EJERCICIOS: REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES. MATEMÁTICAS II.

Estudia y representa la gráfica de las funciones:

$$f(x)=x^3-4x$$

$$f(x)=x^3-6x^2+9x+5$$

$$f(x)=\frac{x^2}{1-x^2}$$

$$f(x)=\frac{2x^2}{x-2}$$

$$f(x)=\frac{2x}{x^2+2}$$

$$f(x)=\frac{x^3}{1-x^2}$$

$$f(x)=\sqrt{x^2-4}$$

$$f(x)=\sqrt{x^2+4}$$

$$f(x)=\ln\left(x^2+1\right)$$

$$f(x)=x\cdot e^{-x}$$

$$\boxed{f(x) = x^3 - 4x}$$

- Dominio : $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

- Simetrías : $f(-x) = (-x)^3 - 4(-x) = -x^3 + 4x = -f(x)$.

  La función es impar o simétrica respecto del origen.

- Puntos de corte con los ejes :

  - Eje X : $f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \end{cases}$

    Los puntos de corte con el eje X son : $(0,0)$, $(-2,0)$ y $(2,0)$

  - Eje Y : $f(0) = 0$. El punto de corte con el eje Y es : $(0,0)$

- Asíntotas : No tiene (es una función polinómica).

- Crecimiento y decrecimiento :

  $f'(x) = 3x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$

	$\left(-\infty, \frac{-2}{\sqrt{3}}\right)$	$\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$	$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$
Signo f'	+	−	+
	CRECIENTE	DECRECIENTE	CRECIENTE

- Extremos relativos :

  $f''(x) = 6x$

  $f''\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) < 0 \Rightarrow$ El punto $\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{16}{3\sqrt{3}}\right)$ es un máximo relativo

  $f''\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) > 0 \Rightarrow$ El punto $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{16}{3\sqrt{3}}\right)$ es un mínimo relativo.

- Concavidad y convexidad :

  $f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$

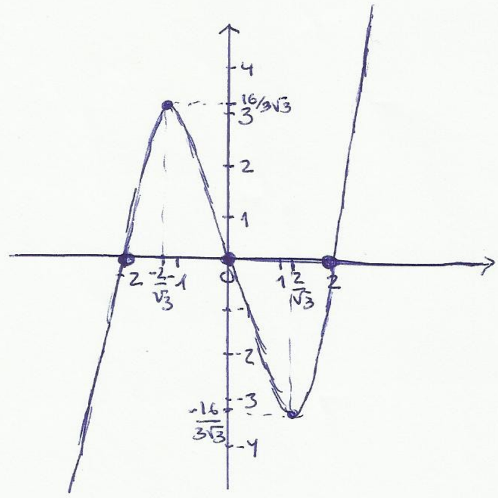
	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
Signo f''	−	+
	CONVEXA	CÓNCAVA

El punto $(0,0)$ es un punto de inflexión.

- Signo de la función :

	-2		0		2	
−		+		−		+

• Representación gráfica:



$$\boxed{f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5}$$

- Dominio : Dom $f = \mathbb{R}$
- Simetrías: $f(-x) = (-x)^3 - 6(-x)^2 + 9(-x) + 5 = -x^3 - 6x^2 - 9x + 5$

  La función no es par ni impar

- Puntos de corte:

  - Eje X : $f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 9x + 5 = 0$

    (No tiene soluciones enteras)

    $\left.\begin{array}{l} f(-1) = -11 \\ f(0) = 5 \end{array}\right\}$ En el intervalo $[-1, 0]$ tiene un punto de corte (Teorema de Bolzano)

  - Eje Y: $f(0) = 5$. La función corta al eje Y en el punto $(0,5)$

- Asíntotas : No tiene (es una función polinómica)
- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, +\infty)$
signo f'	+	−	+
	CRECIENTE	DECRECIENTE	CRECIENTE

- Extremos relativos:

  $f''(x) = 6x - 12$

  $f''(3) > 0 \Rightarrow$ El punto $(3,5)$ es un mínimo relativo

  $f''(1) < 0 \Rightarrow$ El punto $(1,9)$ es un máximo relativo.

- Concavidad y convexidad:

  $f''(x) = 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$

	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
signo f''	−	+
	CONVEXA	CÓNCAVA

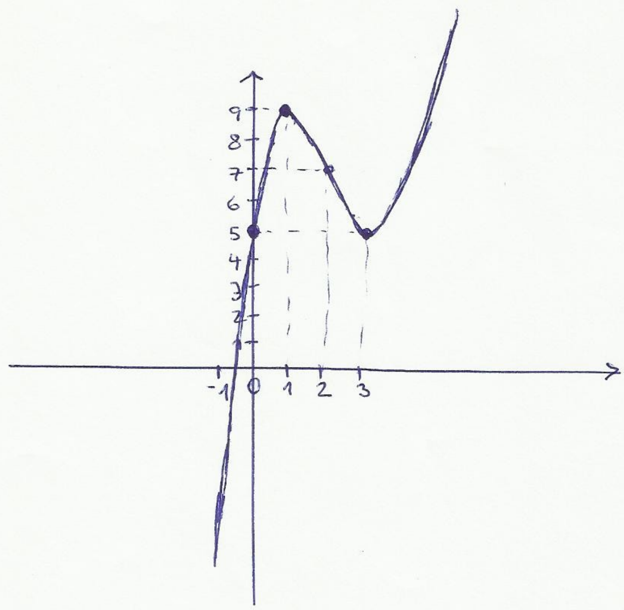
El punto $(2, 7)$ es un punto de inflexión

- Signo de la función:

  −   +

  −1   0

• Representación gráfica



$$\boxed{f(x) = \frac{x^2}{1-x^2}}$$

- Dominio: $1-x^2=0 \Rightarrow x = \pm 1$

  $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

- Simetrías: $f(-x) = \frac{(-x)^2}{1-(-x)^2} = \frac{x^2}{1-x^2} = f(x)$

  La función es par o simétrica respecto del eje Y.

- Puntos de corte con los ejes:

  - Eje X: $f(x)=0 \Rightarrow \frac{x^2}{1-x^2} = 0 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0$

    La función corta al eje X en el punto $(0,0)$

  - Eje Y: $f(0)=0$. La función corta al eje Y en el punto $(0,0)$.

- Asíntotas:

  - Verticales: $\lim_{x\to -1} \frac{x^2}{1-x^2} = \frac{1}{0} = \begin{cases} -\infty, & x \to -1^- \\ +\infty, & x\to -1^+ \end{cases}$

    $\lim_{x\to 1} \frac{x^2}{1-x^2} = \frac{1}{0} = \begin{cases} +\infty, & x \to 1^- \\ -\infty, & x\to 1^+ \end{cases}$

  Las rectas $\boxed{x=-1}$ y $\boxed{x=1}$ son asíntotas verticales.

  - Horizontal:

    $\lim_{x\to \infty} \frac{x^2}{1-x^2} = -1$. La recta $\boxed{y=-1}$ es asíntota horizontal

  - Oblicua: No tiene pues tiene asíntota horizontal.

- Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{2x(1-x^2) - x^2\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2x-2x^3+2x^3}{(1-x^2)^2} = \frac{2x}{(1-x^2)^2} = 0 \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
Signo f'	$-$	$-$	$+$	$+$
	DECRECIENTE	DECRECIENTE	CRECIENTE	CRECIENTE

- Extremos Relativos:

$$f''(x) = \frac{2\cdot(1-x^2)^{\cancel{2}} - 2x\cdot 2(\cancel{1-x^2})\cdot(-2x)}{(1-x^2)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{2-2x^2+8x^2}{(1-x^2)^3} = \frac{6x^2+2}{(1-x^2)^3}$$

$f''(0) > 0 \Rightarrow$ El punto $(0,0)$ es un mínimo relativo.

- Concavidad y convexidad

$$f''(x) = \frac{6x^2+2}{(1-x^2)^3} = 0 \Rightarrow 6x^2+2=0 \text{ sin solución.}$$

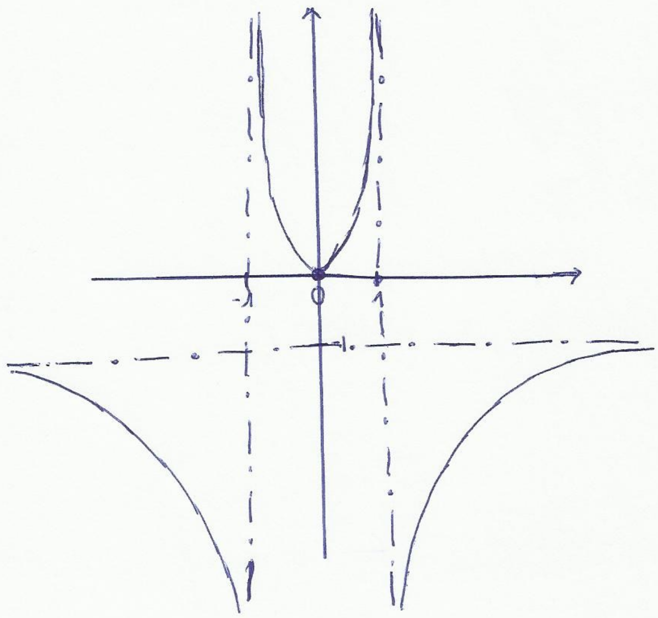
La funciōn no tiene puntos de inflexiōn

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
signo f''	$-$	$+$	$-$
	CONVEXA	CÓNCAVA	CONVEXA

- Signo de la funciōn:

$$\underset{-1}{-\ \vert}\ +\ \underset{0}{\vert}\ +\ \underset{1}{\vert}\ -$$

- Representaciōn gráfica:



$$\boxed{f(x) = \frac{2x^2}{x-2}}$$

- Dominio: $x-2=0 \Rightarrow x=2$

  $Dom\ f = \mathbb{R} - \{2\}$

- Simetrías: $f(-x) = \dfrac{2(-x)^2}{-x-2} = \dfrac{2x^2}{-x-2}$

  La función no es par ni impar.

- Puntos de corte con los ejes:

  - Eje X: $f(x)=0 \Rightarrow \dfrac{2x^2}{x-2}=0 \Rightarrow 2x^2=0 \Rightarrow x=0$

    La función corta al eje X en el punto $(0,0)$

  - Eje Y: $f(0)=0$. La función corta al eje Y en el punto $(0,0)$.

- Asíntotas:

  - Verticales: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2}{x-2} = \dfrac{8}{0} = \begin{cases} -\infty, & x\to 2^- \\ +\infty, & x\to 2^+ \end{cases}$

    La recta $\boxed{x=2}$ es una asíntota vertical

  - Horizontal:

    $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2}{x-2} = \infty$. La función no tiene asíntotas horizontales

  - Oblicua:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2}{x-2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2-2x} = 2$$

$$b = \lim_{x\to\infty} [f(x)-mx] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2}{x-2} - 2x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-2x^2+4x}{x-2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{x-2} = 4.$$

La recta $\boxed{y=2x+4}$ es una asíntota oblicua

- Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{4x(x-2)-2x^2}{(x-2)^2} = \frac{4x^2-8x-2x^2}{(x-2)^2} = \frac{2x^2-8x}{(x-2)^2} = 0 \Rightarrow 2x^2-8x=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x(x-4)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x=0 \Rightarrow x=0 \\ x-4=0 \Rightarrow x=4 \end{cases}$$

	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,4)$	$(4,+\infty)$
signo f'	+	−	−	+
	CRECIENTE	DECRECIENTE	DECRECIENTE	CRECIENTE

• Extremos Relativos:

$$f''(x) = \frac{(4x-8)(x-2)^{\cancel{2}} - (2x^2-8x)\cdot 2\cancel{(x-2)}}{(x-2)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{4x^2-8x-8x+16-4x^2+16x}{(x-2)^3} = \frac{16}{(x-2)^3}$$

$f''(0) < 0 \Rightarrow$ El punto $(0,0)$ es un máximo relativo

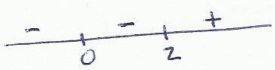
$f''(4) > 0 \Rightarrow$ El punto $(4,16)$ es un mínimo relativo.

• Concavidad y convexidad:

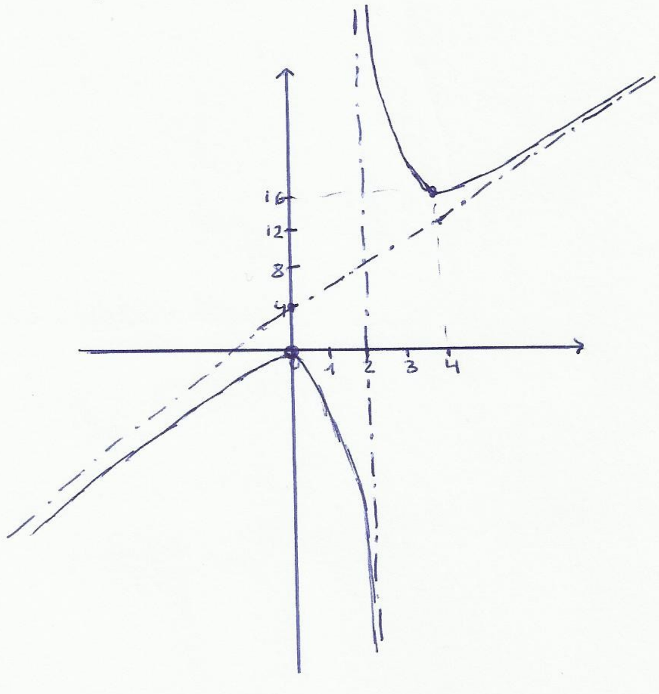
$f''(x) = \frac{16}{(x-2)^3} = 0$ sin solución.
La función no tiene punto de inflexión.

	$(-\infty, 2)$	$(2, +\infty)$
Signo f''	$-$	$+$
	CONVEXA	CÓNCAVA

• Signo de la función:



• Representación gráfica:



$$\boxed{f(x)=\frac{2x}{x^2+2}}$$

- Dominio: Dom $f=\mathbb{R}$
- Simétrica: $f(-x)=\frac{2(-x)}{(-x)^2+2}=\frac{-2x}{x^2+2}=-f(x)$

La función es impar o simétrica respecto del origen.

- Puntos de corte con los ejes:

 - Eje X: $f(x)=0 \Rightarrow \frac{2x}{x^2+2}=0 \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0$

 La función corta al eje X en el punto $(0,0)$

 - Eje Y: $f(0)=0$. La función corta al eje Y en el punto $(0,0)$

- Asíntotas:

 - Vertical: No tiene
 - Horizontal: $\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2+2}=0$. La recta $\boxed{y=0}$ es asíntota horizontal.
 - Oblicua: No tiene

- Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x)=\frac{2(x^2+2)-2x\cdot 2x}{(x^2+2)^2}=\frac{2x^2+4-4x^2}{(x^2+2)^2}=\frac{4-2x^2}{(x^2+2)^2}=0 \Rightarrow 4-2x^2=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

	$(-\infty,-\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$	$(\sqrt{2},\infty)$
signo f'	$-$	$+$	$-$
	DECRECIENTE	CRECIENTE	DECRECIENTE

- Extremos Relativos:

$$f''(x)=\frac{-4x(x^2+2)^{\cancel{2}}-(4-2x^2)\cdot 2\cancel{(x^2+2)}\cdot 2x}{(x^2+2)^{\cancel{4}\,3}}=\frac{-4x^3-8x-16x+8x^3}{(x+2)^3}=\frac{4x^3-20x}{(x+2)^3}$$

$f''(-\sqrt{2})>0 \Rightarrow$ El punto $(-\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$ es un mínimo relativo

$f''(\sqrt{2})<0 \Rightarrow$ El punto $(\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ es un máximo relativo.

- Concavidad y convexidad:

$$f''(x) = \frac{4x^3 - 20x}{(x^2+2)^3} = 0 \Rightarrow 4x^3 - 20x = 0 \Rightarrow 4x(x^2-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{5} \end{cases}$$

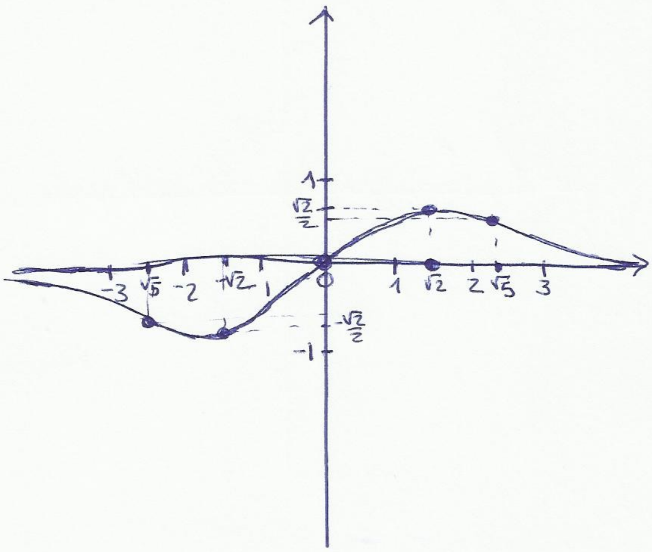
	$(-\infty, -\sqrt{5})$	$(-\sqrt{5}, 0)$	$(0, \sqrt{5})$	$(\sqrt{5}, +\infty)$
signo f''	$-$	$+$	$-$	$+$
	CONVEXA	CÓNCAVA	CONVEXA	CÓNCAVA

La función tiene tres puntos de inflexión: $(0,0)$, $\left(-\sqrt{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{7}\right)$ y $\left(\sqrt{5}, \frac{2\sqrt{5}}{7}\right)$

- Signo de la función:

$$\underset{0}{\overset{-\quad\quad +}{\longleftarrow\!\!|\!\!\longrightarrow}}$$

- Representación gráfica:



$$\boxed{f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}}$$

- Dominio: $1-x^2=0 \Rightarrow x=\pm 1$

  $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

- Simetrías: $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{1-(-x)^2} = \dfrac{-x^3}{1-x^2} = -f(x)$

  La función es impar o simétrica respecto del origen.

- Puntos de corte con los ejes:

  - Eje X: $f(x)=0 \Rightarrow \dfrac{x^3}{1-x^2}=0 \Rightarrow x^3=0 \Rightarrow x=0$

    La función corta al eje X en el punto $(0,0)$

  - Eje Y: $f(0)=0$. La función corta al eje Y en el punto $(0,0)$

- Asíntotas:

  - Verticales: $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3}{1-x^2} = \dfrac{-1}{0} = \begin{cases} +\infty, & x\to -1^- \\ -\infty, & x\to -1^+ \end{cases}$

    $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3}{1-x^2} = \dfrac{1}{0} = \begin{cases} +\infty, & x\to 1^- \\ -\infty, & x\to 1^+ \end{cases}$

    Las rectas $\boxed{x=-1}$ y $\boxed{x=1}$ son asíntotas verticales

  - Horizontales:

    $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{1-x^2} = -\infty$. No tiene asíntotas horizontales

  - Oblicuas:

    $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{x^3}{1-x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{x-x^3} = -1$

    $b = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^3}{1-x^2} + x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+x-x^3}{1-x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{1-x^2} = 0$

    La recta $\boxed{y=-x}$ es asíntota oblicua.

- Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{3x^2(1-x^2) - x^3\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{3x^2 - 3x^4 + 2x^4}{(1-x^2)^2} = \frac{-x^4+3x^2}{(1-x^2)^2} = 0 \Rightarrow -x^4+3x^2=0$$

$$\Rightarrow x^2(-x^2+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2=0 \Rightarrow x=0 \\ -x^2+3=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3} \end{cases}$$

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
signo f'	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$
	DECRECIENTE	CRECIENTE	CRECIENTE	CRECIENTE	CRECIENTE	DECRECIENTE

- Extremos Relativos:

$$f''(x) = \frac{(-4x^3+6x)\cdot(1-x^2)^2 - (-x^4+3x^2)\cdot 2(1-x^2)\cdot(-2x)}{(1-x^2)^{\cancel{4}\,3}} =$$

$$= \frac{-4x^3+4x^5+6x-6x^3-4x^5+12x^3}{(1-x^2)^3} = \frac{2x^3+6x}{(1-x^2)^3}$$

$f''(0) = 0 \Rightarrow$ El punto $(0,0)$ es un punto de inflexión

$f''(-\sqrt{3}) > 0 \Rightarrow$ El punto $\left(-\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ es un mínimo relativo

$f''(\sqrt{3}) < 0 \Rightarrow$ El punto $\left(\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ es un máximo relativo

- Concavidad y convexidad:

$$f''(x) = \frac{2x^3+6x}{(1-x^2)^3} = 0 \Rightarrow 2x^3+6x=0 \Rightarrow 2x(x^2+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} 2x=0 \Rightarrow x=0 \\ x^2+3=0 \text{ sin solución} \end{cases}$$

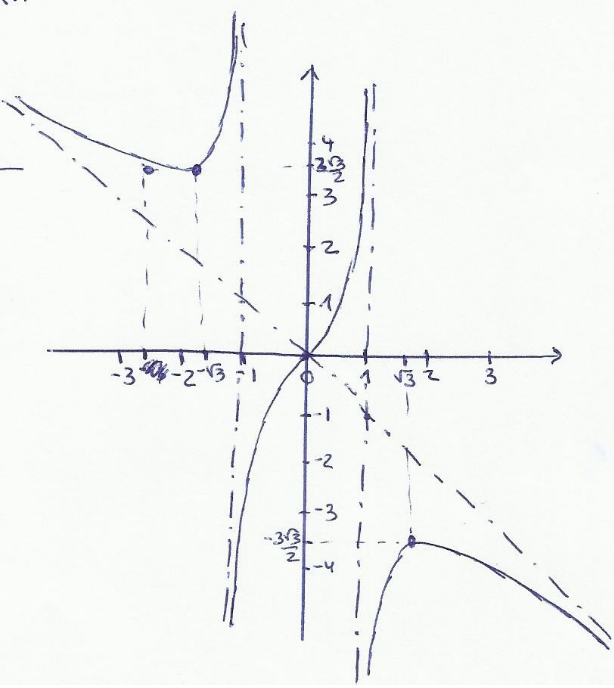
	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
signo f''	$+$	$-$	$+$	$-$
	CÓNCAVA	CONVEXA	CÓNCAVA	CONVEXA

El punto $(0,0)$ es un punto de inflexión

- Signo de la función:

$+ \quad -1 \quad - \quad 0 \quad + \quad 1 \quad -$

- Representación gráfica:



$$\boxed{f(x) = \sqrt{x^2-4}}$$

- **Dominio**: $x^2-4 \geq 0$ $\quad + \quad -2 \quad - \quad 2 \quad +$

  $\text{Dom } f = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

- **Simetrías**: $f(-x) = \sqrt{(-x)^2-4} = \sqrt{x^2-4} = f(x)$

  La función es par o simétrica respecto del eje Y

- **Puntos de corte con los ejes**:

  - Eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2-4} = 0 \Rightarrow x^2-4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

    La función corta al eje X en los puntos $(-2,0)$ y $(2,0)$

  - Eje Y: $f(0)$, $0 \notin \text{Dom } f$. La función no corta al eje Y.

- **Asíntotas**:

  - Verticales: No tiene

  - Horizontales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2-4} = \infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-4} = \infty \end{array}\right\} \text{La función no tiene asíntotas horizontales}$$

  - Oblicuas:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+4} - x) = (\infty - \infty) = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+4} - x)(\sqrt{x^2-4}+x)}{\sqrt{x^2-4}+x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+4})^2 - x^2}{\sqrt{x^2+4}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2} - 4 - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+4}+x} = 0$$

La recta $\boxed{y = x}$ es asíntota oblicua (en $+\infty$)

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} = -1$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2-4} + x) = (\infty - \infty) = \lim_{x\to-\infty} \frac{(\sqrt{x^2-4}+x)(\sqrt{x^2-4}-x)}{\sqrt{x^2-4}-x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{(\sqrt{x^2-4})^2 - x^2}{\sqrt{x^2-4} - x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(\sqrt{x^2-4})^2 - x}{\sqrt{x^2-4} - x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-4-x^2}{\sqrt{x^2-4} - x} = 0$$

La recta $\boxed{y = -x}$ es asíntota oblicua (en $-\infty$)

- Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} = 0 \Rightarrow x = 0$$

	$(-\infty, -2)$	$(+2, \infty)$
signo f''	$-$	$+$
	DECRECIENTE	CRECIENTE

- Extremos Relativos: No tiene, $0 \notin Dom f$

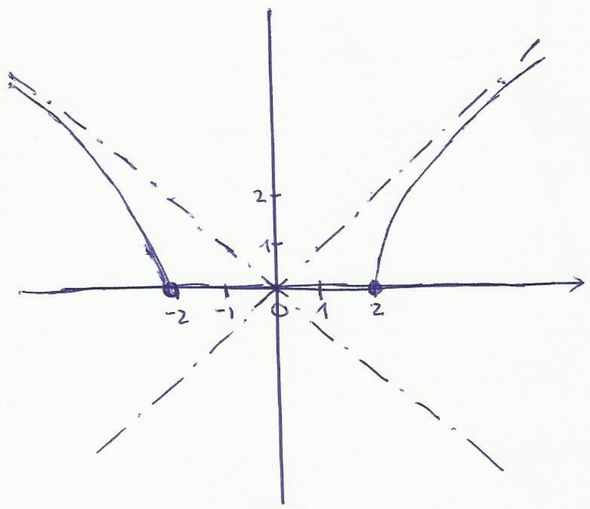
- Concavidad y convexidad:

$$f''(x) = \frac{\sqrt{x^2-4} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}}{(\sqrt{x^2-4})^2} = \frac{\frac{x^2-4-x^2}{\sqrt{x^2-4}}}{x^2-4} = \frac{-4}{\sqrt{(x^2-4)^3}} = 0 \text{ sin solución}$$

La función no tiene puntos de inflexión.

- Signo de la función:

- Representación gráfica:



$$\boxed{f(x) = \sqrt{x^2+4}}$$

- Dominio : $x^2+4 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

  $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

- Simetrías: $f(-x) = \sqrt{(-x)^2+4} = \sqrt{x^2+4} = f(x)$

  La función es par o simétrica respecto del eje Y.

- Puntos de corte con los ejes:

  - Eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+4} = 0 \Rightarrow x^2+4 = 0$ sin solución

    La función no corta al eje X

  - Eje Y: $f(0) = 2$. El punto de corte con el eje Y es $(0,2)$

- Asíntotas:

  - Verticales: No tiene
  - Horizontales: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+4} = \infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+4} = \infty \end{array}\right\}$ La función no tiene asíntotas horizontales

  - oblicuas:

    $m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x} = 1$

    $b = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim\limits_{x\to\infty} [\sqrt{x^2+4} - x] = 0$

    La recta $\boxed{y=x}$ es asíntota oblicua (en $+\infty$)

    $m = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x} = -1$

    $b = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+4} + x) = 0$

    La recta $\boxed{y=-x}$ es asíntota oblicua (en $-\infty$)

- Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} = 0 \Rightarrow x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
signo f'	$-$	$+$
	DECRECIENTE	CRECIENTE

• Extremos Relativos:

$$f''(x) = \frac{\sqrt{x^2+4} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}}{(\sqrt{x^2+4})^2} = \frac{\frac{x^2+4-x^2}{\sqrt{x^2+4}}}{x^2+4} = \frac{4}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$$

$f''(0) > 0 \Rightarrow$ El punto $(0,2)$ es un mínimo relativo

• Concavidad y convexidad:

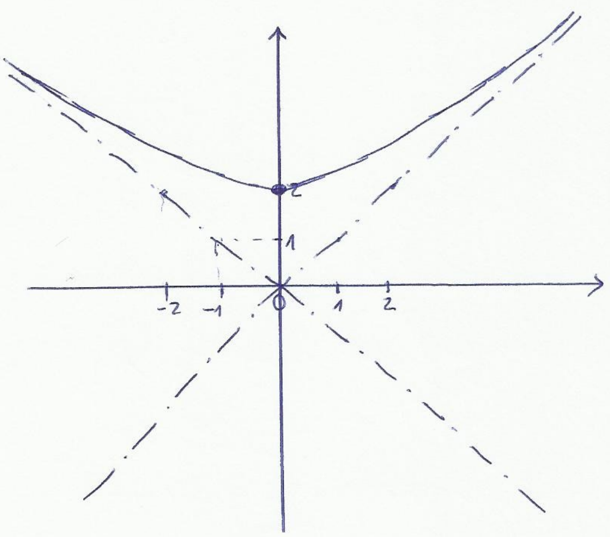
$f''(x) = \frac{4}{\sqrt{(x^2+4)^3}} = 0$ sin solución.

La función no tiene ningún punto de inflexión

$f''(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, por tanto, la función es cóncava en todo su dominio.

• Signo de la función: La función es positiva en todo su dominio

• Representación gráfica:



$$\boxed{f(x)=\ln(x^2+1)}$$

- Dominio: $x^2+1 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

  $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

- Simetrías: $f(-x) = \ln((-x)^2+1) = \ln(x^2+1) = f(x)$

  La función es par o simétrica respecto del eje Y

- Puntos de corte con los ejes:

  - Eje X: $f(x)=0 \Rightarrow \ln(x^2+1)=0 \Rightarrow x^2+1=1 \Rightarrow x=0$

    La función corta al eje X en el punto $(0,0)$

  - Eje Y: $f(0)=0$. La función corta al eje Y en el punto $(0,0)$.

- Asíntotas:

  - Verticales: No tiene

  - Horizontales:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty} \ln(x^2+1) = \infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \ln(x^2+1) = \infty\end{array}\right\} \text{La función no tiene asíntotas horizontales}$$

  - Oblicuas:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x^2+1}}{1} = 0$$

  La función no tiene asíntotas oblicuas.

- Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} = 0 \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
Signo f'	$-$	$+$
	DECRECIENTE	CRECIENTE

- Extremos Relativos:

$$f''(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$$

$f''(0) > 0 \Rightarrow$ El punto $(0,0)$ es un mínimo relativo.

- Concavidad y convexidad:

$$f''(x) = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow 2-2x^2=0 \Rightarrow x = \pm 1$$

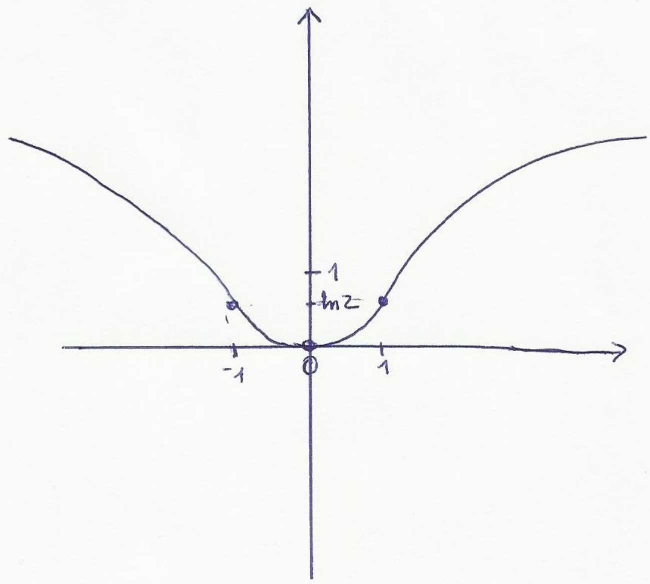
	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
signo f''	$-$	$+$	$-$
	CONVEXA	CÓNCAVA	CONVEXA

Los puntos $(1, \ln 2)$ y $(-1, \ln 2)$ son puntos de inflexión.

- Signo de la función:

  $x^2+1 \geq 1 \;\; \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \ln(x^2+1) \geq 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$, es decir, la función es positiva en todo su dominio de definición.

- Representación gráfica:



$\boxed{f(x) = x \cdot e^{-x}}$

- Dominio: Dom $f = \mathbb{R}$
- Asíntotas: $f(-x) = -x\, e^{x}$

  La función no es par ni impar

- Puntos de corte con los ejes:

  - Eje X: $f(x)=0 \Rightarrow x \cdot e^{-x} = 0 \Rightarrow x = 0$

    La función corta al eje X en el punto $(0,0)$

  - Eje Y: $f(0)=0$. La función corta al eje Y en el punto $(0,0)$

- Asíntotas:

  - Verticales: No tiene

  - Horizontales:

    $$\lim_{x\to\infty} x \cdot e^{-x} = \infty \cdot 0 = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

    La recta $\boxed{y=0}$ es asíntota horizontal (en $+\infty$)

    $$\lim_{x\to-\infty} x \cdot e^{-x} = -\infty \cdot \infty = -\infty.$$ No tiene asíntota horizontal en $-\infty$.

  - Oblicuas: No tiene

- Crecimiento y decrecimiento:

  $$f'(x) = e^{-x} - x\,e^{-x} = (1-x)\,e^{-x} = 0 \Rightarrow 1-x=0 \Rightarrow x=1$$

	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
signo f'	+	−
	CRECIENTE	DECRECIENTE

- Extremos relativos:

  $$f''(x) = -e^{-x} - (1-x)\,e^{-x} = -2e^{-x} + x\,e^{-x} = (x-2)\,e^{-x}$$

  $f''(1) < 0 \Rightarrow$ El punto $(1, \frac{1}{e})$ es un máximo relativo.

- Concavidad y convexidad

$f''(x) = (x-2)\,e^{-x} = 0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$

	$(-\infty, 2)$	$(2, +\infty)$
Signo f''	$-$	$+$
	CONVEXA	CÓNCAVA

El punto $\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$ es un punto de inflexión.

- Signo de la función:

$$\begin{array}{ccc} - & | & + \\ & 0 & \end{array}$$

- Representación gráfica: