54028

EXAMEN DE MATRICES
MATEMÁTICAS – 2º BACHILLERATO

**Ejercicio 1.**

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

1. Determinar la matriz inversa de $B$.
2. Determinar una matriz $X$ tal que $A = B \cdot X$.

---

**Solución:**

1. $B^{-1} = \begin{pmatrix} 4/3 & -1/3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix}$

2. $A = BX \Longrightarrow B^{-1}A = B^{1}BX \Longrightarrow B^{-1}A = X$

$$X = \begin{pmatrix} 4/3 & -1/3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 & 1/3 & -11/3 \\ -1 & 1 & 5 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 2.**

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Hallar $(A - I)^2$.
2. Calcular $A^4$ haciendo uso del apartado anterior.

---

**Solución:**

1. $(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. $(A - I)^2 = A^2 - 2A + I = 0 \Longrightarrow A^2 = 2A - I$

$$A^4 = (A^2)^2 = 4A^2 - 4A + I = 4(2A - I) - 4A + I = 4A - 3I$$

$$A^4 = 4 \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ -4 & -7 & 4 \\ -4 & -8 & 5 \end{pmatrix}$$

54028

Ejercicio 3.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ encontrar todas las matrices

$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $AP = PA$.

---

**Solución:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ c & 2c+d \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} a+2c = a \Longrightarrow c = 0 \\ b+2d = 2a+b \Longrightarrow a = d \\ c = c \\ d = 2c+d \Longrightarrow c = 0 \end{cases}$$

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$

Hallar una matriz $X$ tal que $XAX^{-1} = B$

---

**Solución:**

$XAX^{-1} = B \Longrightarrow XA = BX$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2a & -b \\ 2c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8a-9c & 9b-9d \\ 6a-9c & b-d \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 6a-9c = 0 \\ b-d = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b = d \\ c = 2/3a \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 2/3a & b \end{pmatrix}, \text{ p.e } \quad a = 3 \quad X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$