

EJERCICIOS RESULTOS DE SISTEMAS DEPENDIENTES DE UN PARÁMETRO

Sistemas 2x3

1.
$$\begin{aligned} 3x - y + az &= 1 \\ x + y - z &= a \end{aligned}$$
2.
$$\begin{aligned} ax + y - z &= 1 \\ -4x - ay + 2z &= 3 \end{aligned}$$
3.
$$\begin{aligned} ax + y + z &= 3 \\ 2x + 3y + az &= 6a \end{aligned}$$
4.
$$\begin{aligned} x - ay + z &= 1 \\ ax - 4y + 2z &= a \end{aligned}$$
5.
$$\begin{aligned} x - y + 3z &= 0 \\ -ax + ay - 9z &= 0 \end{aligned}$$

Sistemas 3x2

6.
$$\begin{cases} ax + y = 1 \\ 2x - y = 3 \\ ax - 2y = 2 \end{cases}$$
7.
$$\begin{cases} -ax - 2y = 1 \\ -x + 2y = 2 \\ 3x - 6y = 3 \end{cases}$$
8.
$$\begin{cases} x - 2y = a \\ -ax + 4y = -4 \\ x - ay = 2 \end{cases}$$
9.
$$\begin{cases} ax - y = a \\ -4x + ay = 1 \\ -ax + y = 3 \end{cases}$$
10.
$$\begin{cases} x + ay = 0 \\ -ax - 4y = 0 \\ 3x + 6y = 0 \end{cases}$$

Sistemas 3x3

11.
$$\begin{cases} ax + y - 2z = 1 \\ -2x - 2y + 4az = -2a \\ -x - ay + 2z = -a \end{cases}$$
12.
$$\begin{cases} x - y + az = -2 \\ 2x + ay + z = -4 \\ -x + y - z = 2 \end{cases}$$
13.
$$\begin{cases} (2a + 2)x + 3y + az = a + 4 \\ (4a - 1)x + (a + 1)y + (2a - 1)z = 2a + 2 \\ (5a - 4)x + (a + 1)y + (3a - 4)z = a - 1 \end{cases}$$

Sistemas 3x4

14.
$$\begin{cases} 2x + ay - 3z + t = a \\ ax + 2y + z - t = 2 \\ x - ay - 4z + 2at = -1 \end{cases}$$
15.
$$\begin{cases} ax + 3y - z - t = a \\ x - y + az + t = 1 \\ x + 4y - 3z - at = 1 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} x + y + z - t = a \\ 2x - 2y + z - at = 0 \\ ax - y + z - t = 2 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} x + y + z + at = 0 \\ x - ay + z - t = 0 \\ -ax + 3y + 2z - 3t = 0 \end{cases}$$

Sistemas 4x3

$$18. \begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ ax - y + z = -1 \\ x - ay + 4z = -2 \\ ax + 5y - 13z = 5 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} x + y = 1 \\ ax - y + z = 2 \\ -ax + 2y - 3z = 0 \\ ax - z = 0 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} x + z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ 3x + ay + 3z = 0 \\ ay - z = 0 \end{cases}$$

Soluciones

Sistemas 2x3.

$$1. \begin{cases} 3x - y + az = 1 \\ x + y - z = a \end{cases}$$

Solución: Consideremos la matriz de los coeficientes $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & a \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Como

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0: \text{rg}A = \text{rg}A^* < \text{número de incógnitas: SCI, con 1 grado de libertad.}$$

Convierto en parámetro la incógnita que queda fuera del menor ($z = \lambda$), quedando el

sistema: $\begin{cases} 3x - y = 1 - a\lambda \\ x + y = a + \lambda \end{cases}$, que se puede resolver por Cramer o por cualquiera de los

métodos tradicionales. Solución: $\left\{ \left(\frac{1+a+(1-a)\lambda}{4}, \frac{3a-1+(3+a)\lambda}{4}, \lambda \right) : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

$$2. \begin{cases} ax + y - z = 1 \\ -4x - ay + 2z = 3 \end{cases}$$

Solución: Consideremos la matriz de los coeficientes $A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ -4 & -a & 2 \end{pmatrix}$. Para estudiar el $\text{rg}A$, orlo desde el menor de orden 1 resaltado:

$$\text{Con 2ª fila y 2ª columna: } \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -a & 2 \end{vmatrix} = 2 - a.$$

$$\text{Con 2ª fila y 1ª columna: } \begin{vmatrix} a & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 2a - 4.$$

Ambos menores se anulan en $a = 2$. En consecuencia,:

- si $a \neq 2$, $\text{rg}A = 2 = \text{rg}A^* < 3 = n^{\circ}$ de incógnitas: SCI, con 1º de libertad. Se procede haciendo $x = \lambda$, y resolviendo el sistema $\begin{cases} y - z = 1 - a\lambda \\ -ay + 2z = 3 + 4\lambda \end{cases}$. Por Cramer,

da la solución $\left\{ \left(\lambda, \frac{1-a\lambda}{2-a}, \frac{1-a\lambda}{2-a} \right) : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

- Queda por ver el caso en que $a=2$, del que sabemos que $\text{rg}A=1$, Tenemos que estudiar el $\text{rg}A^*$. $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ -4 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y, para averiguarlo, sólo tengo que orlar con la 2ª fila y la 4ª columna: $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$. Luego $\text{rg}A < \text{rg}A^* = 2$: Sistema incompatible.

3.
$$\begin{aligned} ax + y + z &= 3 \\ 2x + 3y + az &= 6a \end{aligned}$$

Solución: Consideremos la matriz de los coeficientes $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a \end{pmatrix}$. Para estudiar el $\text{rg}A$, orlo desde el menor de orden 1 resaltado:

Con 2ª fila y 1ª columna: $\begin{vmatrix} a & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3a - 2$.

Con 2ª fila y 3ª columna: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & a \end{vmatrix} = a - 3$.

El primer menor se anula en $a = \frac{2}{3}$, y el segundo en $a = 3$.

Es decir no hay ningún valor de a que anule simultáneamente ambos menores y, en todos los casos de a , se tiene $\text{rg}A = 2 = \text{rg}A^* < 3 = n^a$ de incógnitas: SCI, con 1º de libertad.

Resolvamos el sistema: Si $a \neq 3$, hago $x = \lambda$, quedando el sistema $\begin{cases} y + z = 3 - a\lambda \\ 3y + az = 6a - 2\lambda \end{cases}$.

Por Cramer, da la solución: $\left\{ \left(\lambda, \frac{\begin{vmatrix} 3-a\lambda & 1 \\ 6a-2\lambda & a \end{vmatrix}}{a-3}, \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3-a\lambda \\ 3 & 6a-2\lambda \end{vmatrix}}{a-3} \right) : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

Si $a=3$, hago $z = \lambda$, quedando el sistema $\begin{cases} 3x + y = 3 - \lambda \\ 2x + 3z = 18 - 3\lambda \end{cases}$ con solución

$\left\{ \left(\frac{\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 18a-3\lambda & 3 \end{vmatrix}}{7}, \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3-\lambda \\ 2 & 18a-3\lambda \end{vmatrix}}{7}, \lambda \right) : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

4.
$$\begin{aligned} x - ay + z &= 1 \\ ax - 4y + 2z &= a \end{aligned}$$

Solución: Consideremos la matriz de los coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 1 \\ a & -4 & 2 \end{pmatrix}$. Para estudiar el $\text{rg}A$, orlo desde el menor de orden 1 resaltado:

Con 2ª fila y 2ª columna: $\begin{vmatrix} -a & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -2a + 4$

Con 2ª fila y 1ª columna: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 2 \end{vmatrix} = 2 - a$

Ambos menores se anulan en $a=2$.

En consecuencia:

- si $a \neq 2$, $\text{rg}A = 2 = \text{rg}A^* < 3 = n^a$ de incógnitas: SCI, con 1º de libertad. Se procede haciendo $y = \lambda$, y resolviendo el sistema

$\begin{cases} x + z = 1 + a\lambda \\ ax + 2z = a + 4\lambda \end{cases}$. Por Cramer, obtenemos la solución:

$\left\{ \left(\frac{\begin{vmatrix} 1+a\lambda & 1 \\ a+4\lambda & 2 \end{vmatrix}}{2-a}, \lambda, \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1+a\lambda \\ a & a+4\lambda \end{vmatrix}}{2-a} \right) : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

- Queda por ver el caso en que $a=2$, del que sabemos que $\text{rg}A=1$, Tenemos que estudiar el $\text{rg}A^*$. $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y, para averiguarlo, sólo tengo que

Orlar con la 2ª fila y la 4ª columna: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$. Luego $\text{rg}A = \text{rg}A^* = 1 < 3 = n^a$ de incógnitas: SCL, con 2 grados de libertad. Elimino la fila 2, y hago $x = \lambda$, $y = \mu$, quedando la solución $\{(\lambda, \mu, 1 - \lambda + 2\mu): \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

5.
$$\begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ -ax + ay - 9z = 0 \end{cases}$$

Por ser homogéneo, tendremos que $\text{rg}A = \text{rg}A^*$, y siempre será compatible.

Estudiamos el rango de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -a & a & -9 \end{pmatrix}$

Orlo con 2ª fila y 2ª columna: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -a & a \end{vmatrix} = 0$.

Orlo con 2ª fila y 3ª columna: $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -a & -9 \end{vmatrix} = -9 + 3a$.

- Si $a \neq 3$, $\text{rg}A = 2 = \text{rg}A^* < 3 = n^a$ de incógnitas: SCL, con 1º de libertad. Estamos obligados a hacer $y = \lambda$, quedando el sistema $\begin{cases} x + 3z = \lambda \\ -ax - 9z = -a\lambda \end{cases}$. Por Cramer, da la solución: $\left\{ \left(\frac{\begin{vmatrix} \lambda & 3 \\ -a\lambda & -9 \end{vmatrix}}{-9+3a}, \lambda, \frac{\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ -a & -a\lambda \end{vmatrix}}{-9+3a} \right) : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.
- Si $a = 3$, $\text{rg}A = \text{rg}A^* = 1$: SCL, con dos grados de libertad, que se reduce a la 1ª ecuación. Hago $y = \lambda$, $z = \mu$ siendo la solución $\{(\lambda - 3\mu, \lambda, \mu): \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

Sistemas 3x2

6.
$$\begin{cases} ax + y = 1 \\ 2x - y = 3 \\ ax - 2y = 2 \end{cases}$$

Para estudiar el rg de A^* , calculamos su determinante: $|A^*| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ a & -2 & 2 \end{vmatrix} = 8a -$

$8 = 0$, si $a = 1$.

- En el caso de que $a \neq 1$, $\text{rg}A^* = 3 > \text{rg}A$: Sistema incompatible.
- Si $a = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, el menor resaltado vale $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2 \neq 0$. Luego $\text{rg}A = 2 = \text{rg}A^* = n^a$ de incógnitas: SCD. Elimino la ecuación que queda fuera del menor, resultando el sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ de solución $(4/3, -1/3)$

7.
$$\begin{cases} -ax - 2y = 1 \\ -x + 2y = 2 \\ 3x - 6y = 3 \end{cases}$$

Para estudiar el rg de A^* , calculamos su determinante: $|A^*| = \begin{vmatrix} -a & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & 3 \end{vmatrix} =$

$-18a - 18 = 0$, si $a = -1$. Se tiene que:

- Si $a \neq -1$, $\text{rg}A^* = 3 > \text{rg}A$: Sistema incompatible.

- Si $a=-1$, $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$ que tiene rango 1, por ser todas sus dos columnas proporcionales. Falta estudiar el rango de A^* porque puede valer 1 o 2:
 $A^*=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$ El menor resaltado es no nulo, luego $\text{rg}A=1<2=\text{rg}A^*$: SI.

En definitiva, el sistema es siempre incompatible (Nótese que a esta conclusión podíamos haber llegado con la sola observación de la incompatibilidad de la 2ª y 3ª ecuaciones)

$$8. \begin{cases} x - 2y = a \\ -ax + 4y = -4 \\ x - ay = 2 \end{cases}$$

Para estudiar el rg de A^* , calculamos su determinante: $|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & a \\ -a & 4 & -4 \\ 1 & -a & 2 \end{vmatrix} = a^3 -$

$$12a + 16 = (a - 2)^2(a + 4) = 0, \text{ si } a = -4, 2.$$

- Si $a \neq -4, 2$, $\text{rg}A^*=3>\text{rg}A$: Sistema incompatible.

Veamos los dos casos particulares:

- Si $a=-4$, $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ el menor resaltado vale $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$. Luego

$\text{rg}A=2=\text{rg}A^*=n^\circ$ de incógnitas: SCD. Elimino la ecuación que queda fuera del menor, resultando el sistema $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 4x + 4y = -4 \end{cases}$ de solución $(-2, 1)$

- Si $a=2$, $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ que tiene rango 1 (las dos columnas son proporcionales). Ahora hay que ver el rango de $A^*=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

También se observa que tiene rango 1, por ser proporcionales las filas, luego $\text{rg}A=\text{rg}A^*=1<2=n^\circ$ de incógnitas: SCI, con 1º de libertad. Elimino la 2ª y 3ª ecuaciones, hago $y=\lambda$, quedando la 1ª ecuación, que tiene por solución $\{(2 + 2\lambda, \lambda): \lambda \in \mathbb{R}\}$.

$$9. \begin{cases} ax - y = a \\ -4x + ay = 1 \\ -ax + y = 3 \end{cases}$$

Para estudiar el rg de A^* , calculamos su determinante: $|A^*| = \begin{vmatrix} a & -1 & a \\ -4 & a & 1 \\ -a & 1 & 3 \end{vmatrix} = a^3 +$

$$3a^2 - 4a - 12 = (a + 3)(a + 2)(a - 2) = 0, \text{ si } a = -3, -2 \text{ y } 2.$$

- En el caso de que $a \neq -3, -2 \text{ y } 2$, $\text{rg}A^*=3>\text{rg}A$: Sistema incompatible.

Estudiemos ahora los tres casos particulares:

- Si $a=-3$: $A=\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -4 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, el menor resaltado vale $\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = 9 - 4 \neq 0$. Luego

$\text{rg}A=2=\text{rg}A^*=n^\circ$ de incógnitas: SCD. Elimino la ecuación que queda fuera del menor, quedando el sistema $\begin{cases} -3x - y = -3 \\ -4x - 3y = 1 \end{cases}$. De solución $(2, -3)$.

- Si $a=-2$: $A=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ que tiene rango 1, por ser todas sus columnas proporcionales. Falta estudiar el rango de $A^*=\begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ El menor resultado es no nulo, luego $\text{rg}A=1<2=\text{rg}A^*$: SI.
- Si $a=2$: $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ que tiene rango 1. $A^*=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ El menor resultado es no nulo, luego $\text{rg}A=1<2=\text{rg}A^*$: también queda SI.

$$10. \begin{cases} x + ay = 0 \\ -ax - 4y = 0 \\ 3x + 6y = 0 \end{cases}$$

Al ser un sistema homogéneo, sólo hay que estudiar el $\text{rg} A$.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & -4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \text{ Orlo el menor resultado:}$$

$$\text{Con } F_2 \text{ y } C_1: \begin{vmatrix} -a & -4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -6a + 12, \text{ que se anula en } a=2.$$

$$\text{Con } F_1 \text{ y } C_1: \begin{vmatrix} 1 & a \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 3a, \text{ que se anula en } a=2.$$

- Si $a \neq 2$, entonces $\text{rg} A=2=\text{rg}A^*=n^\circ$ de incógnitas: SCD cuya única solución será, necesariamente, la solución nula $(0, 0)$
- Si $a=2$, entonces $\text{rg}A=\text{rg}A^*=1<2=n^\circ$ de incógnitas: SCI, con 1° de libertad. Elimino F_1 y F_2 , hago $x=\lambda$, quedando la solución $\{(\lambda, -\lambda/2): \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Sistemas 3x3

$$11. \begin{cases} ax + y - 2z = 1 \\ -2x - 2y + 4az = -2a \\ -x - ay + 2z = -a \end{cases}$$

Como A es una matriz cuadrada, lo mejor es comenzar estudiando su rango.

Calculemos su determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4a \\ -1 & -a & 2 \end{vmatrix} = 4a^3 - 12a + 8 = 4(a-1)^2(a+2)$$

- Si $a \neq -2, 1$, entonces $\text{rg}A=\text{rg}A^*=3=n^\circ$ de incógnitas: SCD, cuya solución es

$$\left(\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2a & -2 & 4a \\ -a & -a & 2 \end{vmatrix}}{4(a-1)^2(a+2)}, \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & -2 \\ -2 & -2a & 4a \\ -1 & -a & 2 \end{vmatrix}}{4(a-1)^2(a+2)}, \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2a \\ -1 & -a & -a \end{vmatrix}}{4(a-1)^2(a+2)} \right) = \text{desarrollando los}$$

determinantes

$$\left(\frac{-4a^2+8a-4}{4(a-1)^2(a+2)}, \frac{4a^3-4a^2-4a+4}{4(a-1)^2(a+2)}, \frac{4-2+2a^2+2a-2}{4(a-1)^2(a+2)} \right) = \left(\frac{-4(a-1)^2}{4(a-1)^2(a+2)}, \frac{4(a+1)(a-1)^2}{4(a-1)^2(a+2)}, \frac{-2(a+1)(a-1)^2}{4(a-1)^2(a+2)} \right) = \left(\frac{-1}{a+2}, \frac{a+1}{a+2}, \frac{-a-1}{2a+4} \right)$$

- Si $a=-2$, $A^*=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -8 & 4 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ Para estudiar el rango de A^* sólo queda orlar con F_3 y C_4 (puesto que si orlo con F_3 y C_3 obtendría el valor del determinante

de A, que ya sabemos que es nulo). Orlemos pues: $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 18 \neq 0$. Luego

$\text{rg}A < \text{rg}A^*$: SI.

Si $a=1$, $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ Las tres filas son proporcionales, luego

$\text{rg}A = \text{rg}A^* = 1 < 3 = n^\circ$ de incógnitas: SCI con 2 grados de libertad. Para resolverlo, elimino la 2ª y la 3ª ecuación, y hago $y=\lambda$, $z=\mu$, quedando la solución

$\{(1 - \lambda + 2\mu, \lambda, \mu) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

$$12. \begin{cases} x - y + az = -2 \\ 2x + ay + z = -4 \\ -x + y - z = 2 \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 2 & a & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = a^2 + a - 2 = (a+2)(a-1)$$

- Si $a \neq -2, 1$, entonces $\text{rg}A = \text{rg}A^* = 3 = n^\circ$ de incógnitas: SCD, cuya solución es

$$\left(\frac{\begin{vmatrix} -2 & -1 & a \\ -4 & a & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{(a+2)(a-1)}, \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & a \\ 2 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{(a+2)(a-1)}, \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & a & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{(a+2)(a-1)} \right) = \text{desarrollando los determinantes}$$

$$\left(\frac{-2a^2 - 2a + 4}{(a+2)(a-1)}, \frac{0}{(a+2)(a-1)}, \frac{0}{(a+2)(a-1)} \right) = \left(\frac{-2(a+2)(a-1)}{(a+2)(a-1)}, 0, 0 \right) = (2, 0, 0) \text{ que,}$$

inusualmente, es independiente del valor de a.

- Si $a=-2$, tenemos $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ El menor no nulo resaltado

garantiza que $\text{rg}A = 2$. Para estudiar el rango de A^* sólo queda orlar con F_3 y

$$C_4: \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0. \text{ Luego } \text{rg}A < \text{rg}A^*: \text{ SI.}$$

- Si $a=1$, será $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ Como la 3ª fila es igual que la primera

cambiada de signo, concluimos que $\text{rg}A = \text{rg}A^* = 2$. Elimino la 3ª ecuación, hago

$z=\lambda$, quedando el sistema $\begin{cases} x - y = -2 - \lambda \\ 2x + y = -4 - \lambda \end{cases}$ cuya solución es

$$\left\{ \left(\frac{-6-2\lambda}{3}, \frac{\lambda}{3}, \lambda \right) : \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$13. \begin{cases} (2a+2)x + 3y + az = a+4 \\ (4a-1)x + (a+1)y + (2a-1)z = 2a+2 \\ (5a-4)x + (a+1)y + (3a-4)z = a-1 \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2a+2 & 3 & a \\ 4a-1 & a+1 & 2a-1 \\ 5a-4 & a+1 & 3a-4 \end{vmatrix} = (F'_3 = F_3 - F_2) \begin{vmatrix} 2a+2 & 3 & a \\ 4a-1 & a+1 & 2a-1 \\ a-3 & 0 & a-3 \end{vmatrix} \text{ (saco factor}$$

$$\text{común de la 3ª fila)} (a-3) \begin{vmatrix} 2a+2 & 3 & a \\ 4a-1 & a+1 & 2a-1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (C'_1 = C_1 - C_3) = (a -$$

$$3) \begin{vmatrix} a+2 & 3 & a \\ 2a & a+1 & 2a-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \text{(desarrollo por los adjuntos de la 3ª fila)} (a -$$

$$3) \begin{vmatrix} a+2 & 3 \\ 2a & a+1 \end{vmatrix} = (a-3)(a^2+3a+2-6a) = (a-3)(a^2-3a+2) = (a-3)(a-2)(a-1)$$

- Si $a \neq 3$, 2 y 1: $\text{rg}A = \text{rg}A^* = 3 = n^\circ$ de incógnitas: SCD, con solución

$$\left(\begin{vmatrix} a+4 & 3 & a \\ 2a+2 & a+1 & 2a-1 \\ a-1 & a+1 & 3a-4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2a+2 & a+4 & a \\ 4a-1 & 2a+2 & 2a-1 \\ 5a-4 & a-1 & 3a-4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2a+2 & 3 & a+4 \\ 4a-1 & a+1 & 2a+2 \\ 5a-4 & a+1 & a-1 \end{vmatrix} \right) = \text{desarrollando los}$$

determinantes

$$\left(\frac{(a-1)(2a^2-4a-15)}{(a-3)(a-2)(a-1)}, \frac{(a-1)(a+18)}{(a-3)(a-2)(a-1)}, \frac{-3(a-1)(a^2-a-7)}{(a-3)(a-2)(a-1)} \right) = \left(\frac{2a^2-4a-15}{a^2-5a+6}, \frac{a+18}{a^2-5a+6}, \frac{-3a^2+3a+21}{a^2-5a+6} \right)$$

- Si $a=1$, $A^* = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ El menor resaltado nos indica que $\text{rg}A=2$, para

$$\text{ver el } \text{rg}A^*, \text{ sólo hay que orlar con la 3ª fila y 4ª columna: } \begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Luego $\text{rg}A = \text{rg}A^* = 2 < 3 = n^\circ$ de incógnitas: SCI con 1º de libertad, para resolverlo

$$\text{elimino la 3ª ecuación y hago } z = \lambda, \text{ quedando el sistema } \begin{cases} 4x + 3y = 5 - \lambda \\ 3x + 2y = 4 - \lambda \end{cases} \text{ con}$$

solución $\{(\lambda - 2, -\lambda - 1, \lambda); \lambda \in \mathbb{R}\}$

- Si $a=2$, $A^* = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 3 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Si orlamos el menor resaltado con la 3ª fila y 4ª

$$\text{columna, obtengo } \begin{vmatrix} 6 & 3 & 6 \\ 7 & 3 & 6 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0. \text{ Luego } \text{rg}A = 2 < \text{rg}A^*: \text{ SI (En realidad, la}$$

incompatibilidad del sistema se deducía fácilmente observando la 1ª y 3ª ecuaciones, correspondientes a la 1ª y 3ª fila de A^*)

- Si $a=3$, $A^* = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 3 & 7 \\ 11 & 4 & -5 & 8 \\ 11 & 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ que, con la sola observación de la 1ª y 3ª ecuaciones, deducimos que también es incompatible.

Sistemas 3x4

$$14. \begin{cases} 2x + ay - 3z + 2t = a \\ ax + 2y + z - t = 2 \\ x + y - 2z - at = 2 \end{cases}$$

Comencemos estudiando el rango de $A = \begin{pmatrix} 2 & a & -3 & 2 \\ a & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & -a \end{pmatrix}$. Para ello orlamos desde el menor no nulo que hemos resaltado.

$$\text{Con } F_3 \text{ y } C_2: \begin{vmatrix} a & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -a \end{vmatrix} = -a^2 - 8a - 7 = -(a+7)(a+1)$$

$$\text{Con } F_3 \text{ y } C_1: \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ a & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -a \end{vmatrix} = -3(a+1)^2$$

El único valor que anula ambos determinantes es $a=-1$.

- Si $a \neq -1$, $\text{rg}A=3=\text{rg}A^*<4=n^\circ$ de incógnitas: SCl, con un grado de libertad. Para calcular las soluciones lo más práctico es hacer $y=\lambda$ (si se hiciese $x=\lambda$, habría que considerar el caso particular $a=-7$), quedando el sistema

$$\begin{cases} 2x - 3z + 2t = a - a\lambda \\ ax + z - t = 2 - 2\lambda \\ x - 2z - at = 2 - \lambda \end{cases} \text{ cuya solución, por Cramer, es}$$

$$\left\{ \left(\frac{\begin{vmatrix} a-a\lambda & -3 & 2 \\ 2-2\lambda & 1 & -1 \\ 2-\lambda & -2 & -a \end{vmatrix}}{-3(a+1)^2}, \lambda, \frac{\begin{vmatrix} a & a-a\lambda & 2 \\ 2 & 2-2\lambda & -1 \\ -a & 2-\lambda & -a \end{vmatrix}}{-3(a+1)^2}, \frac{\begin{vmatrix} a & -3 & a-a\lambda \\ 2 & 1 & 2-2\lambda \\ -a & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix}}{-3(a+1)^2} \right) : \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

- Falta estudiar el caso $a=-1$, para el que hay que calcular el rango de

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Para este fin, sólo me queda orlar con } F_3 \text{ y}$$

$$C_5: \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0. \text{ Luego } \text{rg}A=2 < \text{rg}A^*=3: \text{ SI.}$$

$$15. \begin{cases} ax + 3y - z - t = a \\ x - y + az + t = 1 \\ x + 4y - 3z - at = 1 \end{cases}$$

Comencemos estudiando el rango de $A = \begin{pmatrix} a & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & a & 1 \\ 1 & 4 & -3 & -a \end{pmatrix}$. Para ello orlamos desde el menor no nulo que hemos resaltado.

$$\text{Con } F_1 \text{ y } C_3: \begin{vmatrix} a & 3 & -1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -4a^2 + 6a + 4 = 2\left(a + \frac{1}{2}\right)(a - 2)$$

$$\text{Con } F_1 \text{ y } C_4: \begin{vmatrix} a & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -a \end{vmatrix} = a^2 - a - 2 = (a + 1)(a - 2)$$

El único valor que anula ambos determinantes es $a=2$.

- Si $a \neq 2$, $\text{rg}A=3=\text{rg}A^*<4=n^\circ$ de incógnitas: SCl, con un grado de libertad. Para calcular las soluciones, en el caso de que a no sea -1 , hago $z=\lambda$, quedando el

$$\text{sistema } \begin{cases} ax + 3y - t = a + \lambda \\ x - y + t = 1 - a\lambda \\ x + 4y - at = 1 + 3\lambda \end{cases} \text{ cuya solución, por Cramer, es}$$

$$\left\{ \left(\frac{\begin{vmatrix} a+\lambda & 3 & -1 \\ 1-a\lambda & -1 & 1 \\ 1+3\lambda & 4 & -a \end{vmatrix}}{(a+1)(a-2)}, \frac{\begin{vmatrix} a & a+\lambda & -1 \\ 1 & 1-a\lambda & 1 \\ 1 & 1+3\lambda & -a \end{vmatrix}}{(a+1)(a-2)}, \lambda, \frac{\begin{vmatrix} a & 3 & a+\lambda \\ 1 & -1 & 1-a\lambda \\ 1 & 4 & 1+3\lambda \end{vmatrix}}{(a+1)(a-2)} \right) : \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Si a fuese -1 , entonces tendría que hacer $t=\lambda$, quedándome el sistema

$$\begin{cases} -x + 3y - z = -1 + \lambda \\ x - y - z = 1 - \lambda \\ x + 4y - 3z = 1 - \lambda \end{cases} \text{ que tiene por solución}$$

$$\left(\frac{\begin{vmatrix} -1+\lambda & 3 & -1 \\ 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1-\lambda & 4 & -3 \end{vmatrix}}{2}, \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1+\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda & -3 \end{vmatrix}}{2}, \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3 & -1+\lambda \\ 1 & -1 & 1-\lambda \\ 1 & 4 & -1-\lambda \end{vmatrix}}{2}, \lambda \right) : \lambda \in \mathbb{R}$$

- Falta estudiar el caso $a=2$, para el que $\text{rg}A=2$, y hay que calcular el de

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Para este objetivo, sólo queda orlar el menor}$$

$$\text{con } F_1 \text{ y } C_5: \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0. \text{ Luego } \text{rg}A=2=\text{rg}A^*=2 < 4=n^\circ \text{ de incógnitas, queda un}$$

SCI con dos grados de libertad. Elimino la 1ª ecuación, que es la queda fuera

$$\text{del menor, y hago } z = \lambda, t = \mu, \text{ quedando el sistema } \begin{cases} x - y = 1 - 2\lambda - \mu \\ x + 4y = 1 + 3\lambda + 2\mu \end{cases} \text{ que,}$$

$$\text{utilizando tiene por solución } \left\{ \left(\frac{5-5\lambda-2\mu}{5}, \frac{5\lambda+3\mu}{5}, \lambda, \mu \right) : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$16. \begin{cases} x + y + z - t = a \\ 2x - 2y + z - at = 0 \\ ax - y + z - t = 2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & -a \\ a & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ Estudiemos su rango:}$$

$$\text{Orlo el menor con } F_3 \text{ y } C_3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ a & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3a - 5, \text{ que se anula en } \frac{5}{3}.$$

$$\text{Orlo con } F_3 \text{ y } C_4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -a \\ a & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 - a^2 + 2 - 2a + 2 - a = -a^2 - 3a + 6, \text{ que se}$$

$$\text{anula en } \frac{3 \pm \sqrt{33}}{-2}.$$

Es decir, para cualquier valor de a se tiene $\text{rg}A=\text{rg}A^*=3$ y el sistema será compatible e indeterminado con 1º de libertad. Veamos cómo se hallaría la solución:

$$\text{Si } a \neq \frac{5}{3}, \text{ se hace } t = \lambda, \text{ y se aplica la regla de Cramer en el sistema } \begin{cases} x + y + z = a + \lambda \\ 2x - 2y + z = a\lambda \\ ax - y + z = 2 + \lambda \end{cases}$$

$$\text{Si } a = \frac{5}{3}, \text{ se hace } z = \lambda \text{ y se resuelve por Cramer } \begin{cases} x + y - t = \frac{5}{3} - \lambda \\ 2x - 2y - \frac{5}{3}t = -\lambda \\ \frac{5}{3}x - y - t = 2 - \lambda \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} x + y + z + at = 0 \\ x - ay + z - t = 0 \\ -ax + 3y + 2z - 3t = 0 \end{cases}$$

El sistema es homogéneo, luego será compatible por ser $\text{rg}A=\text{rg}A^*$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & -a & 1 & -1 \\ -a & 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \text{ Estudiemos su rango Orlando desde el menor resaltado:}$$

$$\text{Con } F_2 \text{ y } C_1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ -a & 3 & 2 \end{vmatrix} = -a^2 - 3a - 2 = -(a+2)(a+1)$$

$$\text{Con } F_2 \text{ y } C_4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ -a & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -2a^2 - 6a - 4 = -2(a+1)(a+2)$$

El único valor que anula ambos menores es $a=-2$.

- Si $a \neq -2$, tendremos $\text{rg} A = \text{rg} A^* = 3 < 4 = n^\circ$ de incógnitas: SCI con 1º de libertad.

Hacemos $t = \lambda$, en el caso de a no valga -1 , y nos queda el sistema

$$\begin{cases} x + y + z = -a\lambda \\ x - ay + z = \lambda \\ -ax + 3y + 2z = 3\lambda \end{cases} \quad \text{que se puede resolver por Cramer. En el caso de que}$$

$$\underline{a=-1}, \text{ se hace } z = \lambda, \text{ y quedaría el sistema } \begin{cases} x + y - t = -\lambda \\ x + y - t = -\lambda \\ x + 3y - 3t = -2\lambda \end{cases} \quad \text{que también se}$$

puede resolver por ese método.

- Si $a = -2$, tendremos $\text{rg} A = \text{rg} A^* = 2 < 4 = n^\circ$ de incógnitas: SCI con 2º de libertad.

Elimino la segunda ecuación y hago $x = \lambda$, $t = \mu$, quedando el sistema

$$\begin{aligned} y + z &= -\lambda + 2\mu \\ 3y + 2z &= -2\lambda + 3\mu \end{aligned} \quad \text{que se resuelve fácilmente..}$$

Sistemas 4x3

$$18. \begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ ax - y + z = -1 \\ x - ay + 4z = -2 \\ ax + 5y - 13z = 5 \end{cases}$$

Como A^* es cuadrada, es mejor comenzar calculando su determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ a & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -a & 4 & -2 \\ a & 5 & -13 & 5 \end{vmatrix} = \text{(Conviene hacer ceros en la cuarta columna por no tiene}$$

$$\text{ninguna } a. \text{ Así hacemos } F'_2 = F_2 + F_1, F'_3 = F_3 + 2F_1, F'_4 = F_4 - 5F_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ a+1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & -a+2 & -2 & 0 \\ a-5 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$-\begin{vmatrix} a+1 & 0 & -2 \\ 3 & -a+2 & -2 \\ a-5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \text{(desarrollo por los adjuntos de } F_2) \quad -(-$$

$$a+2) \begin{vmatrix} a+1 & -2 \\ a-5 & 2 \end{vmatrix} = (a-2)(4a-8) = 4(a-2)^2, \text{ que se anula para } a=2. \text{ En}$$

consecuencia:

- Si $a \neq 2$, $\text{rg } A^* = 4 > \text{rg } A$: SI.

- Veamos lo que ocurre cuando $\underline{a=2}$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & -13 \end{pmatrix}$. Para estudiar su

rango, orlo desde el menor no nulo que está resaltado.

$$\text{Con } F_3 \text{ y } C_3: \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Con } F_4 \text{ y } C_3: \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -13 \end{vmatrix} = 0$$

Como ambos son nulos. Tenemos que $\text{rg } A=2$, pero de A^* sólo sabemos que su rango no es 4, y desconocemos si vale 2 o 3. Vamos a verlo:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & -2 \\ 2 & 5 & -13 & 5 \end{pmatrix} \text{ Sólo me falta orlar con } F_3 \text{ y } C_4, \text{ y también con } F_4 \text{ y}$$

C_4 :

$$F_3 \text{ y } C_4: \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$F_4 \text{ y } C_4: \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Así pues $\text{rg } A = \text{rg } A^* = 2 < 3 = n^\circ$ incógnitas: SCL, con 1° de libertad. Elimino la 3^a y la 4^a ecuación, y hago $z = \lambda$, quedando el sistema

$$\begin{cases} x + y = 1 + 3\lambda \\ 2x - y = -1 - \lambda \end{cases} \text{ que tiene por solución } \left\{ \left(\frac{1+3\lambda}{-3}, \frac{1}{-3} \right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1+3\lambda}{-3} \right), \lambda \right\}: \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$19. \begin{cases} x + y = 1 \\ ax - y + z = 2 \\ -ax + 2y - 3z = 0 \\ ax - z = 0 \end{cases}$$

Como antes, comenzaremos calculando el determinante de A^* para estudiar su rango.

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ a & -1 & 1 & 2 \\ -a & 2 & -3 & 0 \\ a & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (F'_2 = F_2 + F_1, F'_3 = F_3 - 2F_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ a+1 & 0 & 1 & 3 \\ -a-2 & 0 & -3 & -2 \\ a & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (\text{desarrollo}$$

$$\text{por los adjuntos de } C_2) - \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 3 \\ -a-2 & -3 & -2 \\ a & -1 & 0 \end{vmatrix} = -(-2a + 3a + 6 + 9a - 2a - 2) = -(8a + 4), \text{ que se anula en } a = -0.5.$$

- Si $a \neq -0.5$, será $\text{rg } A^* = 4 > \text{rg } A$: SI

- Veamos el caso $a = -0.5$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -0.5 & -1 & 1 \\ 0.5 & 2 & -3 \\ -0.5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Orlo el menor:

$$\text{Con } F_2 \text{ y } C_1: \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -0.5 & -1 & 1 \\ -0.5 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Con } F_3 \text{ y } C_1: \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0.5 & 2 & -3 \\ -0.5 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Concluimos que $\text{rg } A = 2$. Hay que estudiar el $\text{rg } A^*$, porque sólo sabemos que no es 4, pero desconocemos si vale 2 o 3.

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -0.5 & -1 & 1 & 2 \\ 0.5 & 2 & -3 & 0 \\ -0.5 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ Únicamente nos queda orlar con } F_2 \text{ y } C_4, \text{ y también con } F_3 \text{ y } C_4:$$

$$\text{Con } F_2 \text{ y } C_4: \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0. \text{ No hace falta ya orlar con } F_3 \text{ y } C_4 \text{ porque ya tenemos } \text{rg } A^* = 3 > \text{rg } A = 2: \text{ SI.}$$

Podemos concluir que el sistema no tiene solución para ningún valor de a .

$$20. \begin{cases} x + z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ 3x + ay + 3z = 0 \\ ay - z = 0 \end{cases}$$

$$\text{Como } \text{rg } A = \text{rg } A^*, \text{ sólo tenemos que estudiar el rango de } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & a & 3 \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Orlo con } F_3 \text{ y } C_3: \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & a & 3 \end{vmatrix} = 0 \text{ por tener iguales las columnas } 1^a \text{ y } 3^a.$$

$$\text{Orlo con } F_4 \text{ y } C_3: \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & a & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2a - 2a = -1 \neq 0.$$

Luego, para cualquier valor de a , será $\text{rg } A = \text{rg } A^* = 3 = n^\circ$ de incógnitas: SCD, cuya única solución será, por ser homogéneo, la $(0,0,0)$.