

Sistemas de ecuaciones lineales

Observación: La mayoría de estos problemas provienen de las pruebas de selectividad

1. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 9 \\ x - y + z = -1 \end{cases}$$

Solución:

Aplicando el método de Gauss:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 9 \\ x - y + z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} E2 - 2E1 \\ E3 - E1 \end{matrix} \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y - 6z = 7 \\ -2y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x + 1 - 1 = 1 \rightarrow x = 1 \\ 1 - 6z = 7 \rightarrow z = -1 \\ -2y = -2 \rightarrow y = 1 \end{matrix}$$

La solución es: $x = 1$; $y = 1$; $z = -1$.

2. Estudiar para qué valores de k es compatible el sistema siguiente:

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -x + \frac{1}{2}y = -2 \\ x + ky = 2 \end{cases}$$

Resolverlo para los valores de k que lo hacen compatible indeterminado.

Solución:

Multiplicando la segunda y tercera ecuación por 2 queda:

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -x + \frac{1}{2}y = -2 \\ x + ky = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 4 \\ -2x + y = -4 \\ 2x + 2ky = 4 \end{cases} \text{ (Como } E1 = -E2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 4 \\ 2x + 2ky = 4 \end{cases}$$

$$\text{(Restando } E2 - E1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 4 \\ E2 - E1: (2k + 1)y = 0 \end{cases}$$

Como $2k + 1 = 0$ si $k = -1/2$, se tendrá:

• Si $k \neq -1/2$, el sistema es compatible determinado. Su solución única es: $x = 2$, $y = 0$

Si $k = -1/2$, el sistema es compatible indeterminado, equivalente a $2x - y = 4$, cuya solución

es:
$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t - 4 \end{cases}$$

3. Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real k :

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x - ky - 3z = 0 \\ 5x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

Se pide:

- Discutir el sistema para los distintos valores de k .
- Resolver el sistema en los casos en los que sea posible.

Solución:

a) Al tratarse de un sistema homogéneo siempre será compatible: determinado, con solución única, $x = y = z = 0$ cuando el determinante de la matriz de coeficientes sea distinto de 0; indeterminado, con infinitas soluciones, cuando ese determinante valga 0.

El determinante de la matriz de coeficientes es $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -k & -3 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 7k + 56$.

Valdrá 0 si $k = -8$. Será distinto de 0 cuando $k \neq -8$.

En consecuencia:

- Si $k \neq -8$ el sistema será compatible determinado.
- Si $k = -8$, será compatible indeterminado.

b) Si $k \neq -8$, como ya hemos dicho, la única solución es la trivial.

Si $k = -8$ el sistema queda:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x + 8y - 3z = 0 \\ 5x + 2y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (\text{puede verse que } E3 = 2E1 + E2) \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x + 8y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = -z \\ x + 8y = 3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y = -z \\ -2x - 16y = -6z \end{cases} \Rightarrow (\text{sumando})$$

$$\Rightarrow -19y = -7z \Rightarrow y = \frac{7}{19}z \Rightarrow x = \frac{1}{19}z$$

Llamando $z = 19t$ se tendrá: $\begin{cases} x = t \\ y = 7t \\ z = 19t \end{cases}$

4. Un fabricante produce tres artículos diferentes (A, B y C), cada uno de los cuales precisa para su elaboración tres materias primas (M_1 , M_2 , M_3). La siguiente tabla representa el número de unidades de cada materia prima que se requiere para elaborar una unidad de cada producto:

		Productos		
		A	B	C
Materias primas	M_1	2	1	3
	M_2	3	2	2
	M_3	1	2	4

Se dispone de 50 unidades de M_1 , 70 unidades de M_2 y 40 unidades de M_3 .

- Determina las cantidades de artículos A, B y C que produce dicho fabricante.
- Si los precios de venta de cada artículo son, respectivamente, 500, 600 y 1000 euros y gasta en cada unidad de materia prima 50, 70 y 60 euros, respectivamente, determina el beneficio total que consigue con la venta de toda la producción obtenida (utilizando todos los recursos disponibles).

Solución:

Sean x , y , z las cantidades producidas de A, B y C, respectivamente. Con los datos dados en

la tabla se tiene el sistema:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 50 \\ 3x + 2y + 2z = 70 \\ x + 2y + 4z = 40 \end{cases}$$

Lo resolvemos por Gauss:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 2x + y + 3z = 50 \\ 3x + 2y + 2z = 70 \\ x + 2y + 4z = 40 \end{cases} \xrightarrow{E1 - 2E3} \begin{cases} -3y - 5z = -30 \\ E2 - 3E3 \\ x + 2y + 4z = 40 \end{cases} \\ &\xrightarrow{E2 - 3E3} \begin{cases} -3y - 5z = -30 \\ -4y - 10z = -50 \\ x + 2y + 4z = 40 \end{cases} \\ &\xrightarrow{E2 - 2E1} \begin{cases} -3y - 5z = -30 \\ 2y = 10 \\ x + 2y + 4z = 40 \end{cases} \end{aligned}$$

De la segunda ecuación se obtiene: $y = 5$.

Sustituyendo en la primera y tercera ecuaciones: $z = 3$ y $x = 18$.

- Si hace 18 unidades de A, 5 de B y 3 de C, y los vende, tiene unos ingresos por venta de:
 $I = 18 \cdot 500 + 5 \cdot 600 + 3 \cdot 1000 = 15000$ euros.

Los gastos totales son:

$$G = 50 \cdot 50 + 70 \cdot 70 + 60 \cdot 40 = 9800 \text{ euros.}$$

El beneficio será de $15000 - 9800 = 5200$ euros.

5. Tres hermanas, Aine, Clara y Marta, decidieron regalar un libro que vale 24,8 € a su padre. Reúnen esta cantidad de forma que Marta aporta una tercera parte de lo que aporten las otras dos juntas y que Aine aporte 3 céntimos por cada 2 que aporte Clara. ¿Qué cantidad aporta cada una de las hermanas? (2,5 puntos)

Solución:

Sean x , y , z las cantidades que aportan Aine, Clara y Marta, respectivamente.

Debe cumplirse:

$$x + y + z = 24,8 \quad z = \frac{1}{3}(x + y) \quad x = \frac{3}{2}y$$

Esto da lugar al sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 24,8 \\ x + y - 3z = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} E2 - E1 \\ E3 + 3E1 \end{matrix} \begin{cases} x + y + z = 24,8 \\ -4z = -24,8 \\ 5x + 3z = 74,4 \end{cases}$$

Cuya solución es:

$$x = 11,16; y = 7,44; z = 6,20$$

6. Elena, Pedro y Juan colocan diariamente hojas de propaganda sobre los parabrisas de los coches aparcados en la calle. Pedro reparte siempre el 20 % del total de la propaganda, Juan reparte 100 hojas más que Elena y entre Pedro y Elena colocan 850 hojas en los parabrisas. Plantear un sistema de ecuaciones que permita averiguar cuántas hojas reparten, respectivamente, Elena, Pedro y Juan y calcular estos valores.

Solución:

Si Pedro reparte x hojas, Juan reparte y hojas y Elena z hojas, se cumplen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \text{Pedro, } x: & \quad x = 0,20(x + y + z) \\ \text{Juan, } y: & \quad y = z + 100 \\ \text{Elena, } z: & \quad x + z = 850 \end{aligned}$$

Queda el sistema

$$\begin{cases} 0,80x - 0,20y - 0,20z = 0 \\ y = z + 100 \\ x = 850 - z \end{cases} \quad (\text{sustituyendo}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,80(850 - z) - 0,20(z + 100) - 0,20z = 0 \Rightarrow 660 - 1,20z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = 550 \Rightarrow y = 650; x = 300$$

Por tanto, Elena reparte 550 hojas, Pedro 300 hojas, y Juan 650.

7. En una tienda por comprar dos chaquetas y una blusa nos cobran 200 euros. Si volvemos a la tienda y compramos una chaqueta, un pantalón y devolvemos la blusa nos cobran 100 euros. Si hacemos una tercera visita a la tienda y compramos 5 chaquetas, un pantalón y una blusa, ¿cuánto nos cobrarán?

NOTA: Puede ser de interés obtener el precio de los pantalones y blusas en función del de las chaquetas.

Solución:

Sea x el precio de una chaqueta, y el precio de una blusa y z el de un pantalón.

Tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + y = 200 \\ x - y + z = 100, \text{ siendo } p \text{ lo que se paga el tercer día.} \\ 5x + y + z = p \end{cases}$$

Transformando el sistema por Gauss queda:

$$\begin{cases} 2x + y = 200 \\ x - y + z = 100 \\ 5x + y + z = p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 200 \\ 3x + z = 300 \\ 3x + z = p - 200 \end{cases} \begin{matrix} \\ E2 + E1 \\ E3 - E1 \end{matrix}$$

Para que el sistema sea compatible es necesario que $300 = p - 200 \Rightarrow p = 500$.

El tercer día nos cobrarán 500 euros.

8. La edad en años de Juan es el doble que la suma de las edades de sus dos hijos: Pedro y Luis. A su vez, Pedro es 3 años mayor que Luis. Si dentro de 10 años la edad del padre sobrepasa en 11 años a la suma de las edades de los hijos:

- Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.
- Determinar la edad de cada uno de ellos.

Solución:

Sean x , y , z las edades de Juan, Pedro y Luis.

Se cumple:

$$\begin{aligned} x &= 2(y + z) \\ y &= z + 3 \end{aligned}$$

Dentro de 10 años:

$$x + 10 = 11 + y + 10 + z + 10$$

- El sistema que hay que resolver es:

$$\begin{cases} x = 2(y + z) \\ y = z + 3 \\ x = y + z + 21 \end{cases}$$

- Sustituyendo el valor de y en las otras dos ecuaciones queda:

$$\begin{cases} x = 4z + 6 \\ x = 2z + 24 \end{cases}$$

Igualando: $4z + 6 = 2z + 24 \Rightarrow z = 9$

Luego, $y = 12$ y $x = 42$.

Las edades son: Juan, 42 años; Pedro, 12 años; Luis, 9 años.

9. Los 30 alumnos de un grupo de 4º de ESO cursan tres asignaturas optativas distintas: Francés, Cultura Clásica y Energías alternativas. Si dos alumnos de Francés se hubiesen matriculado de Cultura Clásica, entonces estas dos asignaturas tendrían el mismo número de alumnos. Si dos alumnos de Cultura Clásica se hubiesen matriculado en Energías Alternativas, entonces Energías Alternativas tendría doble número de alumnos que Cultura Clásica. Halla el número de alumnos matriculado en cada asignatura.

Solución:

Sean x , y , z los alumnos de Francés, de Cultura Clásica y de Energías Renovables, respectivamente.

La información es:

	Francés (F)	C C	E A	Relación
Alumnos	x	y	z	$x + y + z = 30$
2 de F a C C	$x - 2$	$y + 2$		$x - 2 = y + 2$
2 de C C a E A		$y - 2$	$z + 2$	$z + 2 = 2(y - 2)$

Se tiene el sistema:

$$x + y + z = 30$$

$$x = y + 4$$

$$z = 2y - 6$$

Luego:

$$y + 4 + y + 2y - 6 = 30 \Rightarrow y = 8 \Rightarrow x = 12 \Rightarrow z = 10$$

Hay 12 alumnos matriculados en Francés, 8 en Cultura Clásica y 10 en Energías Renovables.

10. En los tres cursos de una diplomatura hay matriculados un total de 350 alumnos. El número de matriculados en primer curso coincide con los de segundo más el doble de los de tercero. Los alumnos matriculados en segundo más el doble de los de primero superan en 250 al quintuplo de los tercero. Calcula el número de alumnos que hay matriculados en cada curso.

Solución:

Si el número de alumnos en 1º, 2º y 3º es, respectivamente, x , y , z , se tiene:

$$x + y + z = 350$$

$$x = y + 2z$$

$$y + 2x = 5z + 250$$

Esto es:

$$\begin{cases} x + y + z = 350 \\ x - y - 2z = 0 \\ 2x + y - 5z = 250 \end{cases} \quad (\text{por Gauss}) \Rightarrow \begin{matrix} E2 - E1 \\ E3 - 2E1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 350 \\ -2y - 3z = -350 \\ -y - 7z = -450 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 350 \\ -2y - 3z = -350 \\ 2E3 - E2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 350 \\ -2y - 3z = -350 \\ 11z = 550 \end{cases} \Rightarrow z = 50; y = 100; x = 200$$

En primer curso hay 200 alumnos; en segundo hay 100 alumnos; en tercero, 50 alumnos.

11. Tres hermanos quieren reunir 26 euros para comprar un regalo a sus padres. Después de una larga discusión han decidido que el mediano debe poner el doble que el pequeño y el mayor debe poner dos terceras partes de lo que ponga el mediano. ¿Cuánto debe poner cada uno?

Solución:

Si el mayor pone x , el mediano y y el pequeño z euros, se debe cumplir:

$$x + y + z = 26$$

$$y = 2z$$

$$x = 2y/3$$

Sustituyendo, ($y = 2z$; $x = 2 \cdot 2z/3 = 4z/3$) se tiene:

$$x + y + z = 26 \Rightarrow \frac{4z}{3} + 2z + z = 26 \Rightarrow 13z = 78 \Rightarrow z = 6$$

El pequeño pone 6 euros; el mediano, 12 euros; y el mayor 8 euros.

12. Tres jugadores convienen que el que pierda una partida doblará el dinero que en ese momento tengan los otros dos. Después de haber perdido todos ellos una partida, cada jugador se retira con veinte euros. ¿Cuánto dinero tenían al principio del juego?

Solución:

Llamamos J1, J2 y J3 a los jugadores, que tienen al comenzar a jugar x , y , z euros, respectivamente. El juego transcurre como indicamos en la siguiente tabla.

	Situación inicial	Pierde J1	Pierde J2	Pierde J3	Situación final
J1	x	$x - y - z$	$2(x - y - z)$	$4(x - y - z)$	20
J2	y	$2y$	$2y - (x - y - z) - 2z = 3y - x - z$	$2(3y - x - z)$	20
J3	z	$2z$	$4z$	$4z - 2(x - y - z) - (3y - x - z) = 7z - x - y$	20

Se tiene el sistema:

$$\begin{cases} 4(x - y - z) = 20 \\ 2(3y - x - z) = 20 \\ 7z - x - y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = 5 \\ -x + 3y - z = 10 \\ -x - y + 7z = 20 \end{cases} \begin{matrix} \Leftrightarrow \\ E2 + E1 \\ E3 + E1 \end{matrix} \begin{cases} x - y - z = 5 \\ 2y - 2z = 15 \\ -2y + 6z = 25 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = 5 \\ 2y - 2z = 15 \\ 4z = 40 \end{cases} \Rightarrow z = 10; y = 17,5; x = 32,5$$

El jugador J1 tenía 32,5 euros; el segundo, 17,5 euros; el tercero, 10 euros.

Notas: 1. Las partidas las deberá perder siempre el jugador que más dinero tiene. Sólo así podrá doblar la cantidad de los otros dos.

2. Otra posible ecuación sería $x + y + z = 60$.

13. Los 176 niños de una población rural están distribuidos en tres colegios A, B y C. Los matriculados en C suponen la cuarta parte de los matriculados en A, y la diferencia entre el número de alumnos de A y el de alumnos de B es inferior en una unidad al doble de los matriculados en C. Averiguar cuántos niños recibe cada uno de los colegios.

Solución:

Si suponemos que el número de alumnos de los colegios A, B y C son x, y, z, respectivamente, se tiene:

Número de alumnos:

$$x + y + z = 176$$

Relación entre el número de alumnos en los distintos colegios:

$$z = x/4$$

$$x - y = 2z - 1$$

Se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 176 \\ x - 4z = 0 \\ x - y - 2z = -1 \end{cases} \quad (\text{sustituyendo } x = 4z) \Rightarrow \begin{cases} y + 5z = 176 \\ -y + 2z = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\text{Sumando } E1 + E2) \Rightarrow 7z = 175 \Rightarrow z = 25$$

$$\text{Si } z = 25 \Rightarrow y = 51; x = 100.$$

El colegio A tiene 100 alumnos; el colegio B, 51, y el colegio C, 25 alumnos.

14. Tres constructoras invierten en la compra de terrenos de la siguiente forma: la primera invirtió medio millón de euros en terreno urbano, 250.000 euros en terreno industrial y 250.000 euros en terreno rústico. La segunda, invirtió 125.000, 250.000 y 125.000 euros en terreno urbano, industrial y rústico, respectivamente, y la tercera, 100.000, 100.000 y 200.000 euros en estos mismos tipos de terreno, respectivamente. Transcurrido un año, venden todos los terrenos. La rentabilidad que obtiene la primera constructora es del 13,75 %, la de la segunda del 11,25 % y, finalmente, la de la tercera es del 10 %. Determina la rentabilidad de cada uno de los tipos de terreno por separado.

Solución:

Si x, y, z es la rentabilidad de cada uno de los tipos de terreno, urbano, industrial y rustico, respectivamente, se tiene el sistema:

$$500000x + 250000y + 250000z = 13,75(500000 + 250000 + 250000)$$

$$125000x + 250000y + 125000z = 11,25(125000 + 250000 + 125000)$$

$$100000x + 100000y + 200000z = 10(100000 + 100000 + 200000)$$

Simplificando se obtiene:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 55 \\ x + 2y + z = 45 \\ x + y + 2z = 40 \end{cases} \quad \begin{matrix} \Leftrightarrow \\ E2 - E1 \\ E3 - 2E1 \end{matrix} \quad \begin{cases} 2x + y + z = 55 \\ -x + y = -10 \\ -3x - y = -70 \end{cases} \quad \begin{matrix} \Leftrightarrow \\ \\ E3 + E2 \end{matrix} \quad \begin{cases} 2x + y + z = 55 \\ -x + y = -10 \\ -4x = -80 \end{cases}$$

Luego:

$$x = 20 \% ; \quad y = 10 \% ; \quad z = 5 \%$$

15. Un agricultor compra semillas de garbanzos a 1,30 € el kilo, de alubias a 1,20 € el kilo y de lentejas a 0,80 € el kilo. En total compra 45 kilos de semillas y paga por ellas 43 €. Sabiendo que el peso de las lentejas es el doble que lo que pesan, conjuntamente, los garbanzos y las alubias, calcular qué cantidad de semillas ha comprado de cada legumbre.

Solución:

Sean x, y, z los kilogramos comprados de garbanzos, alubias y lentejas, respectivamente.

Debe cumplirse que:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 45 && \rightarrow \text{compra 45 kg} \\ 1,30x + 1,20y + 0,80z &= 43 && \rightarrow \text{paga 43 €} \\ z &= 2(x + y) \end{aligned}$$

Se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 45 \\ 13x + 12y + 8z = 430 \\ 2x + 2y - z = 0 \end{cases} \begin{matrix} \Leftrightarrow \\ E2 - 8E1 \\ E3 + E1 \end{matrix} \begin{cases} x + y + z = 45 \\ 5x + 4y = 70 \\ 3x + 3y = 45 \end{cases} \begin{matrix} \Leftrightarrow \\ \\ 4E3 - 3E2 \end{matrix} \begin{cases} x + y + z = 45 \\ 5x + 4y = 70 \\ -3x = -30 \end{cases}$$

La solución es: $x = 10, y = 5, z = 30$

16. Dividimos un número de tres cifras, "xyz", entre la suma de éstas y obtenemos 20 de cociente y 3 de resto. La cifra de las decenas, "y", es igual a la mitad de la suma de las otras dos. La cifra de las unidades, "z", es igual a la suma de las otras dos. Hallar el número "xyz".

Solución:

A partir del enunciado se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} 100x + 10y + z &= 20(x + y + z) + 3 \\ y &= \frac{x + z}{2} \\ z &= x + y \end{aligned}$$

Esto es, el sistema:
$$\begin{cases} 80x - 10y - 19z = 3 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

Haciendo transformaciones de Gauss:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 80x - 10y - 19z = 3 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} & \begin{matrix} E1 - 80E3 \\ E2 - E3 \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \begin{cases} -90y + 61z = 3 \\ -3y + 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \\ & \begin{matrix} E1 - 30E2 \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \begin{cases} z = 3 \\ -3y + 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 3; y = 2; x = 1 \end{aligned}$$

El número buscado es 123.

17. Se mezclan tres clases de vino de la siguiente manera:

- a) 5 litros de Tenerife, 6 de La Palma y 3 de Lanzarote, resultando una mezcla de 120 pesetas/litro.
 - b) 1 litros de Tenerife, 3 de La Palma y 6 de Lanzarote, dando un vino de 111 pesetas/litro.
 - c) 3 litros de Tenerife, 6 de La Palma y 6 de Lanzarote, dando un vino de 116 pesetas/litro.
- Halla el precio por litro de cada clase de vino.

Solución:

Sean x , y , z el precio, respectivo, del litro de vino de Tenerife, La Palma y Lanzarote.

Con los datos dados, se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} 5x + 6y + 3z = 120 \cdot 14 \\ x + 3y + 6z = 111 \cdot 10 \\ 3x + 6y + 6z = 116 \cdot 15 \end{cases}$$

Multiplicando la tercera ecuación por $\frac{9}{6}$ y restándole las otras dos ecuaciones, queda:

$$\begin{aligned} \frac{9}{6}(3x + 6y + 6z = 1740) - (5x + 6y + 3z = 1680) - (x + 3y + 6z = 1110) &\Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{-3}{2}x = -180 &\Rightarrow x = 120. \end{aligned}$$

Y con esto, $y = 130$, $z = 100$.

18. Un capitán tiene tres compañías: una de suizos, otra de zuavos y una tercera de sajones. Al asaltar una fortaleza promete una recompensa de 901 escudos que se repartirán de la siguiente forma: el soldado que primero suba y todos los de su compañía recibirán un escudo; el resto de la recompensa se repartirá a partes iguales entre el resto de los soldados.

Sabiendo que si el primero que sube es un suizo, los de las demás compañías reciben medio escudo; si el primero es zuavo, los restantes reciben un tercio de escudo, y si el primero es sajón, un cuarto de escudo, ¿cuántos hombres hay en cada compañía?

Solución:

Sean x , y , z el número de suizos, zuavos y sajones, respectivamente.

De acuerdo con el enunciado se tiene:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 901 \\ \frac{1}{3}x + y + \frac{1}{3}z = 901 \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + z = 901 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 1802 \\ x + 3y + z = 2703 \\ x + y + 4z = 3604 \end{cases}$$

Haciendo las transformaciones que se indican, queda:

$$\begin{aligned} E1 - 2E3 &\begin{cases} -y - 7z = -5406 \\ 2y - 3z = -901 \end{cases} & E2 + 2E1 &\begin{cases} -y - 7z = -5406 \\ -17z = -11713 \end{cases} &\Rightarrow z = 689 \\ E2 - E3 &\begin{cases} 2y - 3z = -901 \\ x + y + 4z = 3604 \end{cases} &\Leftrightarrow &\begin{cases} x + y + 4z = 3604 \end{cases} && x = 265 \end{aligned}$$

19. a) Clasifica, en función de los valores del parámetro λ , el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - y + \lambda z = 2 \\ \lambda x + \lambda y - z = 5 \\ (\lambda + 1)x + \lambda y - z = \lambda \end{cases}$$

b) Resuélvelo, si es posible, para $\lambda = 0$.

Solución:

Sea A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada. El sistema tendrá solución cuando $r(A) = r(M)$.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \lambda & 2 \\ \lambda & \lambda & -1 & 5 \\ \lambda + 1 & \lambda & -1 & \lambda \end{array} \right) = M$$

El determinante de A , $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -1 \\ \lambda + 1 & \lambda & -1 \end{vmatrix} = 1 - \lambda^2$

Con esto:

• Si $\lambda \neq \pm 1 \Rightarrow r(A) = 3 = r(M)$. El sistema será compatible determinado.

• Si $\lambda = -1$, las matrices quedan: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right) = M$

El menor $M_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 9$

Luego: $r(A) = 2, r(M) = 3 \rightarrow$ el sistema es incompatible.

• Si $\lambda = 1$, las matrices quedan: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) = M$

El menor $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -15$

Luego: $r(A) = 2, r(M) = 3 \rightarrow$ el sistema es incompatible.

b) Para $\lambda = 0$, el sistema queda: $\begin{cases} x - y = 2 \\ -z = 5 \\ x - z = 0 \end{cases}$

cuya solución es $\begin{cases} x = -5 \\ y = -7 \\ z = -5 \end{cases}$.

20. Sea el sistema homogéneo de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ ax - y + z = 0 \\ x + 2ay - z = 0 \end{cases}$$

- a) Determina el valor o valores del parámetro a para que el sistema tenga soluciones distintas de la nula.
b) Resuelve el sistema para el valor o valores de a hallados en el apartado anterior.

Solución:

- a) El sistema tiene solución distinta de la nula para aquellos valores de a que hagan que el determinante de la matriz de coeficientes sea cero.

La matriz de coeficientes, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ a & -1 & 1 \\ 1 & 2a & -1 \end{pmatrix}$, tiene por determinante,

$$|A| = -4a^2 - a = -a(4a + 1)$$

que vale 0 cuando $a = 0$ o $a = -\frac{1}{4}$

Por tanto:

- si $a \neq 0$ y $a \neq -\frac{1}{4}$, el sistema tendrá solución única, la nula: $x = 0, y = 0, z = 0$.
- si $a = 0$ o $a = -\frac{1}{4}$, el sistema tendrá soluciones distintas de la nula.

- b) Para $a = 0$ o $a = -\frac{1}{4}$, el rango de la matriz A es 2, pues el menor $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, las soluciones dependerán de una indeterminada.

Para $a = 0$ el sistema inicial es equivalente a:

$$\begin{cases} -y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = z \\ x = z \end{cases} \Rightarrow (\text{haciendo } z = t) \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

Para $a = -\frac{1}{4}$, el sistema inicial es equivalente a: $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -\frac{1}{4}x - y + z = 0 \\ x - \frac{2}{4}y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -x - 4y + 4z = 0 \\ 2x - y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 2z \\ 2x - y = 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 2z \\ 3x = 4z \end{cases} \Rightarrow (\text{haciendo } z = 3t) \begin{cases} x = 4t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}$$