

EJERCICIOS. LÍMITES DE FUNCIONES.

1. Calcula los límites laterales y el límite, cuando exista, de las siguientes funciones en los puntos que se indica:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 5, & \text{si } x < 3 \\ 7, & \text{si } x = 3 \\ 3x - 1, & \text{si } x > 3 \end{cases} \quad \text{en } x=3$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x-1}, & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{en } x=1$$

2. Dada la función $f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{si } x \leq 0 \\ x+1, & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ x^2, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$. Calcula los límites laterales y el límite, si existen, en $x=0$ y en $x=2$.

3. Halla los límites cuando x tiende a 1 y a -1 de la función $f(x) = |x^2 - 1|$.

4. Dada la función $f(x) = |x-2| + x$:

- a) Escribe esta función como una función definida a trozos.
b) Halla los límites laterales y el límite, si existen, de la función cuando $x \rightarrow 2$.
c) Representa gráficamente la función.

5. Estudia las asíntotas de las funciones:

$$\text{a) } f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x-2}$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2}$$

6. Calcula los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x-3}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^3 - 3x^2 - 5}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x+1}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 5x + 6)$$

7. Halla los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x - 1}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + x}{x}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x + \sqrt{3x-2}}{2x}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x^2 - 4})$$

8. Determina los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 3x + 2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1-x}}$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3}$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{2x - 4}$

9. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2}{x-1} - \frac{x^2}{x+1} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x} - x)$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x+1} \cdot \sqrt{x^2 + 1} \right)$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 2x}{x^2 - 3x}$

10. Halla los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{x} \right)^{6x+2}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x+3} \right)^{3x+1}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2} \right)^{x-1}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{1}{2x}}$

SOLUCIONES:

- a) El límite lateral a la izquierda en $x=3$ es 8, que coincide con el límite lateral a la derecha. Por tanto, podemos decir que existe el límite cuando x tiende a 3 y vale 8.

b) El límite lateral a la izquierda en $x=1$ es 4, mientras que el límite lateral a la derecha es ∞ . Por lo tanto, decimos que no existe el límite cuando x tiende a 1.
- El límite lateral a la izquierda cuando x tiende a 0 es 1, que coincide con el límite lateral a la derecha. Por tanto, podemos decir que existe el límite cuando x tiende a 0 y vale 1.

El límite lateral a la izquierda cuando x tiende a 2 es 3, mientras que el límite lateral a la derecha es 4. Por tanto, no existe el límite cuando x tiende a 2.
- Escribimos primero la función como una función definida a trozos:

$$f(x) = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{si } x \leq -1 \\ -x^2 + 1, & \text{si } -1 < x < 1 \\ x^2 - 1, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

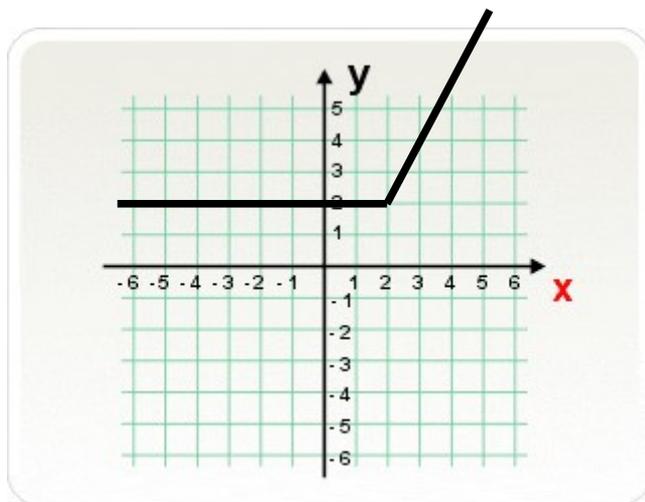
Tanto el límite lateral a la izquierda como el límite lateral a la derecha en $x=1$ y en $x=-1$ coinciden y valen 0, y por tanto podemos decir que los límites en $x=1$ y en $x=-1$ existen y valen 0.

- a) $f(x) = |x-2| + x = \begin{cases} -x+2+x, & \text{si } x < 2 \\ x-2+x, & \text{si } x \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} 2, & \text{si } x < 2 \\ 2x-2, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

b) El límite lateral a la izquierda en $x=2$ coincide con el límite lateral a la derecha y valen 2.

Por tanto, podemos decir que existe el límite cuando x tiende a 2 y su valor es 2.

c)



5. a) $f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x - 2}$

La recta $x=2$ es una asíntota vertical.
 La función no tiene asíntota horizontal.
 La recta $y=3x+6$ es asíntota oblicua.

b) $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2}$

La recta $x=0$ es asíntota vertical.
 La recta $y=1$ es asíntota horizontal.
 La función no tiene asíntota oblicua.

6. a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x - 3} = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^3 - 3x^2 - 5} = 0$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x + 1} = 0$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 5x + 6) = +\infty$

7. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x - 1}{\sqrt{x^2 + 3}} = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + x}{x} = 1$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x + \sqrt{3x - 2}}{2x} = \frac{7}{2}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x^2 - 4}) = 0$

8. a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 3x + 2} = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1 - x}} = 2$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{2x - 4} = 6$

9. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2}{x - 1} - \frac{x^2}{x + 1} \right) = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x} - x) = -1$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x+1} \cdot \sqrt{x^2+1} \right) = 2$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2+2x}{x^2-3x} = \frac{-2}{3}$$

$$10. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{x} \right)^{6x+2} = e^{-18} = \frac{1}{e^{18}}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x+3} \right)^{3x+1} = e^{-9} = \frac{1}{e^9}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2} \right)^{x-1} = 1$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1} \right)^{\frac{1}{2x}} = 1$$