(L'Hôpital)}}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{2-2\cos 2x}{12x^2}\right)==\left[\frac{0}{0}\right]\underset{\text{(L'Hôpital)}}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{4\text{sen}2x}{24x}\right)=\left[\frac{0}{0}\right]\underset{\text{(L'Hôpital)}}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{8\cos 2x}{24}\right)=$$

$$=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$$