



## UNIDAD DIDÁCTICA 06: DERIVADAS. TÉCNICAS DE DERIVACIÓN

\* Las numeraciones indicadas entre páginas se refieren a las páginas del libro de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II, de segundo de bachillerato de la editorial Anaya, Andalucía, cuyos autores son J. Colera, R. García y M.J.Oliveira

### Página 164

### EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

#### PARA PRACTICAR

#### Definición de derivada

**1** Halla la tasa de variación media (TVM) de las siguientes funciones en los intervalos:  $[-3, -1]$ ;  $[0, 2]$ ;  $[2, 5]$ ;  $[1, 1 + h]$

a)  $f(x) = x^2 + 1$

b)  $f(x) = 7x - 5$

c)  $f(x) = 3$

d)  $f(x) = 2^x$

¿En cuáles de ellas es constante la TVM? ¿Qué tipo de funciones son?

a)  $f(x) = x^2 + 1$

En  $[-3, -1]$  → T.V.M. =  $\frac{f(-1) - f(-3)}{2} = -4$

En  $[0, 2]$  → T.V.M. =  $\frac{f(2) - f(0)}{2} = 2$

En  $[2, 5]$  → T.V.M. =  $\frac{f(5) - f(2)}{3} = 7$

En  $[1, 1 + h]$  → T.V.M. =  $\frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \frac{h^2 + 2h}{h} = -4$

b)  $f(x) = 7x - 5$

En  $[-3, -1]$  → T.V.M. =  $\frac{f(-1) - f(-3)}{2} = 7$

En  $[0, 2]$  → T.V.M. =  $\frac{f(2) - f(0)}{2} = 7$

En  $[2, 5]$  → T.V.M. =  $\frac{f(5) - f(2)}{3} = 7$

En  $[1, 1 + h]$  → T.V.M. =  $\frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \frac{7h}{h} = 7$

c)  $f(x) = 3$

En  $[-3, -1]$  → T.V.M. =  $\frac{f(-1) - f(-3)}{2} = 0$

En  $[0, 2]$  → T.V.M. =  $\frac{f(2) - f(0)}{2} = 0$

En  $[2, 5]$  → T.V.M. =  $\frac{f(5) - f(2)}{3} = 0$



$$\text{En } [1, 1 + h] \quad \rightarrow \quad \text{T.V.M.} = \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = 0$$

$$\text{d) } f(x) = 2^x$$

$$\text{En } [-3, -1] \quad \rightarrow \quad \text{T.V.M.} = \frac{f(-1) - f(-3)}{2} = \frac{3}{16}$$

$$\text{En } [0, 2] \quad \rightarrow \quad \text{T.V.M.} = \frac{f(2) - f(0)}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\text{En } [2, 5] \quad \rightarrow \quad \text{T.V.M.} = \frac{f(5) - f(2)}{3} = \frac{28}{3}$$

$$\text{En } [1, 1 + h] \quad \rightarrow \quad \text{T.V.M.} = \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \frac{2 \cdot (2h^2 - 1)}{h}$$

La función b)  $f(x) = 7x - 5$  es una función afín y la T.V.M. es constante.

La función c)  $f(x) = 3$  es una función afín y la T.V.M. es 0 (constante).

- 2** Halla la T.V.M. de la función  $f(x) = -x^2 + 5x - 3$  en el intervalo  $[2, 2 + h]$  y, con el resultado obtenido, calcula  $f'(2)$ .

$$f(x) = -x^2 + 5x - 3 \quad \text{en } [2, 2 + h]$$

$$\frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \frac{-h^2 + h}{h} = -h + 1$$

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-h + 1) = 1$$

- 3** Utilizando la definición de derivada, calcula  $f'(3)$  en las siguientes funciones:

a)  $f(x) = \frac{3x-2}{2}$     b)  $f(x) = x^2 - 4$     c)  $f(x) = (x-5)^2$     d)  $f(x) = \frac{2+x}{x}$

$$\text{a) } f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3h/7)}{h} = \frac{3}{7}$$

$$\text{b) } f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 6h}{h} = 6$$

$$\text{c) } f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - 4h}{h} = -4$$

$$\text{d) } f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h}{9h + 3h^2} = \frac{-2}{9}$$

- 4** Calcula la función derivada de las siguientes funciones, utilizando la definición:

a)  $f(x) = \frac{5x+1}{2}$     b)  $f(x) = 3x^2 - 1$     c)  $f(x) = \frac{1}{x-2}$     d)  $f(x) = x^2 - x$

$$\text{a) } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{5h}{2}}{h} = \frac{5}{2}$$



$$b) f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h^2 - 6xh}{h} = 6x$$

$$c) f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{(x-2) \cdot (x+h-2) \cdot h} = \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{(x-2) \cdot (x+h-2)} = \frac{-1}{(x-2)^2}$$

$$d) f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2xh - h}{h} = 2x - 1$$

**5** Calcula, aplicando la definición de derivada,  $f'(2)$ ,  $f'(-1)$  y  $f'(x)$ , siendo  $f(x) = \frac{x-1}{x}$ .

$$\bullet f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2+h-1}{2+h} - \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1+h}{2+h} - \frac{1}{2}}{h} = \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2+2h-2-h}{2(2+h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{2(2+h)h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2(2+h)} = \frac{1}{4}$$

$$\bullet f'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-1+h-1}{-1+h} - 2}{h} = \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1+h-1+2-2h}{(-1+h)h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{(-1+h)h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{-1+h} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$\bullet f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x+h-1}{x+h} - \frac{x-1}{x}}{h} = \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2 + xh - x - x^2 + x - xh + h}{(x+h)x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{(x+h)xh} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(x+h)x} = \frac{1}{x^2}$$

**6** Comprueba, utilizando la definición de derivada, que la función  $f(x) = \sqrt{x}$  no tiene derivada en  $x = 0$ .

Intentamos hallar  $f'(0)$  usando la definición de derivada:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h}}{h} = \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = \frac{1}{0} = \pm\infty. \text{ Por tanto, } f(x) = \sqrt{x} \text{ no tiene derivada en } x = 0.$$



- 7** Halla la tasa de variación media de la función  $f(x) = e^x$  en el intervalo  $[2; 2,001]$  y comprueba que su valor está muy próximo a  $e^2$ .

$$\text{T.V.M. } [2; 2,001] = \frac{f(2,001) - f(2)}{2,001 - 2} = \frac{e^{2,001} - e^2}{0,001} \approx 7,3928$$

$e^2 \approx 7,3891$ . Los dos valores están muy próximos.

- 8** Dada  $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < 2 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ , halla  $f'(1)$  y  $f'(3)$  utilizando la definición de derivada.

$$\begin{aligned} \bullet f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[2(1+h) - 3] - (-1)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 + 2h - 3 + 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h-1) - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3+h-1-2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1 \end{aligned}$$

## Reglas de derivación

- 9** Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a)  $y = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 3}$       b)  $y = \frac{x + 1}{(2 - x)^2}$       c)  $y = \frac{3x^2}{x + \sqrt{x}}$       d)  $y = \left(0,5 - \frac{x}{10}\right)^4$

$$\text{a) } y' = \frac{2x \cdot (x^2 + 3) - (x^2 - 3) \cdot 2x}{(x^2 + 3)^2} = \frac{12x}{(x^2 + 3)^2}$$

$$\text{b) } y' = \frac{(2 - x)^2 + (x + 1) \cdot 2(2 - x)}{(2 - x)^4} = \frac{x + 4}{(2 - x)^3}$$

$$\text{c) } y' = \frac{6x \cdot (x + \sqrt{x}) - 3x^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(x + \sqrt{x})^2} = \frac{9x^2 + 6x^2 \cdot \sqrt{x}}{2\sqrt{x} \cdot (x + \sqrt{x})^2}$$

$$\text{d) } y' = \frac{-4}{10} \cdot \left(0,5 - \frac{x}{10}\right)^3 = \frac{-2}{5} \cdot \left(0,5 - \frac{x}{10}\right)^3$$

- 10** Halla la derivada de estas funciones:

a)  $y = \frac{x^3}{(x + 1)^2}$       b)  $y = \left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)^3$       c)  $y = \frac{1}{\text{sen } x}$       d)  $y = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}$

$$\text{a) } y' = \frac{3x^2 \cdot (x + 1)^2 - x^3 \cdot 2 \cdot (x + 1)}{(x + 1)^4} = \frac{x^2 \cdot (x + 3)}{(x + 1)^3}$$

$$\text{b) } y' = 3 \cdot \left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)^2 \cdot \frac{2x \cdot x - (x^2 + 1)}{x^2} = 3 \cdot \left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)^2 \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2}$$



$$c) y' = \frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$d) y' = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

**11 Deriva las funciones siguientes:**

$$a) y = e^{4x}(x-1) \quad b) y = \frac{(1-x)^2}{e^x} \quad c) y = \sqrt{2^x} \quad d) y = \ln(2x-1)$$

$$a) y' = 4 \cdot e^{4x} \cdot (x-1) + e^{4x} \cdot 1 = e^{4x} \cdot (4x-3)$$

$$b) y' = \frac{-2 \cdot (1-x) \cdot e^x - (1-x)^2 \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{-2 \cdot (1-x) - (1-x)^2}{e^x} = \frac{-x^2 + 4x - 3}{e^x}$$

$$c) y' = \frac{2^x \cdot \ln 2}{2\sqrt{2^x}} = \frac{2^{x-1} \cdot \ln 2}{\sqrt{2^x}}$$

$$d) y' = \frac{2}{2x-1}$$

**12 Deriva estas funciones:**

$$a) y = \ln(x^2-1) \quad b) y = \ln \sqrt{1-x} \quad c) y = \frac{\ln x}{e^x} \quad d) y = \operatorname{sen}^2 x^2$$

$$a) y' = \frac{2x}{x^2-1}$$

$$b) y' = \frac{\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1-x}} = \frac{-1}{2(1-x)}$$

$$c) y' = \frac{\frac{1}{x} \cdot e^x - \ln x \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{\frac{1}{x} - \ln x}{e^x} = \frac{1 - x \cdot \ln x}{x \cdot e^x}$$

$$d) y' = 2x \cdot 2 \cdot \operatorname{sen} x^2 \cdot \cos x^2 = 4x \cdot \operatorname{sen} x^2 \cdot \cos x^2$$

**13 Calcula la derivada de estas funciones:**

$$a) y' = 4 \cdot e^{4x} \cdot (x-1) + e^{4x} \cdot 1 = e^{4x} \cdot (4x-3)$$

$$b) y' = \frac{-2 \cdot (1-x) \cdot e^x - (1-x)^2 \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{-2 \cdot (1-x) - (1-x)^2}{e^x} = \frac{-x^2 + 4x - 3}{e^x}$$

$$c) y' = \frac{2^x \cdot \ln 2}{2\sqrt{2^x}} = \frac{2^{x-1} \cdot \ln 2}{\sqrt{2^x}}$$

$$d) y' = \frac{2}{2x-1}$$



**14 Deriva las funciones siguientes:**

a)  $y = \log_2 \frac{1}{x}$       b)  $y = \sqrt[3]{\operatorname{sen} x^2}$       c)  $y = \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$       d)  $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$

a)  $y = \log_2 1 - \log_2 x$

$$y' = -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln 2}$$

b)  $y' = \frac{2x \cdot \cos x^2}{3\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x^2}}$

c)  $y' = \frac{2 \cdot (1-2x) + (1+2x) \cdot 2}{(1-2x)^2} = \frac{4}{(1-2x)^2} =$   
$$= \frac{2 \cdot \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}}{2 \cdot \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}} =$$

$$= \frac{2}{(1-2x)^2 \cdot \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}} = \frac{2}{\sqrt{(1-2x)^3(1+2x)}}$$

d)  $y' = \frac{1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2 \cdot \sqrt{x + \sqrt{x}}} = \frac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x}}} = \frac{2\sqrt{x} + 1}{4 \cdot \sqrt{x^2 + x\sqrt{x}}}$

**15 Halla la derivada de:**

a)  $y = \sqrt{x} \sqrt{x}$

b)  $y = \ln \sqrt{\frac{x}{x+1}}$

c)  $y = \ln(\operatorname{sen} \sqrt{e^x})$

d)  $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

a)  $y = \sqrt[4]{x^3} \rightarrow y' = \frac{3}{4 \cdot \sqrt[4]{x}}$

b)  $y = \frac{1}{2} \cdot (\ln x - \ln(x+1))$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{1}{2x^2 + 2x}$$

c)  $y' = \frac{e^{x/2} \cdot \cos \sqrt{e^x}}{2 \cdot \operatorname{sen} \sqrt{e^x}}$

d)  $y' = \frac{\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}}{2 \cdot \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} = \frac{1}{\sqrt{(x-1) \cdot (x+1)^3}}$



## Continuidad y derivabilidad

**16** Estudia la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones en los puntos que se indican, y represéntalas:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + x & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{en } x = 1 \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{en } x = 0$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 3 \\ x^2 - 4 & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \quad \text{en } x = 3 \quad \text{d) } f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x \leq 2 \\ 3x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad \text{en } x = 2$$

a) Continuidad en  $x = 1$ :

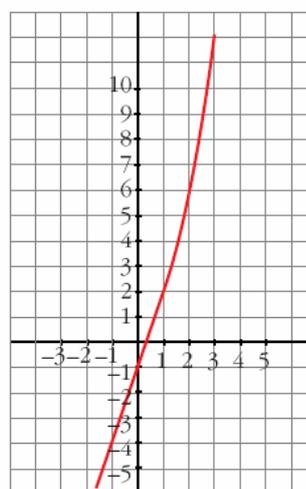
$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x - 1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + x) = 2 \\ f(1) &= 2 \end{aligned} \right\} f(x) \text{ es continua en } x = 1.$$

Derivabilidad en  $x = 1$ :

$$f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} f'(1^-) &= 3 \\ f'(1^+) &= 3 \end{aligned} \right\} f(x) \text{ es derivable en } x = 1 \text{ y } f'(1) = 3.$$

Gráfico:



b) Continuidad en  $x = 0$ :

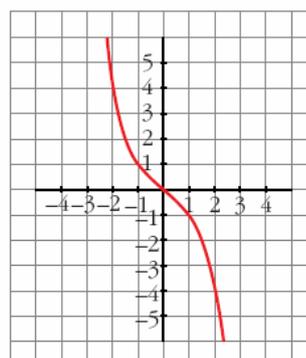
$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0 \\ f(0) &= 0 \end{aligned} \right\} f(x) \text{ es continua en } x = 0.$$

Derivabilidad en  $x = 0$ :

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= 0 \\ f'(0^+) &= 0 \end{aligned} \right\} f(x) \text{ es derivable en } x = 0 \text{ y } f'(0) = 0.$$

Gráfico:

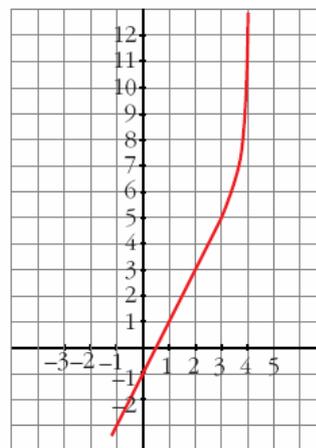




c) Continuidad en  $x = 3$ :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} (2x - 1) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 4) = 5 \\ f(3) &= 5 \end{aligned} \right\} f(x) \text{ es continua en } x = 3.$$

Gráfico:



Derivabilidad en  $x = 3$ :

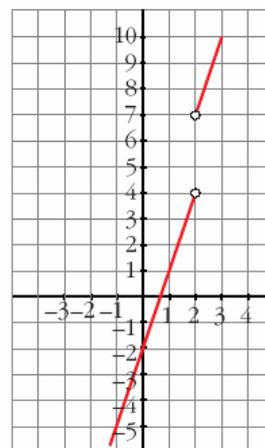
$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 3 \\ 2x & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} f'(3^-) &= 2 \\ f'(3^+) &= 6 \end{aligned} \right\} f(x) \text{ no es derivable en } x = 3.$$

d) Continuidad en  $x = 2$ :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x - 2) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (3x + 1) = 7 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} f(x) \text{ no es continua} \\ \text{en } x = 2 \\ \text{(tiene una discontinuidad de salto finito).} \end{aligned}$$

Gráfico:



Derivabilidad en  $x = 2$ :

Como  $f(x)$  no es continua en  $x = 2$ , tampoco es derivable en ese punto.

17 Comprueba que  $f(x)$  es continua, pero no derivable, en  $x = 2$ :

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x - 1) & \text{si } x < 2 \\ 3x - 6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Continuidad en  $x = 2$ :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \ln(x - 1) = \ln 1 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (3x - 6) = 0 \\ f(2) &= 0 \end{aligned} \right\} f(x) \text{ es continua en } x = 2.$$



**Derivabilidad en  $x = 2$ :**

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si } x < 2 \\ 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(2^-) = 1 \\ f'(2^+) = 3 \end{array} \right\} \text{ Como las derivadas laterales no coinciden,} \\ f(x) \text{ no es derivable en } x = 2.$$

18

S

**Estudia la continuidad y derivabilidad de esta función:**

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

**Continuidad:**

- Si  $x \neq 0$  y  $x \neq 1 \rightarrow$  Es continua, pues está formada por funciones continuas.
- En  $x = 0$ :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0 \\ f(0) = 0 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0). \text{ Por tanto, la función es continua} \\ \text{en } x = 0.$$

- En  $x = 1$ :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1 \\ f(1) = 1 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1). \text{ Por tanto, la función es continua} \\ \text{en } x = 1.$$

La función es continua en  $\mathbb{R}$ .

**Derivabilidad:**

- Si  $x \neq 0$  y  $x \neq 1 \rightarrow$  La función es derivable. Su derivada es, en esos puntos:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- En  $x = 0$ :

$$f'(0^-) = 0 = f'(0^+). \text{ Por tanto, } f(x) \text{ es derivable en } x = 0; \text{ y } f'(0) = 0.$$

- En  $x = 1$ :

$$f'(1^-) = 2 \neq f'(1^+) = 1. \text{ Por tanto, } f(x) \text{ no es derivable en } x = 1.$$



La función es derivable en  $\mathbb{R} - \{1\}$ . Su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

**19 Prueba que la función  $f(x) = |x + 1|$  no es derivable en  $x = -1$ .**

**Continuidad en  $x = -1$ :**

$$f(x) = |x + 1| = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ x + 1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

$f(x)$  es una función continua, pues es la composición de dos funciones continuas. Su derivada, si  $x \neq -1$ , es:

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -1 \\ 1 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

Las derivadas laterales en  $x = -1$  son:

$$\left. \begin{array}{l} f'(-1^-) = -1 \\ f'(-1^+) = 1 \end{array} \right\} \text{ No coinciden; por tanto, } f(x) \text{ no es derivable en } x = -1.$$

**20 Estudia la continuidad y derivabilidad de la siguiente función:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

**Continuidad:**

**Si  $x \neq 1$**   $\rightarrow f(x)$  es continua, pues está formada por polinomios, que son funciones continuas.

$$\left. \begin{array}{l} \text{En } x = 1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) = 0 \\ f(1) = 0 \end{array} \right\} f(x) \text{ es continua en } x = 1.$$

Por tanto,  $f(x)$  es una función continua.

**Derivabilidad:**

**Si  $x \neq 1$ :**  $f(x)$  es derivable y su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

**En  $x = 1$ :** Hallamos las derivadas laterales:

$$\left. \begin{array}{l} f'(1^-) = 2 \\ f'(1^+) = 1 \end{array} \right\} \text{ No coinciden, luego, } f(x) \text{ no es derivable en } x = 1.$$



**21 Estudia la continuidad y derivabilidad de esta función:**

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

**Continuidad:**

**Si  $x \neq 0$ :**  $f(x)$  es continua, pues está formada por funciones continuas.

**En  $x = 0$ :**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - x) = 1 \\ f(0) = 1 \end{array} \right\} f(x) \text{ es continua en } x = 0.$$

Por tanto,  $f(x)$  es una función continua.

**Derivabilidad:**

**Si  $x \neq 0$ :**  $f(x)$  es derivable y su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

**En  $x = 0$ :** Hallamos las derivadas laterales:

$$\left. \begin{array}{l} f'(-0^-) = -1 \\ f'(-0^+) = -1 \end{array} \right\} \text{Coinciden, luego, } f(x) \text{ es derivable en } x = 0.$$

Por tanto,  $f(x)$  es una función derivable.

**22 ¿En qué puntos no es derivable la función  $f(x) = |x^2 - 4|$ ?**

$f(x)$  es una función continua, pues es la composición de funciones continuas. La definimos a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 4 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

**Si  $x \neq -2$  y  $x \neq 2$ ,**  $f(x)$  es derivable y su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < -2 \\ -2x & \text{si } -2 < x < 2 \\ 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

**En  $x = -2$ :** Hallamos las derivadas laterales:

$$\left. \begin{array}{l} f'(-2^-) = -4 \\ f'(-2^+) = 4 \end{array} \right\} f(x) \text{ no es derivable en } x = -2.$$



**En  $x = 2$ :** Hallamos las derivadas laterales:

$$\left. \begin{array}{l} f'(2^-) = -4 \\ f'(2^+) = 4 \end{array} \right\} f(x) \text{ no es derivable en } x = -2.$$

Por tanto,  $f'(x)$  no es derivable en los puntos  $(-2, 0)$  y  $(2, 0)$ .

## PARA RESOLVER

**23** Dada  $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$  :

a) Calcula  $f'(1)$  y  $f'(3)$ .

b) Comprueba que  $f'(2^-) \neq f'(2^+)$ .

**Si  $x \neq -2$ :**  $f'(x)$  es una función continua, pues está formada por polinomios, que son funciones continuas.

$$\left. \begin{array}{l} \text{En } x = 2: \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x - 1) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + 1) = 5 \\ f(2) = 5 \end{array} \right\} f(x) \text{ es continua en } x = 2.$$

Por tanto,  $f(x)$  es una función continua.

**Si  $x \neq 2$ :**  $f(x)$  es derivable y su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 2 \\ 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a)  $f'(1) = 3$ ;  $f'(3) = 6$

b)  $\left. \begin{array}{l} f'(2^-) = 3 \\ f'(2^+) = 4 \end{array} \right\}$  no coinciden

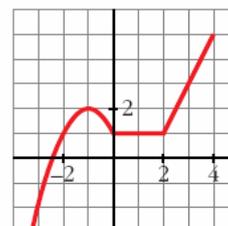
**24** Esta es la gráfica de una función  $y = f(x)$ . Observándola, di el valor de:

$$f'(-1), f'(1) \text{ y } f'(3)$$

¿En qué puntos no es derivable?

$f'(-1) = 0$ ;  $f'(1) = 0$ ;  $f'(3) = 2$

No es derivable en  $x = 0$  ni en  $x = 2$ .





**25** ¿Cuántos puntos hay en esta función que no tengan derivada?

$$y = |x^2 + 6x + 8|$$

$$x^2 + 6x + 8 = 0 \rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-6 \pm 2}{2} = \begin{cases} x = -2 \\ x = -4 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} x^2 + 6x + 8 & \text{si } x < -4 \\ -x^2 - 6x - 8 & \text{si } -4 \leq x \leq -2 \\ x^2 + 6x + 8 & \text{si } x > -2 \end{cases} \quad y' = \begin{cases} 2x + 6 & \text{si } x < -4 \\ -2x - 6 & \text{si } -4 < x < -2 \\ 2x + 6 & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

La función es continua, pues es el valor absoluto de una función continua.

$$\text{En } x = -4 \rightarrow y'(-4^-) = -2 \neq y'(-4^+) = 2$$

$$\text{En } x = -2 \rightarrow y'(-2^-) = -2 \neq y'(-2^+) = 2$$

La función no es derivable en  $x = -4$  ni en  $x = -2$ ; es decir, en  $(-4, 0)$  y en  $(-2, 0)$ . Son dos puntos "angulosos".

**26** Calcula  $a$  y  $b$  para que la siguiente función sea derivable en todo  $\mathbb{R}$ :

S

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1x & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - bx - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Para que sea derivable, en primer lugar, ha de ser continua.

- Si  $x \neq 2 \rightarrow$  La función es continua, pues está formada por dos polinomios.
- En  $x = 2$ :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} (ax^2 + 3x) = 4a + 6 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - bx - 4) = -2b \\ f(2) &= 4a + 6 \end{aligned} \right\}$$

Para que sea continua, ha de ser  $4a + 6 = -2b$ , es decir,  $2a + 3 = b$ , o bien  $b = -2a - 3$ .

**Derivabilidad:**

Si  $x \neq 2 \rightarrow$  la función es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + 3 & \text{si } x < 2 \\ 2x - b & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

En  $x = 2$ :

$$\left. \begin{aligned} f'(2^-) &= 4a + 3 \\ f'(2^+) &= 4 - b \end{aligned} \right\} \text{ Para que sea derivable ha de ser } 4a + 3 = 4 - b, \text{ es decir, } b = -4a + 1.$$

Teniendo en cuenta las dos condiciones obtenidas:

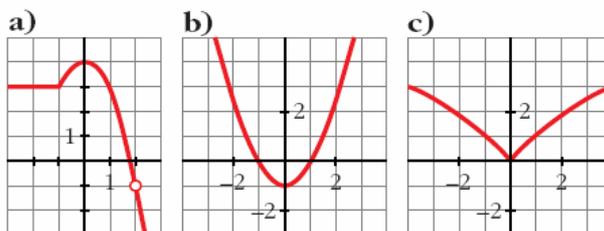
$$\left. \begin{aligned} f'(2^-) &= 4a + 3 \\ f'(2^+) &= 4 - b \end{aligned} \right\}$$

Por tanto, para que  $f'(x)$  sea derivable en todo  $\mathbb{R}$ , ha de ser  $a = 2$  y  $b = -7$ .



**27** Observa las gráficas de las siguientes funciones e indica en qué puntos no son derivables.

¿Alguna de ellas es derivable en todo  $\mathbb{R}$ ?



a) No es derivable en  $x = -1$  (tiene un punto “anguloso”) ni en  $x = 2$  (no está definida la función).

b) Es derivable en todo  $\mathbb{R}$

c) No es derivable en  $x = 0$  (tiene un punto “anguloso”).

**28** La función  $f(x)$  está definida por:  $f(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{si } x \leq 0 \\ ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Calcula  $a$  y  $b$  para que  $f$  sea continua y derivable.

**Continuidad:**

- En  $x \neq 0 \rightarrow$  La función es continua, pues está formada por dos polinomios.
- En  $x = 0$ :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^3 - x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax + b) = b \\ f(0) = 0 \end{array} \right\} \text{Para que sea continua ha de ser } b = 0$$

**Derivabilidad:**

Si  $x \neq 0$ :  $\rightarrow$  La función es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

En  $x = 0$ :

$$\left. \begin{array}{l} f'(-0^-) = -1 \\ f'(-0^+) = a \end{array} \right\} \text{Para que sea derivable, ha de ser } a = -1.$$

Por tanto,  $f'(x)$  será continua y derivable si  $a = -1$  y  $b = 0$ .

**29** La función  $f(x)$  está definida de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ 1, & 0 < x < 3 \\ -x^2 + 3x + 2, & x \geq 3 \end{cases}$$

Estudia su continuidad y derivabilidad.

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ 1, & 0 < x < 3 \\ -x^2 + 3x + 2, & x > 1 \end{cases}$$



**Continuidad:**

Si  $x \neq 0$  y  $x \neq 3 \rightarrow$  Es continua, pues está formada por funciones continuas.

En  $x = 0$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1 \\ f(0) = 1 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0). \text{ La función es continua en } x = 0.$$

En  $x = 3$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (-x^2 + 3x + 2) = 2 \\ f(3) = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \neq f(0). \\ \text{No es continua en } x = 3. \end{array}$$

La función es continua en  $\mathbb{R} - \{3\}$ .

**Derivabilidad:**

Si  $x \neq 0$  y  $x \neq 3$ . Es derivable y:

$$f'(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ 1, & 0 < x < 3 \\ -2x + 3, & x > 3 \end{cases}$$

En  $x = 0$

$$f'(0^-) = 1 \neq f'(0^+) = 0 \rightarrow \text{No es derivable en } x = 0.$$

En  $x = 3 \rightarrow$  No es derivable pues no es continua.

La función es derivable en  $\mathbb{R} - \{0, 3\}$ .

## Página 166

**30** Averigua para qué valores de  $x$  es  $f'(x) = 0$  en cada una de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = \frac{x^2(3x - 8)}{12}$

b)  $f(x) = x^4 + 2x^2$

c)  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

d)  $f(x) = e^x(x - 1)$

a)  $f(x) = \frac{3x^3 - 8x^2}{12} \rightarrow f'(x) = \frac{9x^2 - 16x}{12}$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 9x^2 - 16x = 0 \rightarrow x(9x - 16) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{16}{9} \end{cases}$$

b)  $f'(x) = 4x^3 + 4x = 4x(x^2 + 1)$



$$f'(x) = 0 \rightarrow 4x(x^2 + 1) = 0 \rightarrow x = 0$$

$$c) f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0$$

$$d) f'(x) = e^x(x - 1) + e^x \cdot 1 = e^x(x - 1 + 1) = e^x x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$$

**31** Halla los puntos en los que la pendiente de la recta tangente es igual a 0 en cada una de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \quad b) f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1} \quad c) f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{2 - x} \quad d) f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

Debemos hallar los puntos en los que  $f'(x) = 0$  en cada caso:

$$a) f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - (x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -4x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow y = -1 \quad \text{Punto } (0, -1)$$

$$b) f'(x) = \frac{3x^2(x^2 - 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^4 - 3x^2 = 0 \rightarrow x^2(x^2 - 3) = 0$$

$$x = 0 \rightarrow (0, 0)$$

$$x^2 - 3 = 0 \begin{cases} x = -\sqrt{3} \rightarrow \left(-\sqrt{3}, \frac{-3\sqrt{3}}{2}\right) \\ x = \sqrt{3} \rightarrow \left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases}$$

$$c) f'(x) = \frac{(4x - 3)(2 - x) - (2x^2 - 3x) \cdot (-1)}{(2 - x)^2} = \frac{8x - 4x^2 - 6 + 3x + 2x^2 - 3x}{(2 - x)^2} = \frac{-2x^2 + 8x - 6}{(2 - x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -2x^2 + 8x - 6 = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} x = 1 \rightarrow (1, -1) \\ x = 3 \rightarrow (3, -9) \end{cases}$$

$$d) f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2 + 1) \cdot 1}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \begin{cases} x = -1 \rightarrow (-1, -2) \\ x = 1 \rightarrow (1, 2) \end{cases}$$

**32** Averigua si en las siguientes funciones existen puntos en los que  $f'(x) = 0$ :

$$a) f(x) = \frac{2x - 3}{x + 1} \quad b) f(x) = \frac{6x}{x^2 + 1} \quad c) f(x) = \ln(x + 1) \quad d) f(x) = 10 - (x - 2)^4$$

$$a) f'(x) = \frac{2(x + 1) - (2x - 3) \cdot 1}{(x + 1)^2} = \frac{2x + 2 - 2x + 3}{(x + 1)^2} = \frac{5}{(x + 1)^2}$$



$f'(x) \neq 0$  para cualquier valor de  $x$ .

$$b) f'(x) = \frac{6(x^2 + 1) - 6x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{6x^2 + 6 - 12x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-6x^2 + 6}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -6x^2 + 6 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \begin{cases} x = -1 \rightarrow (-1, -3) \\ x = 1 \rightarrow (1, 3) \end{cases}$$

c)  $f'(x) = \frac{1}{x+1} \neq 0$  para cualquier valor de  $x$ .

d)  $f'(x) = -4(x-2)^3$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow (2, 10)$$

**33 Las siguientes funciones tienen algún punto donde la derivada no existe. Hállalos en cada caso:**

a)  $f(x) = \sqrt[3]{x}$

b)  $f(x) = \sqrt{x+2}$

c)  $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

d)  $f(x) = |x-3|$

e)  $f(x) = \left| \frac{4x-5}{2} \right|$

f)  $f(x) = |x^2-2x|$

a)  $f(x) = x^{1/3} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$f'(x)$  no existe si  $x = 0$ ; es decir,  $f(x)$  no es derivable en  $x = 0$ .

b)  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$

$f'(x)$  no existe si  $x = -2$ ; el dominio de  $f(x)$  es  $[-2, +\infty)$ .

Por tanto, en los puntos en los que la función está definida, no es derivable en  $x = -2$ .

c) El dominio de la función es  $[-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$ .

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

En los puntos en los que  $f(x)$  está definida, no es derivable en  $x = -1$  ni en  $x = 1$ .

d)  $f(x) = \begin{cases} -x+3 & \text{si } x < 3 \\ x-3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}; f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 3 \\ 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

$f(x)$  es continua en  $\mathbb{R}$ ; pero no es derivable en  $x = 3$ , pues sus derivadas laterales no coinciden:

$$\left. \begin{array}{l} f'(3^-) = -1 \\ f'(3^+) = 1 \end{array} \right\} \text{ Son distintas.}$$

$$e) f(x) = \begin{cases} \frac{-4x+5}{2} & \text{si } x < \frac{5}{4} \\ \frac{4x-5}{2} & \text{si } x \geq \frac{5}{4} \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 5/4 \\ 2 & \text{si } x > 5/4 \end{cases}$$

$f(x)$  es continuo en  $\mathbb{R}$ ; pero no es derivable en  $x = \frac{5}{4}$ , pues sus derivadas laterales no coinciden:



$$\left. \begin{array}{l} f'(5/4^-) = -2 \\ f'(5/4^+) = 2 \end{array} \right\} \text{ Son distintas}$$

$$f) f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x < 0 \\ -x^2 + 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 2x & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si } x < 0 \\ -2x + 2 & \text{si } 0 < x < 2 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

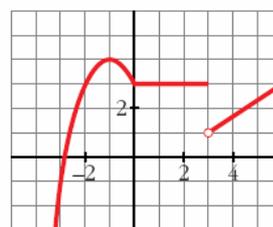
$f(x)$  es continuo en  $\mathbb{R}$ ; pero no es derivable en  $x = 0$  ni en  $x = 2$ , pues sus derivadas laterales no coinciden:

$$\left. \begin{array}{l} f'(0^-) = -2 \\ f'(0^+) = 2 \end{array} \right\} \text{ Son distintas} \quad \left. \begin{array}{l} f'(2^-) = -2 \\ f'(2^+) = 2 \end{array} \right\} \text{ Son distintas}$$

- 34** Esta es la gráfica de una función  $y = f(x)$ . Estudia su continuidad y derivabilidad.

$f(x)$  es continua en  $\mathbb{R} - \{3\}$ . En  $x = 3$  presenta una discontinuidad de salto finito.

$f(x)$  es derivable en  $\mathbb{R} - \{0, 3\}$ . En  $x = 0$  hay un punto anguloso (las derivadas laterales no coinciden) y en  $x = 3$  no es continua, por tanto, no puede ser derivable.



- 35** Considera la función:  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + m & \text{si } x \leq 1 \\ -x^2 + nx & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Calcula  $m$  y  $n$  para que  $f$  sea derivable en todo  $\mathbb{R}$ .

**Continuidad:**

- Si  $x \neq 1$ :  $f(x)$  es continua, pues está formada por polinomios, que son funciones continuas.

- En  $x = 1$ :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 5x + m) = -4 + m \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x^2 + nx) = -1 + n \\ f(1) = -4 + m \end{array} \right\}$$

Para que  $f(x)$  sea continua en  $x = 1$ , ha de ser  $-4 + m = -1 + n$ .

**Derivabilidad:**

- Si  $x \neq 1$ :  $f(x)$  es derivable y su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x < 1 \\ -2x + n & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- En  $x = 1$ : Para que  $f(x)$  sea derivable en  $x = 1$ , las derivadas laterales han de coincidir, es decir:

$$\left. \begin{array}{l} f'(1^-) = -3 \\ f'(1^+) = -2 + n \end{array} \right\} -3 = -2 + n$$



Uniendo las dos condiciones anteriores tenemos que:

$$\left. \begin{array}{l} -4 + m = -1 + n \\ -3 = -2 + n \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} m = n + 3 \\ n = -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} m = 2 \\ n = -1 \end{array}$$

**36 Estudia la continuidad y derivabilidad de esta función:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

¿Existe algún punto en el que  $f'(x) = 0$ ? Representala gráficamente.

**Continuidad:**

- **En  $x \neq 1$ :** La función es continua, pues está formada por dos polinomios.
- **En  $x = 1$ :**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x - 1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2 \\ f(1) = 2 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1). \text{ Por tanto, la función es continua en } x = 1.$$

La función es continua en todo  $\mathbb{R}$ .

**Derivabilidad:**

- **Si  $x \neq 1$ :** La función es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- **En  $x = 1$ :**

$$f'(1^-) = 4 \neq f'(1^+) = 1$$

La función no es derivable en  $x = 1$ .

Por tanto, la función es derivable en  $\mathbb{R} - \{1\}$ .

**Puntos en los que  $f'(x) = 0$ :**

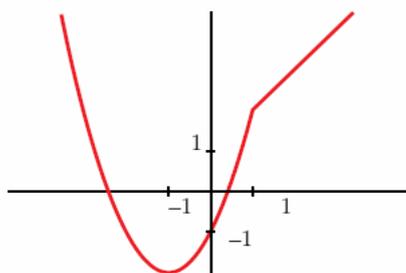
$$f'(x) = 2x + 2 \text{ si } x < 1$$

$$2x + 2 = 0 \rightarrow x = -1$$

$$f'(x) = 1 \text{ si } x > 1 \rightarrow f'(x) \neq 0 \text{ si } x > 1$$

Por tanto, la derivada se anula en  $x = -1$ .

**Gráfica de  $f(x)$ :**





**37** Halla  $a$  y  $b$  para que la función  $f(x)$  sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x < -1 \\ ax + b & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 3x^2 + 2 & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$$

Para los valores de  $a$  y  $b$  obtenidos, estudia la derivabilidad de  $f$ .

• **Si  $x \neq -1$  y  $x \neq 0$ :** La función es continua, pues está formada por polinomios.

• **En  $x = -1$ :**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (2x + a) = -2 + a \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (ax + b) = -a + b \\ f(-1) = -a + b \end{array} \right\} \text{Para que sea continua, ha de ser } -2 + a = -a + b, \text{ es decir: } b = 2a - 2.$$

• **En  $x = 0$ :**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (ax + b) = b \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x^2 + 2) = 2 \\ f(0) = 2 \end{array} \right\} \text{Para que sea continua, ha de ser } b = 2.$$

Por tanto,  $f(x)$  será continua si  $a = 2$  y  $b = 2$ .

Para estos valores, queda:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 2 & \text{si } -1 \leq x < 0; \text{ es decir:} \\ 3x^2 + 2 & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

**Derivabilidad:**

• **Si  $x \neq 0$ :** Es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 0 \\ 6x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

• **En  $x = 0$ :**

$$f'(0^-) = 2 \neq f'(0^+) = 0$$

La función no es derivable en  $x = 0$ .

Por tanto, es derivable en  $\mathbb{R} - \{0\}$ .

**38** Calcula  $f'(0)$ , siendo  $f(x) = \ln \sqrt{\frac{e^x + e^{-x}}{2x + 1}}$ .

• **Aplica las propiedades de los logaritmos antes de derivar.**

Hallamos  $f'(x)$  y después sustituimos en  $x = 0$ .



$$f(x) = \frac{1}{2} [\ln(e^x + e^{-x}) - \ln(2x + 1)]$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left[ \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} - \frac{2}{2x + 1} \right]$$

$$f'(0) = \frac{1}{2} = (-2) = -1$$

**39** Halla la pendiente de la recta tangente a las siguientes curvas en los puntos indicados:

a)  $y = \operatorname{sen} x \cos x$  en  $x = \frac{\pi}{4}$

b)  $y = x \ln x$  en  $x = e$

c)  $y = \frac{x^2}{e^x}$  en  $x = 0$  y  $x = 1$

d)  $y = e^{x^2-1}$  en  $x = 1$

Debemos hallar la derivada en los puntos indicados en cada caso:

a)  $y' = \cos x \cdot \cos x + \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

$$y' = \left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0$$

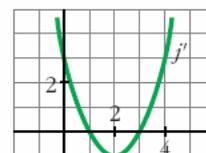
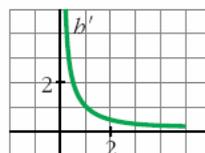
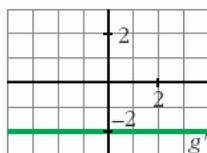
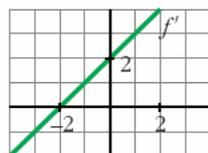
b)  $y' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$ ;  $y'(e) = \ln e + 1 = 1 + 1 = 2$

c)  $y' = \frac{2x e^x - x^2 \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(2x - x^2)}{(e^x)^2} = \frac{2x - x^2}{e^x}$

$$y'(0) = 0; \quad y'(1) = \frac{1}{e}$$

d)  $y' = 2x e^{x^2-1}$ ;  $y' = (1) = 2$

**40** Estas gráficas representan las funciones derivadas de las funciones  $f$ ,  $g$ ,  $b$  y  $j$ :



- a) ¿Cuáles de estas funciones tienen puntos de tangente horizontal?  
 b) ¿Cuál de estas gráficas es la función derivada de una función polinómica de primer grado?  
 c) ¿Cuál de ellas corresponde a una función polinómica de segundo grado?

a) Los puntos de tangente horizontal son los puntos en los que se anula la derivada.

$f$  tiene un punto de tangente horizontal en  $x = -2$ , pues  $f'(-2) = 0$ .

$j$  tiene dos puntos de tangente horizontal en  $x = 1$  y en  $x = 3$ , pues  $j'(1) = j'(3) = 0$ .

$g$  y  $b$  no tienen ningún punto de tangente horizontal.

b) La derivada de una función polinómica de primer grado es una función constante. Por tanto, es  $g'$ .

c) La derivada de una función polinómica de segundo grado es una función polinómica de primer grado. Por tanto, es  $f'$ .