A031009 nombre:

---

1. Hallar la matriz X que verifica $BX = A$, siendo

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN:

La matriz X debe ser de orden 3×1. La ecuación puede entonces escribirse:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Esta ecuación es equivalente al sistema:

$$\begin{cases} 3x + z & = & 1 \\ x + 2z & = & -2 \\ y & = & 4 \end{cases}$$

cuyas soluciones son: $x = \frac{4}{5}$, $y = 4$, $z = -\frac{7}{5}$.

2. Obtener el rango de la siguiente matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 7 & -1 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 6 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

3. Hallar los valores de a y b en la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, de forma que $A^2 - 2A = B$ siendo $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

SOLUCIÓN:

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

Por consiguiente:

$$\begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde resulta el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a^{-}2a & = & 0 \\ 2ab - 2b & = & 1 \\ a^2 - 2a & = & 0 \end{array} \right.$$

que tiene como soluciones $a = 0$, $b = -\frac{1}{2}$ y $a = 2$, $b = \frac{1}{2}$

4. Resolver el siguiente sistema matricial:

$$3X - 2Y = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix} \qquad 2X + Y = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN:

El sistema puede escribirse:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3X - 2Y & = & A \\ 2X + Y & = & B \end{array} \right.$$

resolviendo por reducción:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3X - 2Y & = & A \\ 4X + 2Y & = & 2B \end{array} \right. \Longrightarrow 7X = A + 2B \Rightarrow X = \frac{1}{7}(A + 2B)$$

haciendo operaciones resulta:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & \frac{6}{7} & 0 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{23}{7} & -2 \end{pmatrix}$$

5. *a*) Calcula el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

b) Resuelve la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 2 \\ 2 & x & 0 \\ 1 & x & x \end{vmatrix} = 0$$

SOLUCIÓN:

a)

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -7$$

b)

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 2 \\ 2 & x & 0 \\ 1 & x & x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 0 & 2 \\ 2 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x \begin{vmatrix} x & 2 \\ 1 & x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x(x^2-2) = 0$$

ecuación que tiene como soluciones $x = 0$, $x = \sqrt{2}$, $x = -\sqrt{2}$

1. Resolver el siguiente sistema matricial:

$$3X-2Y=\begin{pmatrix}0&5&-4\\5&9&0\\15&-4&4\end{pmatrix}\qquad 2X+Y=\begin{pmatrix}7&1&2\\-6&6&7\\10&5&-2\end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN:

El sistema puede escribirse:

$$\left\{\begin{array}{rcl}3X-2Y&=&A\\2X+Y&=&B\end{array}\right.$$

resolviendo por reducción:

$$\left\{\begin{array}{rcl}3X-2Y&=&A\\4X+2Y&=&2B\end{array}\right.\Longrightarrow 7X=A+2B\Rightarrow X=\frac{1}{7}(A+2B)$$

haciendo operaciones resulta:

$$X=\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&3&2\\5&\frac{6}{7}&0\end{pmatrix}\qquad X=\begin{pmatrix}3&-1&2\\-4&0&3\\0&\frac{23}{7}&-2\end{pmatrix}$$

2. *a*) Calcula el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix}-2&1&-2\\0&2&3\\4&-2&1\end{vmatrix}$$

b) Resuelve la ecuación:

$$\begin{vmatrix}t&2&2\\2&t&0\\1&t&t\end{vmatrix}=0$$

SOLUCIÓN:

a)

$$\begin{vmatrix}-2&1&-2\\0&2&3\\4&-2&1\end{vmatrix}=-4+12+0-(-16)-12-0=12$$

b)

$$\begin{vmatrix}t&2&2\\2&t&0\\1&t&t\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}t&0&2\\2&t&0\\1&0&t\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow t\begin{vmatrix}t&2\\1&t\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow t(t^2-2)=0$$

ecuación que tiene como soluciones $t=0$, $t=\sqrt{2}$, $t=-\sqrt{2}$

3. Si I es la matriz unidad de orden 2 y $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, hallar el valor que deben tener x e y para que se cumpla $A^2 - xA - yI = 0$.

SOLUCIÓN:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$$

La ecuación matricial puede escribirse:

$$\begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -6 & -5 \end{pmatrix} - x\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - y\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Esta ecuación matricial equivale al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -2-2x-y & = & 0 \\ 9-3x & = & 0 \\ -6-2x & = & 0 \\ -5-x-y & = & 0 \end{array} \right.$$

de la segunda y tercera ecuación resulta que $x = 3$ y sustituyendo en las otras dos se obtiene que $y = -8$

4. Calcular el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & -2 \\ 1 & -7 & 1 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN:

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 4 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & -2 \\ 1 & 7 & -1 \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 4 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

5. Halla la matriz X que verifica $AX + B = 0$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN:

La ecuación puede escribirse:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Esta ecuación equivale al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y + z & = & -3 \\ 2x + 4y + 3z & = & 2 \\ 3x + 5y + 2z & = & -1 \end{array} \right.$$

Este sistema puede resolverse despejando x en la primera ecuación:

$$x = -3 - 2y - z$$

y sustituyendo en la segunda y la tercera:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -6 - 4y - 2z + 4y + 3z & = & 2 \\ -9 - 6y - 3z + 5y + 2z & = & -1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} z & = & 8 \\ -y - z & = & 8 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} z & = & 8 \\ y & = & -16 \end{array} \right.$$

y sustituyendo en $x = -3 - 2y - z$ resulta $x = 21$.

A031016 nombre:

---

1. Calcular el siguiente determinante:
$$\begin{vmatrix} 7 & 0 & -3 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 9 \end{vmatrix}$$

2. Calcular el rango de la siguiente matriz:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 3 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

3. Calcular la inversa de las siguientes matrices:
   a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$
   b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

4. Definir:
   a) Matriz simétrica
   b) Matriz inversa
   c) Fila combinación lineal de otras
   d) Filas linealmente dependientes
   e) Rango de una matriz

---

1. Calcular el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

2. Calcular el rango de la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 3 & 12 & 8 \\ 12 & 10 & 6 & 23 & 16 \end{pmatrix}$$

3. Calcular la inversa de las siguientes matrices:

   a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

   b) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

4. Definir:

   a) Fila combinación lineal de otras

   b) Filas linealmente dependientes

   c) Rango de una matriz

   d) Matriz simétrica

   e) Matriz inversa

1. Resolver el siguiente sistema:
$$\left\{\begin{array}{rcl} x-3y+5z &=& -24 \\ 2x-y+4z &=& -8 \\ x+y &=& 9 \end{array}\right.$$

SOLUCIÓN:

El sistema es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer se obtiene $x=7$, $y=2$, $z=-5$

2. Resolver el siguiente sistema:
$$\left\{\begin{array}{rcl} x-y+3z &=& 1 \\ 3x-y+2z &=& 3 \\ -2y+7z &=& 0 \end{array}\right.$$

SOLUCIÓN:

El sistema es compatible indeterminado. Podemos quedarnos con las dos primeras ecuaciones y tomar $z=\lambda$ como parámetro. Así, se obtiene:
$$\left\{\begin{array}{rcl} z-y &=& 1-3\lambda \\ 3x-y &=& 3-2\lambda \end{array}\right.$$

Resolviendo por la regla de Cramer la solución es
$$\left(\frac{2+\lambda}{2}\,,\,\frac{7\lambda}{2}\,,\,\lambda\right)$$

3. Resolver:
$$\left\{\begin{array}{rcl} x+11y-4z &=& 0 \\ -2x+4y+z &=& 0 \\ x+y-2z &=& 0 \\ 2x-16y+5z &=& 0 \end{array}\right.$$

SOLUCIÓN:

El rango de la matriz de coeficientes es tres, el sistema es compatible determinado y sólo admite la solución trivial $(0,0,0)$.

4. Discutir el siguiente sistema según los valores del parámetro m:
$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& m-1 \\ 2x+y+mz &=& m \\ x+my+z &=& 1 \end{array}\right.$$

SOLUCIÓN:

El determinante de la matriz de coeficientes es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = -m^2 + 3m - 2$$

Este determinante es cero para $m = 1$ y $m = 2$. El rango de las matrices para estos valores es:

$m \neq 1$ y $m \neq 2$	rango $A = 3$	rango $A^* = 3$	Sistema compatible determinado
$m = 1$	rango $A = 2$	rango $A^* = 3$	Sistema incompatible
$m = 2$	rango $A = 2$	rango $A^* = 2$	Sistema compatible indeterminado

5. *a*) En un sistema de igual número de ecuaciones que de incógnitas, el determinante de la matriz de coeficientes es igual a 0:
   - ¿Puede ser compatible?
   - ¿Puede tener solución única?

   b) El rango de la matriz de coeficientes de un sistema homogéneo de cuatro ecuaciones y tres incógnitas es igual a 3. ¿Qué puedes decir de su solución?

Explica las respuestas.

SOLUCIÓN:

a)
- Puede ser compatible si la matriz ampliada tiene el mismo rango que la matriz de coeficientes.
- No puede tener solución única. Puesto que el determinante de la matriz de coeficientes es cero, el rango será menor que el número de incógnitas y, por consiguiente, no será determinado.

b) El rango es igual que el número de incógnitas. Por consiguiente, el sistema es compatible (todos los sistemas homogéneos lo son) y determinado. Solamente tiene una solución que será la solución trivial $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

---

1. Resolver los siguientes sistemas:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x-5y+3z & = & 4 \\ x-2y+z & = & 3 \\ 5x+y+7z & = & 11 \end{array}\right.$$

SOLUCIÓN:

El sistema es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer se obtiene $x=5$, $y=0$, $z=-2$

2. Resolver el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-y+3z & = & 1 \\ 3x-y+2z & = & 3 \\ -2y+7z & = & 10 \end{array}\right.$$

SOLUCIÓN:

El rango de la matriz de coeficientes es dos y el de la matriz ampliada es tres: el sistema no se puede resolver, es incompatible.

3. Resolver:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-y-z & = & 0 \\ x+y-2z & = & 0 \\ 2x-4y-z & = & 0 \\ x-5y+z & = & 0 \end{array}\right.$$

SOLUCIÓN:

Ell rango de la matriz de coeficientes (y de la matriz ampliada) es dos. El sistema es compatible indeterminado. Podemos quedarnos con las dos primeras ecuaciones que son independientes:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-y-z & = & 0 \\ x+y-2z & = & 0 \end{array}\right.$$

La solución de este sistema es $(3\lambda, \lambda, 2\lambda)$.

4. Discutir el siguiente sistema según los valores del parámetro m:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+my+z & = & 4 \\ x+3y+z & = & 5 \\ mx+y+z & = & 4 \end{array}\right.$$

SOLUCIÓN:

El determinante de la matriz de coeficientes es:

$$\begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = m^2 - 4m + 3$$

Este determinante es cero para $m = 1$ y $m = 3$. El rango de las matrices para estos valores es:

$m \neq 1$ y $m \neq 3$	rango $A = 3$	rango $A^* = 3$	Sistema compatible determinado
$m = 1$	rango $A = 2$	rango $A^* = 2$	Sistema compatible indeterminado
$m = 3$	rango $A = 2$	rango $A^* = 3$	Sistema incompatible

5. *a*) El rango de la matriz de coeficientes de un sistema homogéneo de cuatro ecuaciones y tres incógnitas es igual a 3. ¿Qué puedes decir de su solución?

   b) En un sistema de igual número de ecuaciones que de incógnitas, el determinante de la matriz de coeficientes es igual a 0:

   - ¿Puede ser compatible?
   - ¿Puede tener solución única?

Explica las respuestas.

SOLUCIÓN:

a) El rango es igual que el número de incógnitas. Por consiguiente, el sistema es compatible (todos los sistemas homogéneos lo son) y determinado. Solamente tiene una solución que será la solución trivial $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

b)
- Puede ser compatible si la matriz ampliada tiene el mismo rango que la matriz de coeficientes.
- No puede tener solución única. Puesto que el determinante de la matriz de coeficientes es cero, el rango será menor que el número de incógnitas y, por consiguiente, no será determinado.

1. Maximiza la función $z = x + y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x + 3y & \leq & 26 \\ 4x + 3y & \leq & 44 \\ 2x + 3y & \leq & 28 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{cases}$$

2. En una granja de pollos se da una dieta para engordar con una composición mínima de 15 unidades de una sustancia A y otras 15 de una sustancia B. En el mercado solo se encuentran dos clases de compuestos: el tipo I con una composición de una unidad de A y cinco de B, y el tipo II con una composición de cinco unidades de A y una de B. El precio del tipo I es de 10 euros y el de tipo II es de 30 euros. ¿Qué cantidades se han de comprar de cada tipo para cubrir las necesidades con un coste mínimo?

1. Halla el máximo y el mínimo de la función $z = x + y$ en la región determinada por:

$$\begin{cases} x + y & \leq & 3 \\ x - y & \leq & 1 \\ x & \geq & -1 \\ y & \geq & -1 \end{cases}$$

2. Cierto fabricante produce dos artículos A y B, para lo que requiere la utilización de dos secciones de producción: sección de montaje y sección de pintura.

   El artículo A requiere una hora de trabajo en la sección de montaje y dos en la de pintura y el artículo B, tres horas en la sección de montaje y una hora en la de pintura.

   La sección de montaje solo puede estar en funcionamiento nueve horas diarias mientras que la de pintura solo ocho horas cada día. El beneficio que se obtiene produciendo el artículo B es de 40 euros y el de A es de 20 euros.

   Calcula la producción diaria de los artículos A y B que maximiza el beneficio.

1. a) Construye el recinto de soluciones del siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x+3y & \leq & 120 \\ 3x+6y & \leq & 180 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{cases}$$

   b) Los puntos $(20,10)$, $(20,0)$ y $(20,20)$, ¿son soluciones del sistema anterior?

2. Hallar el máximo y el mínimo de la función $z = x + y$, en la región determinada por:

$$\begin{cases} x+2y & \leq & 3 \\ x-y & \leq & 1 \\ x & \geq & -1 \\ y & \geq & -1 \end{cases}$$

3. Unos grandes almacenes desean liquidar 200 camisas y 100 pantalones de la temporada anterior. Para ello, lanzan dos ofertas A y B. La oferta A consiste en un lote de una camisa y un pantalón que se venden a 30 euros; la oferta B consiste en un lote de tres camisas y un pantalón, que se vende a 50 euros. No se desea ofrecer menos de 20 lotes de la oferta A ni menos de 10 de la oferta B.
   ¿Cuántos lotes han de vender de cada tipo para maximizar los ingresos?

4. Disponemos de 210000 euros para invertir en bolsa. Nos recomiendan dos tipos de acciones. Las del tipo A que rinden el 10 % y las del tipo B que rinden el 8 %. Decidimos invertir un máximo de 130000 euros en las de tipo A y, como mínimo, 60000 euros en las de tipo B. Además, queremos que la inversión en las de tipo A sea menor o igual que el doble de la inversión en B.
   ¿Cuál tiene que ser la distribución de la inversión para obtener el máximo beneficio anual?

5. Se quiere promocionar una marca desconocida D de aceites, utilizando una marca conocida C. Para ello, se hace la siguiente oferta:
   "Pague a solo 2,5 euros el litro de aceite C" y a 1,25 euros el litro de aceite D siempre y cuando compre en total 6 litros o más y la cantidad de aceite C, esté comprendida entre la mitad u el doble de la cantidad comprada de aceite D.
   Disponemos de un máximo de 31,25 euros:

   a) Calcula los modos existentes de acogernos a la oferta (Las cantidades de aceite en litros deben ser enteras).

   b) Acogiéndonos a la oferta, ¿cuál es la mínima cantidad de aceite D que podemos comprar?, ¿cuál es la máxima de C?

1. *a*) Dibuja el recinto que cumple estas restricciones:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+3y & \leq & 15 \\ 5x+y & \leq & 20 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{array}\right.$$

   b) ¿Son los puntos $(0,6)$, $(4,0)$ y $(5,6)$, soluciones del sistema anterior?

2. Maximiza la función $z = x + y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+3y & \leq & 26 \\ 4x+3y & \leq & 44 \\ 2x+3y & \leq & 28 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{array}\right.$$

3. Un orfebre fabrica dos tipos de joyas. Las del tipo A precisan 1 gramo de oro y 1,5 gramos de plata, y las vende a 40 euros cada una. Para la fabricación de las de tipo B emplea 1,5 gramos de oro y 1 gramo de plata y las vende a 50 euros. El orfebre tiene solo en el taller 750 gramos de cada uno de los metales.
   Calcula cuántas joyas ha de fabricar para obtener los máximos ingresos

4. En una pequeña empresa se fabrican diariamente solo dos tipos de aparatos A y B. Como máximo pueden fabricarse 3 aparatos de cada tipo, y, obligatoriamente, al menos uno de tipo B. Indica todas las posibilidades de fabricación si se quieren obtener unas ventas superiores a 60 euros, teniendo en cuenta que los precios de los artículos A y B son de 30 y 10 euros respectivamente.

5. Se quiere promocionar una marca desconocida D de aceites, utilizando una marca conocida C. Para ello, se hace la siguiente oferta:
   "Pague a solo 2,5 euros el litro de aceite C" y a 1,25 euros el litro de aceite D siempre y cuando compre en total 6 litros o más y la cantidad de aceite C, esté comprendida entre la mitad u el doble de la cantidad comprada de aceite D.
   Disponemos de un máximo de 31,25 euros:

   a) Calcula los modos existentes de acogernos a la oferta (Las cantidades de aceite en litros deben ser enteras).

   b) Acogiéndonos a la oferta, ¿cuál es la mínima cantidad de aceite D que podemos comprar?, ¿cuál es la máxima de C?

1. Calcular los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)^2-3x^2}{1-5x}$

   b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x-1}-\dfrac{x^2+1}{x-2}$

2. Comparando los órdenes de infinitos calcula los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^x}{10x^2-5}$

   b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^5-1}}{10x^2-5}$

   c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log(x^3+1)}{10x^2-5}$

   d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(2^x-\sqrt{x^5-1}\right)$

   e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(10x^2-\sqrt{x^5-1}\right)$

3. Calcular:

   a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-3}{(x-2)^2}$

   b) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x^2-6}{x(x-3)}-\dfrac{1}{x-3}\right)$

   c) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-4}{x^3+2x^2+5x+10}$

031204B nombre:

1. Comparando los órdenes de infinitos calcula los siguientes límites:

   a) $\lim_{x\to\infty} \left(10x^2 - \sqrt{x^5-1}\right)$

   b) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^5-1}}{10x^2-5}$

   c) $\lim_{x\to\infty} \frac{2^x}{10x^2-5}$

   d) $\lim_{x\to\infty} \left(2^x - \sqrt{x^5-1}\right)$

   e) $\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x^3+1)}{10x^2-5}$

2. Calcular los siguientes límites:

   a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2+1}{x-2}$

   b) $\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)^2-3x^2}{1-5x}$

3. Calcular:

   a) $\lim_{x\to-2} \frac{x^2-4}{x^3+2x^2+5x+10}$

   b) $\lim_{x\to1} \left(\frac{x^2-6}{x(x-3)} - \frac{1}{x-3}\right)$

   c) $\lim_{x\to2} \frac{x-3}{(x-2)^2}$

031211 nombre:

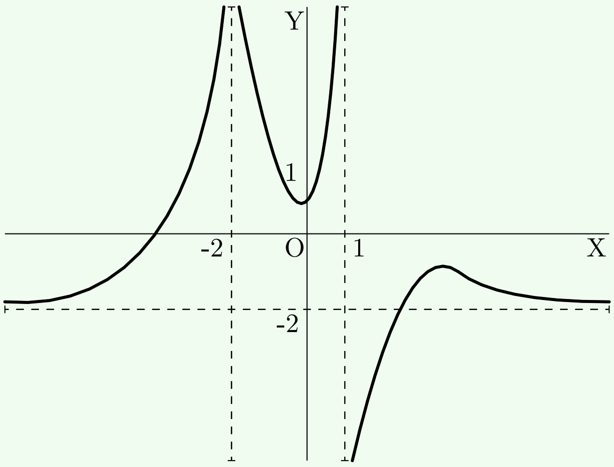
1. Definir:
   - Límite l cuando x tiende a infinito.
   - Límite infinito cuando x tiende a infinito.
   - Límite l cuando x tiende a x_0.
   - Límite $+\infty$ cuando x tiende a x_0.

   y explicar las definiciones con gráficos.
2. Definir las diferentes clases de asíntotas y explicar las definiciones con gráficos.
3. Definir función continua y los diferentes tipos de discontinuidad, explicando las definiciones de éstos últimos mediante gráficos.

1. Representa gráficamente una sola función que cumpla:

   - $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$
   - $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1 \quad (f(x) < 1 \text{ si } x \to \infty)$
   - $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$
   - $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

2. Dada la gráfica de la función $f(x)$



   calcula los límites siguientes:

   a) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$
   b) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$
   c) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$
   d) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$
   e) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$
   f) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$
   g) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

3. Calcula los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3}{\log x}$
   b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3^x}{x^2+1}$
   c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^4+1}}{2x^2-1}$
   d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\dfrac{2x^2-1}{x+1} - \dfrac{x^2}{x+2}\right]$
   e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{1+3x}{1+2x}\right)^{2x}$
   f) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3x^2+x-2}{x^3+x^2-x-1}$

4. Estudia la continuidad de la siguiente función:

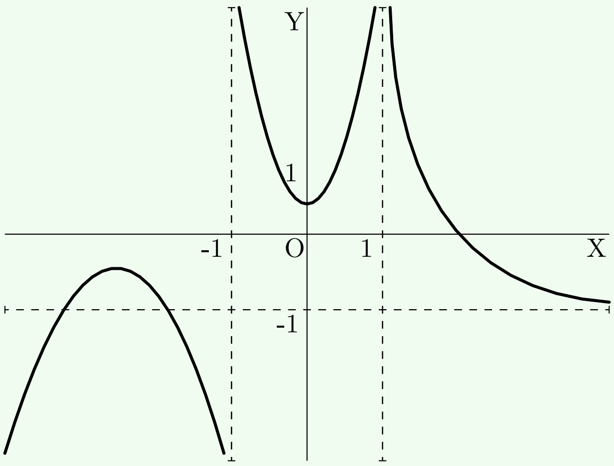
$$f(x) = \begin{cases} -2x-3 & \text{si} \quad x < -1 \\ x^2-2 & \text{si} \quad -1 \le x < 2 \\ 3x+1 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

5. Calcular el valor de a para que sea continua la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2x + a & \text{si} \quad x \leq 1 \\ 4x^2 + ax + 6 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

1. Representa gráficamente una sola función que cumpla:
   - $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1 \quad (f(x) > 1 \text{ si } x \to -\infty)$
   - $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
   - $\lim_{x\to-2^-} f(x) = +\infty$
   - $\lim_{x\to-2^+} f(x) = +\infty$

2. Dada la gráfica de la función $f(x)$



calcula los límites siguientes:

a) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

b) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

c) $\lim_{x\to-1^-} f(x)$

d) $\lim_{x\to-1^+} f(x)$

e) $\lim_{x\to1^-} f(x)$

f) $\lim_{x\to1^+} f(x)$

g) $\lim_{x\to0} f(x)$

3. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to+\infty} \left(2^x - x^2\right)$

b) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}$

c) $\lim_{x\to+\infty} \left[\dfrac{3x^2}{x+1} - \dfrac{x^3}{x^2+1}\right]$

d) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{2x-4}{\sqrt{4x^2+1}}$

e) $\lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x+1}{5x-2}\right)^{x^2}$

f) $\lim_{x\to3} \left[\dfrac{2x}{x^2-9} - \dfrac{x+1}{x-3}\right]$

4. Estudia la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x < 0 \\ 3x^2+1 & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ 4 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

5. Calcular el valor de a para que sea continua la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2+3x-1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ 3a+2^x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

040115A nombre:

Derivar las siguientes funciones:

1. $y = \dfrac{3x^2 - 2x + 1}{\ln x}$
2. $y = 6x^3(2x^3 - 4x^2 + 7)$
3. $y = 5x^3\sqrt{x}$
4. $y = (2x^2 - 3x + 2)^3$
5. $y = \dfrac{3x}{(x^2 + 1)^2}$

040115B nombre:

Derivar las siguientes funciones:

1. $y = \sqrt{x} \ln x$
2. $y = \dfrac{1 - 3x^2}{3 - 6x^3}$
3. $y = (5x^3 + 4x^2 - x + 1)^5$
4. $y = \dfrac{-4x}{(1 - x^2)^2}$
5. $y = e^{\frac{1}{x}}$

040122A nombre:

1. Halla los puntos en que la pendiente de la recta tangente es igual a cero para la siguiente curva:
$$y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$$
2. Estudia la continuidad y derivabilidad de las siguiente función y represéntala:
$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x<3 \\ x^2-4 & x\geq 3 \end{cases}$$
3. Derivar las siguientes funciones:
   a) $y = \dfrac{x+1}{(2-x)^2}$
   b) $y = e^{4x(x-1)}$

040122B nombre:

1. Halla los puntos en que la pendiente de la recta tangente es igual a cero para la siguiente curva:

$$y = \frac{6x}{x^2+1}$$

2. Estudia la continuidad y derivabilidad de las siguiente función y represéntala:

$$f(x) = \begin{cases} 3x-1 & x < 1 \\ x^2+x & x \geq 1 \end{cases}$$

3. Derivar las siguientes funciones:

   a) $y = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$

   b) $y = \ln\sqrt{1-x}$

040127A nombre:

1. Calcula la derivada de la función $f(x) = \sqrt{x}$ a partir de la definición.
2. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

   a) $y = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1}$

   b) $y = x^2 \ln x$

   c) $y = (x^2 + 1)\sqrt{x}$

   d) $y = (3x^2 - 4)^4$

   e) $y = \ln \dfrac{2x}{3x + 1}$

3. Estudia la continuidad y derivabilidad de la siguiente función y represéntala:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ x^2 + x & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

4. Averigua para qué valores de x la derivada de la siguiente función es igual a cero:

$$y = \frac{6x}{x^2 + 1}$$

040127B nombre:

1. Calcula la derivada de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ a partir de la definición.
2. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

   a) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

   b) $y = (3x+1)^3$

   c) $y = (2x-1)\ln x$

   d) $y = e^{x^2+1}$

   e) $y = \ln \dfrac{2x}{3x+1}$

3. Estudia la continuidad y derivabilidad de la siguiente función y represéntala:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ x - 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

4. Averigua para qué valores de x la derivada de la siguiente función es igual a cero:

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

040127 nombre:

Dibuja la gráfica de una función cualquiera $f(x)$, y señala sobre la gráfica los puntos de la curva correspondientes a x y $x+\Delta x$. Indica asimismo Δx y Δf. Después y sólo después contesta a las siguientes preguntas:

1. Define tasa de variación media o pendiente media de una curva entre dos puntos
2. Define pendiente de una curva en un punto
3. Define recta tangente a una curva en un punto
4. Define derivada de una función y explica su significado
5. Demuestra que toda función derivable es continua. Pon un ejemplo de una función continua que no sea derivable

040212A nombre:

Representar gráficamente las siguientes curvas estudiando previamente su simetría, intersecciones con los ejes, sus asíntotas, el crecimiento y la concavidad:

1. $y = x^4 - 2x^2 + 1$
2. $y = \dfrac{x^2 - x - 1}{x - 2}$

040212B nombre:

Representar gráficamente las siguientes curvas estudiando previamente su simetría, intersecciones con los ejes, sus asíntotas, el crecimiento y la concavidad:

1. $y = x^3 - 3x^2 + 2$
2. $y = \dfrac{4x}{(x+2)^2}$

---

1. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2x^2 - 3x + 1$ que es paralela a la recta $2x + 3y - 1 = 0$.

2. Hallar los máximos, mínimos y puntos de inflexión de la curva $y = (x - 2)^2(x + 1)$

3. Una huerta tiene actualmente 24 árboles que producen 600 frutos cada uno. Se calcula que, por cada árbol adicional plantado, la producción de cada árbol disminuye en 15 frutos. ¿Cuál debe ser el número total de árboles que debe tener la huerta para que la producción sea máxima?, ¿cuál será esa producción?

4. Estudia y representa la siguiente curva:
$$y = \frac{x^4}{2} - 4x^2 + 6$$

5. Haz la gráfica de la siguiente función:
$$y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1}$$

6. Dibuja la gráfica de la función:
$$y = xe^{x+2}$$

040219B nombre:

1. Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \dfrac{x-2}{x+1}$ en el punto de corte con el eje de abscisas.
2. Considera la curva $y = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 1$. Calcula sus máximos, mínimos y puntos de inflexión.
3. Un depósito abierto de latón con base cuadrada y capacidad para 4000 litros, ¿qué dimensiones debe tener para que su fabricación sea lo más económica posible?
4. Representa la función:
$$y = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x$$
5. Representa la siguiente función:
$$y = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$$
6. Representa:
$$y = \frac{e^x}{x - 1}$$

040226A nombre:

Calcular las siguiente integrales:

1. $\displaystyle\int (x^3 - 3x^2 + 5x - 2)dx$
2. $\displaystyle\int \frac{3}{x^5}dx$
3. $\displaystyle\int \left(x - \frac{1}{x}\right) dx$
4. $\displaystyle\int (3x+1)^5 dx$
5. $\displaystyle\int \sqrt{2x+3}dx$
6. $\displaystyle\int \frac{4}{(1-3x)^3}dx$
7. $\displaystyle\int \frac{1}{3x+5}dx$
8. $\displaystyle\int 2e^{3x}dx$
9. $\displaystyle\int \frac{1}{2-x}dx$
10. $\displaystyle\int e^{x^2} x dx$

040226B nombre:

Calcular las siguiente integrales:

1. $\int (-2x^4 + 5x^2 - 6x + 1)dx$
2. $\int \frac{3}{x^2}dx$
3. $\int \left(3x^2 - \frac{1}{x^2}\right) dx$
4. $\int (4x+1)^6 dx$
5. $\int \sqrt{1-3x}dx$
6. $\int \frac{3}{(2x+1)^3}dx$
7. $\int \frac{1}{2x-1}dx$
8. $\int 5e^{1-x}dx$
9. $\int \frac{1}{2x+1}dx$
10. $\int e^{-x^2} x dx$

040311 nombre:

Explica y demuestra el teorema fundamental del cálculo integral y la regla de Barrow.

040311A nombre:

1. Calcular las siguientes integrales indefinidas:

   a) $\displaystyle\int \frac{6x-3}{2\sqrt{3x^2-3x}}\,dx$ *b*) $\displaystyle\int \frac{x^3-x}{x^4-2x^2}\,dx$

2. Calcular las siguientes integrales definidas:

   a) $\displaystyle\int_0^{e-1} \frac{1}{x+1}\,dx$ *b*) $\displaystyle\int_{-1}^{3} (2x^2+3)\,dx$

3. Dibujar el recinto limitado por la curva $y = x^2 + 2x + 3$, el eje X y las rectas $x = -1$ y $x = 1$. Calcular el área de este recinto.

4. Dibujar el recinto limitado por las curvas $y = x^2 - 1$ e $y = 1 - x^2$. Calcular el área de este recinto.

1. Calcular las siguientes integrales indefinidas:

   a) $\displaystyle\int \frac{x^3 - x}{x^4 - 2x^2}\,dx$

   b) $\displaystyle\int \frac{6x - 3}{2\sqrt{3x^2 - 3x}}\,dx$

2. Calcular las siguientes integrales definidas:

   a) $\displaystyle\int_{-1}^{3} (2x^2 + 3)\,dx$

   b) $\displaystyle\int_{0}^{e-1} \frac{1}{x+1}\,dx$

3. Dibujar el recinto limitado por la curva $y = x^2 - 1$ y el eje X en el intervalo $[0, 2]$. Calcular el área de este recinto.

4. Dibujar el recinto limitado por las curvas $y = x^2 + 1$, la recta $y = 4x - 3$ y el eje Y. Calcular el área de este recinto.

1. De una bolsa que tiene 10 bolas numeradas del 0 al 9 se extrae una bola al azar:
   a) ¿Cuál es el espacio muestral?
   b) Describe los sucesos:
      1) $A =$ "Mayor que 6"
      2) $B =$ "No obtener 6"
      3) $C =$ "Menor que 6"

      escribiendo todos sus elementos
   c) Halla los sucesos $A \cup B$, $A \cap B$ y $\overline{A} \cap \overline{B}$

   RESPUESTA:

   $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
   $A = \{7, 8, 9\}$
   $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$
   $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
   $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$
   $A \cap B = \{7, 8, 9\}$
   $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B} = \{6\}$

2. Sean A y B sucesos tales que:
   $$p(A) = 0,4 \qquad p(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,4 \qquad p(A \cap B) = 0,1$$
   Calcula $p(A \cup B)$ y $p(B)$.

   RESPUESTA:

   $p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\overline{A \cup B}) = 0,4 \Longrightarrow p(A \cup B) = 0,6$
   $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \Longrightarrow p(B) = p(A \cup B) - p(A) + p(A \cap B) = 0,6 - 0,4 + 0,1 = 0,3$

3. Teniendo en cuenta que A y B son dos sucesos tales que:
   $$p(\overline{A}) = 0,5 \qquad p(A \cap B) = 0,12 \qquad p(A \cup B) = 0,82$$
   a) ¿Son independientes A y B?
   b) Calcula $p(\overline{B}/A)$

RESPUESTA:

Calculemos en primer lugar $p(B)$:

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \Longrightarrow$
$\Longrightarrow p(B) = p(A \cup B) - p(A) + p(A \cap B) = 0,82 - 0,5 + 0,12 = 0,44$

Puesto que $p(A \cap B) \neq p(A)p(B)$, los sucesos no son independientes.

$$p(\overline{B}/A) = \frac{p(\overline{B} \cap A)}{p(A)} = \frac{p(A - B)}{p(A)} = \frac{p(A) - p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{0,5 - 0,12}{0,5} = 0,76$$

4. *a*) Dos personas eligen al azar, cada una de ellas, un número del 1 al 5. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos elijan el mismo número?

   b) Si son tres personas las que eligen al azar, cada una de ellas, un número del 1 al 5. ¿cuál es la probabilidad de que las tres elijan el mismo número?

RESPUESTA:

El espacio muestral es $E = \{11, 12, 13, 14, 15, 21, 22, 23, ...\}$ que consta de 25 elementos. Como los casos favorables son 5, la probabilidad es $\frac{1}{5}$.

En el segundo caso el espacio muestral tiene 125 elementos y los casos favorables siguen siendo 5 por lo que la probabilidad es de $\frac{5}{125} = \frac{1}{25}$. Otra manera de pensar este problema es la siguiente. Elige un número la primera, luego la segunda y luego la tercera. La probabilidad de que la segunda haya elegido el mismo número que la primera es $\frac{1}{5}$ y la probabilidad de que la tercera elija el mismo número que las dos primeras es también $\frac{1}{5}$. Como los sucesos son independientes, la probabilidad de que sucedan a la vez es $\frac{1}{5}\frac{1}{5} = \frac{1}{25}$.

5. En una cadena de televisión se hizo una encuesta a 2500 personas para saber la audiencia de un debate y de una película que se emitieron en horas distintas: 2100 vieron la película, 1500 vieron el debate y 350 no vieron ninguno de los dos programas. Si elegimos al azar a uno de los encuestados:

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que viera la película y el debate?

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que viera la película sabiendo que no vio el debate?

   c) Sabiendo que vio la película, ¿cuál es la probabilidad de que viera el debate?

RESPUESTA:

Ponemos nombre a los sucesos:

$A =$"La persona elegida vio la película"

$B =$"La persona elegida vio el debate"

Las probabilidades de estos sucesos son:

$$p(A) = \frac{2100}{2500} = \frac{21}{25} \qquad\qquad p(B) = \frac{1500}{2500} = \frac{3}{5}$$

Por otra parte:

$$p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\overline{A \cup B}) = \frac{350}{2500} = \frac{7}{50} \Longrightarrow p(A \cup B) = \frac{43}{50}$$

Entonces tenemos:

$$
\begin{aligned}
p(\text{“vio la película y el debate”}) &= p(A \cap B) = \\
&= p(A) + p(B) - p(A \cup B) = \\
&= \tfrac{21}{25} + \tfrac{3}{5} - \tfrac{43}{50} = \tfrac{29}{50}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p(\text{“vio la película sabiendo que no vio el debate”}) &= p(A/\overline{B}) = \frac{p(A \cap \overline{B})}{p(\overline{B})} = \frac{p(A - B)}{p(\overline{B})} = \\
&= \frac{p(A) - p(A \cap B)}{p(\overline{B})} = \frac{\frac{21}{25} - \frac{29}{50}}{\frac{2}{5}} = \\
&= \frac{\frac{13}{50}}{\frac{2}{5}} = \frac{13}{20}
\end{aligned}
$$

$$
p(\text{“vio el debate sabiendo que vio la película”}) = p(B/A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)} = \frac{\frac{29}{50}}{\frac{21}{25}} = \frac{29}{42}
$$

040318 nombre:

Examen de recuperación de la primera parte

---

1. Estudia el siguiente sistema homogéneo según los valores del parámetro m y resuélvelo en los casos que resulte compatible indeterminado:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z &= 0 \\ x + my + 2z &= 0 \\ 2x + (3+m)y + 4z &= 0 \end{cases}$$

2. Halla la matriz $X^2 + Y^2$, donde X e Y son dos matrices cuadradas de orden dos que verifican:

$$5X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} \qquad 3X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$$

3. Halla una matriz X tal que $AX = B$ siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Una compañía aérea tiene dos aviones A y B para cubrir un determinada trayecto. El avión A debe hacer más veces el trayecto que el avión B, pero no puede sobrepasar 120 viajes. Entre los dos aviones deben hacer más de 60 vuelos, pero menos de 200. En cada vuelo, A consume 900 litros de combustible y B 700 litros. ¿Cuántos vuelos debe hacer cada avión para que el consumo de combustible sea mínimo?

---

1. Estudia el siguiente sistema homogéneo según los valores del parámetro m y resuélvelo en los casos que resulte compatible indeterminado:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+3y+2z & = & 0 \\ x+my+2z & = & 0 \\ 2x+(3+m)y+4z & = & 0 \end{array}\right.$$

2. Halla la matriz X^2+Y^2, donde X e Y son dos matrices cuadradas de orden dos que verifican:

$$5X+3Y=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} \qquad 3X+2Y=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$$

3. Halla una matriz X tal que $AX=B$ siendo:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Una compañía aérea tiene dos aviones A y B para cubrir un determinada trayecto. El avión A debe hacer más veces el trayecto que el avión B, pero no puede sobrepasar 120 viajes. Entre los dos aviones deben hacer más de 60 vuelos, pero menos de 200. En cada vuelo, A consume 900 litros de combustible y B 700 litros. ¿Cuántos vuelos debe hacer cada avión para que el consumo de combustible sea mínimo?

1. Extraemos dos cartas de una baraja española y vemos de qué palo son:

   a) ¿Cuál es el espacio muestral? ¿Cuántos elementos tiene?

   b) Describe los sucesos:

      1) $A =$ "Las cartas son de distinto palo"

      2) $B =$ "Al menos una carta es de oros"

      3) $C =$ "Ninguna de las cartas es de espadas'

      escribiendo todos sus elementos.

   c) Halla los sucesos $B \cup C$, y $\bar{B} \cap C$

   SOLUCIÓN:

   a) Llamando O a "oros", C a "copas", E a "espadas" y B a "bastos", el espacio muestral es:
   $E = \{OO, OC, OE, OB, CO, CC, CE, CB, EO, EC, EE, EB, BO, BC, BE, BB\}$
   que tiene 16 elementos.

   b) $A = \{OC, OE, OB, CO, CE, CB, EO, EC, EB, BO, BC, BE\}$
   $B = \{OO, OC, OE, OB, CO, EO, BO\}$
   $C = \{OO, OC, OB, CO, CC, CB, BO, BC, BB\}$

   c) $B \cup C = \{OO, OC, OB, CO, CC, CB, BO, BC, BB, OE, EO\}$
   $\overline{B} \cap C = C - B = \{CC, CB, BC, BB\}$

2. De dos sucesos A y B, sabemos que $p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0$, $p(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0{,}5$ y $p(\bar{A}) = 0{,}4$. Calcular $p(B)$ y $p(A \cap B)$.

   SOLUCIÓN:

   Puesto que $p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\overline{A \cup B}) = 0 \Longrightarrow p(A \cup B) = 1$.
   También $p(\bar{A} \cup \bar{B}) = p(\overline{A \cap B}) = 0{,}5 \Longrightarrow p(A \cap B) = 0,5$
   De aquí $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \Longrightarrow 1 = 0,6 + p(B) - 0,5 \Longrightarrow p(B) = 0,9$

3. Teniendo en cuenta que A y B son dos sucesos tales que $p(\bar{A}) = 0{,}5$, $p(A \cap B) = 0{,}12$ y $p(A \cup B) = 0{,}82$:

   a) ¿Son independientes A y B?

   b) Calcula $p(\bar{B}/A)$

   SOLUCIÓN:

   $p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 0,5$
   $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \Longrightarrow 0,82 = 0,5 + p(B) - 0,12 \Longrightarrow p(B) = 0,44$

Como $p(A \cap B) \neq p(A)p(B)$, los sucesos no son independientes.

Por otra parte $p(\bar{B}/A) = \dfrac{p(\bar{B} \cap A)}{p(A)} = \dfrac{p(A - B)}{p(A)} = \dfrac{0,5 - 0,12}{0,5} = \dfrac{19}{25}$

4. Tenemos tres cartas con sus sobres correspondientes. Si metemos al azar cada carta en uno de los sobres, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de las cartas vaya en el sobre que le corresponde?

SOLUCIÓN:

Llamemos A, B y C a las tres cartas. Escogemos las cartas al azar, la primera la ponemos en el sobre correspondiente a A, la segunda en el correspondiente a B y la tercera en el correspondiente a C. El espacio muestral es:

$$E = \{ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA\}$$

En cuatro de los seis casos hay alguna carta en el sobre que le corresponde. Por tanto la probabilidad es $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

5. En una cadena de televisión se hizo una encuesta a 2500 personas para saber la audiencia de un debate y de una película que se emitieron en horas distintas: 2100 vieron la película, 1500 vieron el debate y 350 no vieron ninguno de los dos programas. Si elegimos al azar uno de los encuestados:

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que viera la película y el debate?

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que viera la película sabiendo que no vio el debate?

   c) Sabiendo que vio la película, ¿cuál es la probabilidad de que viera el debate?

SOLUCIÓN:

Ponemos nombre a los sucesos:

$A =$"La persona elegida vio la película"

$B =$"La persona elegida vio el debate"

Las probabilidades de estos sucesos son:

$$p(A) = \frac{2100}{2500} = \frac{21}{25} \qquad\qquad p(B) = \frac{1500}{2500} = \frac{3}{5}$$

Por otra parte:

$$p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\overline{A \cup B}) = \frac{350}{2500} = \frac{7}{50} \Longrightarrow p(A \cup B) = \frac{43}{50}$$

Entonces tenemos:

$$\begin{aligned} p(\text{“vio la película y el debate”}) &= p(A \cap B) = \\ &= p(A) + p(B) - p(A \cup B) = \\ &= \tfrac{21}{25} + \tfrac{3}{5} - \tfrac{43}{50} = \tfrac{29}{50} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
p(\text{“vio la película sabiendo que no vio el debate”}) &= p(A/\overline{B}) = \frac{p(A\cap\overline{B})}{p(\overline{B})} = \frac{p(A-B)}{p(\overline{B})} = \\
&= \frac{p(A)-p(A\cap B)}{p(\overline{B})} = \frac{\frac{21}{25}-\frac{29}{50}}{\frac{2}{5}} = \\
&= \frac{\frac{13}{50}}{\frac{2}{5}} = \frac{13}{20}
\end{aligned}
$$

$$
p(\text{“vio el debate sabiendo que vio la película”}) = p(B/A) = \frac{p(B\cap A)}{p(A)} = \frac{\frac{29}{50}}{\frac{21}{25}} = \frac{29}{42}
$$

6. Una bolsa A, contiene 3 bolas rojas y 5 verdes. Otra bolsa B, contiene 6 bolas rojas y 4 verdes. Lanzamos un dado: si sale un uno extraemos una bola de la bolsa A; si no sale un uno la extraemos de B:

   a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener una bola roja?

   b) Sabiendo que salió roja, ¿cuál es la probabilidad de que fuera de A?

   SOLUCIÓN:

   Sean los sucesos:
   $A =$“extraer la bola de la bolsa A”
   $B =$“extraer la bola de la bolsa B”
   $r =$“extraer una bola roja”

   Entonces:

   $$p(r) = p(A\cap r) + p(B\cap r) = p(A)p(r/A) + p(B)p(r/B) = \frac{1}{6}\frac{3}{8} + \frac{5}{6}\frac{3}{5} = \frac{9}{16}$$

   $$p(A/r) = \frac{p(A\cap r)}{p(r)} = \frac{\frac{1}{6}\frac{3}{8}}{\frac{9}{16}} = \frac{1}{9}$$

1. Extraemos dos cartas de una baraja española y vemos de qué palo son.
   a) ¿Cuál es el espacio muestral? ¿Cuántos elementos tiene?
   b) Describe los sucesos:
      - $A =$“Las cartas son de distinto palo”
      - $B =$“Al menos una carta es de oros”
      - $C =$“Ninguna de las cartas es de espadas”

      escribiendo todos sus elementos.
   c) Halla los sucesos $B \cup C$ y $\overline{B} \cap C$.

2. Sean A y B los sucesos tales que $p(A) = 0{,}4$, $p(\overline{A} \cap B) = 0{,}4$ y $p(A \cap B) = 0{,}1$. Calcula $p(A \cup B)$ y $p(B)$.

3. Sabiendo que $p(A) = 0{,}5$, $p(\overline{B}) = 0{,}6$ y $p(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}25$:
   a) ¿Son A y B sucesos independientes?
   b) Calcula $p(A \cup B)$ y $p(A/B)$

4. Tenemos para enviar tres cartas con sus tres sobres correspondientes. Si metemos al azar cada carta en uno de los sobres, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de las cartas vaya en el sobre que le corresponde?

5. En un pueblo hay 100 jóvenes; 40 de los chicos y 35 de las chicas juegan al tenis. El total de chicas en el pueblo es de 45. Si elegimos un joven de esa localidad al azar:
   a) Si sabemos que juega al tenis, ¿cuál es la probabilidad de que sea chica?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea un chico que no juegue al tenis?

6. Tenemos dos bolsas, A y B. En la bolsa A hay 3 bolas blancas y 7 rojas. En la bolsa B hay 6 bolas blancas y 2 rojas. Sacamos una bola de A y la pasamos a B. Después extraemos una bola de B.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída de B sea blanca?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas sean blancas?

1. *El tiempo empleado, en horas, en hacer un determinado producto sigue una distribución* $N(10,2)$. *Calcular la probabilidad de que ese producto se tarde en hacer:*

   a) *Menos de* 7 *horas.*

   b) *Entre* 8 *y* 13 *horas.*

   SOLUCIÓN:

   $p(x<7)=p(z<\dfrac{7-10}{2}=p(z<-1,5)=p(z>1,5)=0,0668$

   $$\begin{aligned} p(8<x<13) &= p(\frac{8-10}{2}<z<\frac{13-10}{2}=p(-1<z<1,5)= \\ &= p(z<1,5)-p(z<-1)=0,9332-0,1587=0,7745 \end{aligned}$$

2. *Calcular la probabilidad de que al lanzar un dado* 600 *veces, el número de cincos sea:*

   a) *Superior a* 110.

   b) *Inferior a* 85

   SOLUCIÓN:

   las probabilidades siguen la distribución binomial $B(600,\frac{1}{6})$ que se puede aproximar por la distribución normal $N\left(600\frac{1}{6},\sqrt{600\frac{1}{6}\frac{5}{6}}\right)$, es decir $N(100;9,13)$. Entonces:

   $p(x>110)=p(x'>110,5)=p(z>\dfrac{110,5-100}{9,13})=p(z>1,15)=0,1251$

   $p(x<85)=p(x'<84,5)=p(z<\dfrac{84,5-100}{9,13})=p(z>-1,70)=0,0446$

3. *En una distribución normal con media* $\mu=8{,}2$ *y desviación típica* $\sigma=2{,}1$, *Halla el intervalo característico para el* 85 %.

   SOLUCIÓN:

   $p(-k<z<k)=0,85\Longrightarrow p(z<k)=0,925\Longrightarrow k=1,44$
   A los valores $-1,44$, $1,44$ en $N(0,1)$ corresponden en $N(8{,}2;2{,}1)$:

   $8{,}2-1{,}44\times 2{,}1=5,18$
   $8{,}2+1{,}44\times 2{,}1=11{,}22$

   por consiguiente el intervalo característico es $(5{,}18;11{,}22)$.

4. *En un barrio hay* 4000 *habitantes, distribuidos en cuatro urbanizaciones: el* $12\,\%$ *viven en* A*, el* $20\,\%$ *en* B*, el* $36\,\%$ *en* C *y el* $32\,\%$ *en* D*. Para confeccionar una muestra de* 50 *habitantes mediante muestreo aleatorio estratificado proporcional, ¿cuántas personas hay que seleccionar de cada una de las cuatro urbanizaciones?*

   SOLUCIÓN:

   Hacemos un reparto proporcional:

   $$\frac{x}{12}=\frac{y}{20}=\frac{z}{36}=\frac{t}{32}=K \quad \text{con la condición} \quad x+y+z+t=50$$

   El resultado es $x=6$, $y=10$, $z=18$ y $t=16$.

040429 RECUPERACIÓN 2ª EVALUACIÓN

nombre:

---

1. Calcula los siguientes límites:

   a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3 - x}{x^2 - 2x + 1}$

   b) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{4x^5 + 2x}$

   c) $\lim_{x\to +\infty} \left(\dfrac{3x-1}{4x+2}\right)^{x-5}$

2. Estudia la continuidad de la siguiente función. Si en algún punto no es continua, indica el tipo de discontinuidad que presenta:
$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x^2 - x - 6}$$

3. Estudia la derivabilidad de la siguiente función:
$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x & \text{si} \quad x < -1 \\ x^2 + 4 & \text{si} \quad -1 \leq x < 0 \\ 2^x - x + 3 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

4. Deriva las siguientes funciones:

   a) $y = \left(x^2 + \sqrt{x}\right) \ln x$

   b) $y = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)$

5. Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \dfrac{x^2+1}{e^x}$ en $x_0 = 0$.

6. Calcula los máximos y mínimos de la función $y = \dfrac{x}{x^2+1}$.

040429 RECUPERACIÓN 2ª EVALUACIÓN

nombre:

---

1. Calcula los siguientes límites:

   a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - x}{x^2 - 2x + 1}$

   b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{4x^5 + 2x}$

   c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{3x - 1}{4x + 2}\right)^{x-5}$

2. Estudia la continuidad de la siguiente función. Si en algún punto no es continua, indica el tipo de discontinuidad que presenta:
$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x^2 - x - 6}$$

3. Estudia la derivabilidad de la siguiente función:
$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x & \text{si} \quad x < -1 \\ x^2 + 4 & \text{si} \quad -1 \leq x < 0 \\ 2^x - x + 3 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

4. Deriva las siguientes funciones:

   a) $y = \left(x^2 + \sqrt{x}\right) \ln x$

   b) $y = \ln\left(\dfrac{x - 1}{x + 2}\right)$

5. Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \dfrac{x^2 + 1}{e^x}$ en $x_0 = 0$.

6. Calcula los máximos y mínimos de la función $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$.

---

1. *En una empresa con* 25000 *empleados se quiere hacer un estudio sobre la satisfacción de éstos con sus condiciones de trabajo. los empleados están divididos en cuatro categorías A, B, C y D, del siguiente modo:* 500 *empleados en A,* 8000 *en B,* 9000 *en C y* 7500 *en D. Si queremos que estén representadas todas las categorías en una muestra de* 200 *empleados, ¿cuántos deberemos seleccionar de cada categoría, atendiendo a razones de proporcionalidad?*

   SOLUCIÓN:

   Hacemos un reparto proporcional:

   $$\frac{x}{500} = \frac{y}{8000} = \frac{z}{9000} = \frac{t}{7500} = k; \qquad x + y + z + t = 200$$

   El resultado es $x = 4; y = 64; z = 72; t = 60$

2. *La edad de un determinado grupo de personas sigue una distribución* $N(35, 10)$*. Calcula la probabilidad de que una persona de ese grupo, elegido al azar, tenga:*

   a) *Más de 40 años*

   b) *Entre 23 y 47 años*

   SOLUCIÓN:

   a) $p(x > 40) = p(z > \dfrac{40-35}{10}) = p(z > 0{,}5) = 0{,}3085$

   b) $p(23 < x < 47) = p(\dfrac{23-35}{10} < z < \dfrac{47-35}{10}) = p(-1{,}2 < z < 1{,}2) =$
   $= 0{,}8849 - 0{,}1151 == 0{,}7698$

3. *En una distribución normal con media* $\mu = 15$ *y desviación típica* $\sigma = 3{,}2$*, obtén un intervalo centrado en la media* $(\mu - k, \mu + k)$*, de forma que el* 90 % *de los individuos estén en ese intervalo.*

   SOLUCIÓN:

   El intervalo característico tiene por extremos:

   $15 - 1{,}645 \times 3{,}2 = 9{,}736$
   $15 + 1{,}645 \times 3{,}2 = 20{,}264$

4. *La edad de los miembros de una determinada asociación sigue una distribución* $N(\mu, \sigma)$*. Sabemos que la distribución de las medias de las edades en muestras de tamaño* 36 *tiene como media* 52 *años y como desviación típica* 0,5.

   a) *Halla la media y la desviación típica de la edad de los miembros de la asociación* *b)* *¿Cuál es la probabilidad de que un miembro de la asociación, elegido al azar, sea mayor de* 60 *años?*

SOLUCIÓN:

a) Nos dan la distribución de medias muestrales $N(52; 0{,}5)$. La población se distribuye con la misma media $\mu = 52$. La desviación típica de la distribución de medias muestrales es $\sigma/\sqrt{n}$. Por consiguiente:

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{36}} = 0{,}5 \Longrightarrow \sigma = 0{,}5 \times 6 = 3$$

b) $p(x > 60) = p(z > \dfrac{60 - 52}{3}) = p(z > 2{,}67) = 0{,}0038$

5. *La edad de los alumnos de 2º de bachillerato de cierto instituto sigue una distribución* $N(17{,}6; 0{,}5)$*. Los agrupamos al azar de* 10 *en* 10 *para una competición. Halla el intervalo característico del* 95 % *correspondiente a las edades medias de los grupos.*

SOLUCIÓN:

Los extremos del intervalo son:

$$17{,}6 - 2{,}575\frac{0{,}5}{\sqrt{10}} = 17{,}29$$
$$17{,}6 + 2{,}575\frac{0{,}5}{\sqrt{10}} = 17{,}91$$

6. *En una determinada empresa, se seleccionó al azar una muestra de* 100 *empleados cuya media de ingresos mensuales resultó igual a* 705 *euros, con una desviación típica de* 120 *euros. Halla un intervalo de confianza al* 99 % *para la media de los ingresos mensuales de todos los empleados de la empresa.*

SOLUCIÓN:

Los datos de la muestra son $n = 100$, $\bar{x} = 705$ y $s = 120$. El intervalo de confianza tiene por extremos:

$$705 - 2{,}575\frac{120}{10} = 674{,}10$$
$$705 + 2{,}575\frac{120}{10} = 735{,}90$$

7. *Se sabe que el contenida de fructosa de cierto alimento sigue una distribución normal cuya varianza es conocida, teniendo un valor de* 0,25*. Se desea estimar el valor de la media poblacional mediante una muestra, admitiéndose un error máximo de* 0,2 *con una confianza del* 95 %*. ¿Cuál ha de ser como mínimo el tamaño de la muestra?*

SOLUCIÓN:

La desviación típica es la raíz cuadrada de la varianza, es decir $\sigma = 0{,}5$. Entonces:

$$E = \frac{z_c\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = \left(\frac{z_c\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1{,}96 \times 0{,}5}{0{,}2}\right)^2 = 24{,}01$$

Por consiguiente, el tamaño mínimo de la muestra tendrá que ser de 25.

8. *Un examen de* 100 *preguntas admite como respuesta en cada una de ellas dos posibilidades, verdadero o falso. Si un alumno contesta al azar, calcula la probabilidad de que acierte más de* 60 *respuestas.*

SOLUCIÓN:

La probabilidad se puede obtener a partir de una distribución binomial $B(100, \frac{1}{2})$ de media y desviación típica dadas por:

$\mu = np = 100\frac{1}{2} = 50$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = 5.$

Las probabilidades de esta distribución binomial se pueden calcular aproximadamente mediante la distribución normal $N(50, 5)$. Entonces:

$$p(x > 60) \simeq p(x' > 60{,}5) = p(z > \frac{60{,}5 - 50}{5}) = p(z > 2{,}1) = 0{,}0179$$

9. *La proporción de vecinos de cierta localidad que está a favor de la gestión económica del ayuntamiento es de* $29/50$. *Halla el intervalo característico para la proporción de vecinos a favor de dicha gestión económica, en muestras de* 80 *vecinos correspondiente a una probabilidad del* 90 %.

SOLUCIÓN:

Los extremos del intervalo característico son:

$$\frac{29}{50} - 1{,}645\sqrt{\frac{\frac{29}{50}\frac{21}{50}}{80}} = 0{,}5331 \qquad \text{y} \qquad \frac{29}{50} + 1{,}645\sqrt{\frac{\frac{29}{50}\frac{21}{50}}{80}} = 0{,}6228$$

10. *En una encuesta realizada a* 150 *familias de una determinada población se encontró que en* 25 *de ellas había tres o más hijos. Halla el intervalo de confianza para estima la proporción real de las familias en las que hay tres o más hijos, con un nivel de confianza del* 90 %.

SOLUCIÓN:

La proporción en la muestra es $\frac{25}{150} = \frac{1}{6}$. Los extremos del intervalo de confianza son:

$$\frac{1}{6} - 1{,}645\sqrt{\frac{\frac{1}{6}\frac{5}{6}}{150}} = 0{,}1166 \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{6} + 1{,}645\sqrt{\frac{\frac{1}{6}\frac{5}{6}}{150}} = 0{,}2167$$

1. *En un espacio probabilístico, consideramos dos sucesos A y B que cumplen lo siguiente:*

$$p(\bar{A} \cup B) = 0{,}4 \qquad p(B) = 0{,}2 \qquad p(A \cap B) = 0{,}1$$

Calcula $p(A)$ y $p(A \cup B)$

SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} p(\bar{A} \cup B) = 0{,}4 \quad &= p(\bar{A}) + p(B) - p(\bar{A} \cap B) = \\ &= p(\bar{A}) + p(B) - p(B - A) = \\ &= p(\bar{A}) + p(B) - p(B) + p(A \cap B) = \\ &= p(\bar{A}) + p(A \cap B)) \\ &= p(\bar{A}) + 0{,}1 \Rightarrow p(\bar{A}) = 0{,}3 \Rightarrow p(A) = 0{,}7 \end{aligned}$$

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0{,}7 + 0{,}2 - 0{,}1 = 0{,}8$

También podría haberse resuelto el problema teniendo en cuenta que

$$p(B) = 0{,}2 \text{ y } p(\bar{A} \cap B) = 0{,}1 \Rightarrow p(A \cap B) = 0{,}2 - 0{,}1 = 0{,}1 \text{ (¿por qué?)}$$

2. *En una academia hay 60 alumnos matriculados. La tercera parte de ellos van a clase de inglés y las otras dos terceras partes van a clase de informática. De los que van a inglés, un 40 % también va a francés. De los que van a informática, un 25 % también va a francés. Si elegimos un alumno al azar:*

   a) *¿Cuál es la probabilidad de que vaya a francés?*

   b) *Sabiendo que va a francés, ¿cuál es la probabilidad de que vaya también a informática?*

SOLUCIÓN:

Escribamos los datos en una tabla de contingencia:

	Estudian francés	No estudian francés	Totales
Estudian inglés	8	12	20
Estudian informática	10	30	40
Totales	18	42	60

De aquí que las probabilidades que se piden son:

a) $p(\text{“estudia francés”}) = \dfrac{18}{60} = \dfrac{3}{10}$

b) $p(\text{“estudia informática”}/\text{“estudia francés”}) = \dfrac{10}{18} = \dfrac{5}{9}$

3. *El peso de las naranjas sigue una distribución normal de media* 175 *gramos y desviación típica* 12 *gramos. Si las metemos en bolsas de* 10 *naranjas:*

   a) *¿Cuál es la distribución de la media de los pesos de las naranjas de las bolsas?*

   b) *¿Cuál es la probabilidad de que en una de esas bolsas la media del peso de las naranjas esté comprendida entre* 170 *y* 180 *gramos?*

   SOLUCIÓN:

   a) Las medias muestrales siguen una distribución normal $N(175; \frac{12}{\sqrt{10}})$

   b) $p(170 < x < 180) = p(\frac{170-175}{12/\sqrt{10}} < z < \frac{180-175}{12/\sqrt{10}}) = P(-1{,}32 < z < 1{,}32) = 0{,}8132$

4. *En un campamento de verano hemos pesado a* 49 *niños y niñas. obteniendo una media de* 60 *kg y una desviación típica de* 6 *kg. Halla los límites de confianza al* 99 % *para el peso medio de las niñas y niños del campamento.*

   SOLUCIÓN:

   Los datos muestrales son $\bar{x} = 60$, $s = 6$ y $n = 49$. Los extremos del intervalo de confianza son:

   $$\bar{x} - z_c\frac{s}{\sqrt{n}} = 60 - 2{,}575 \times \frac{6}{7} = 57{,}79$$

   $$\bar{x} + z_c\frac{s}{\sqrt{n}} = 60 + 2{,}575 \times \frac{6}{7} = 62{,}21$$

5. *De dos sucesos* A *y* B *de un espacio probabilístico, sabemos que:*

   $$P(\bar{B}) = 0{,}5 \qquad p(\bar{A} \cap B) = 0{,}3 \qquad p(\bar{B} \cap A) = 0{,}4$$

   Calcula $p(A)$ *y* $p(A \cup B)$

   SOLUCIÓN:

   $p(\bar{B}) = 0{,}5 \Rightarrow p(B) = 0{,}5$

   $p(\bar{A} \cap B) = p(B - A) = p(B) - p(A \cap B) = 0{,}5 - p(A \cap B) = 0{,}3 \Rightarrow p(A \cap B) = 0{,}2$

   $p(A \cap \bar{B}) = p(A - B) = p(A) - p(A \cap B) = p(A) - 0{,}2 = 0{,}4 \Rightarrow p(A) = 0{,}6$

6. *En una urna I, hay 5 bolas rojas y 7 bolas negras. En otra urna II, hay 6 bolas rojas y 8 negras. Con probabilidad* $\frac{1}{3}$ *elegimos la urna I y con probabilidad* $\frac{2}{3}$ *elegimos la urna II. Extraemos una bola de la urna elegida:*

   a) *¿Cuál es la probabilidad de que sea roja?*

   b) *Sabiendo que ha salido roja, ¿cuál es la probabilidad de que fuera de la urna II?*

7. *Se sabe que la presión sistólica de los individuos de una determinada población sigue una distribución* $N(127, 24)$. *Si extraemos muestras de tamaño 35:*

a) *¿Cuál es la distribución de la variable aleatoria media muestral* $\bar{x}$*?*

b) *Calcula la probabilidad de que la media de las presiones sistólicas en una de esas muestras esté comprendida entre* 126,5 *y* 128*.*

8. *La duración de un lavavajillas sigue una distribución normal con una desviación típica de* 0,5 *años. ¿Cuántos lavavajillas tenemos que seleccionar en la muestra si queremos que la media muestral no difiera en más de* 0,25 *años de la media de la población. con un nivel de confianza del 90 %?*