NOMBRE: ____

1) Clasifique el siguiente sistema de ecuaciones y resuélvalo, si es posible. Además, si tuviera más de una solución, diga dos de ellas concretas:

$$\left.\begin{array}{r} 3x-y-z=0 \\ 2x-2y+z=\ \ 18 \\ 5x+y-5z=-36 \end{array}\right\}$$

(4 puntos)

2) *(2009)* Sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\quad \text{y}\quad C=\begin{pmatrix} 5 & -2 & -6 \\ 0 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Determine X en la ecuación matricial $X{\cdot}A-2B=C$. *(4 puntos)*

3) Las conexiones por carretera entre cuatro lugares del Pirineo Aragonés, denominadas Escalona (E), Puyarruego (P), Añisclo (A) y Buerba (B) vienen indicadas mediante la matriz de adyacencia siguiente:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} E & P & A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} E \\ P \\ A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Construya, en forma de grafo, un esquema del mapa de carreteras con las conexiones entre dichos lugares, indicando los sentidos de circulación en cada tramo, según lo representado en dicha matriz. *(2 puntos)*

1) Clasifique el siguiente sistema de ecuaciones y resuélvalo, si es posible. Además, si tuviera más de una solución, diga dos de ellas concretas:

$$\left.\begin{aligned} 3x-y-z&=0\\ 2x-2y+z&=\ \ 18\\ 5x+y-5z&=-36\end{aligned}\right\}$$ *(4 puntos)*

Triangularizamos, por Gauss, la *matriz ampliada*:

$$A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -1 & 0\\ 2 & -2 & 1 & 18\\ 5 & 1 & -5 & -36\end{array}\right)\xrightarrow[F_3+F_1]{F_2-2F_1}\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -1 & 0\\ -4 & 0 & 3 & 18\\ 8 & 0 & -6 & -36\end{array}\right)\xrightarrow{F_3+2F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -1 & 0\\ -4 & 0 & 3 & 18\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

La matriz está triangularizada (en la columna 2 hay ceros en todas las posiciones menos la de la primera fila; desechando dicha fila, en la columna 1 hay 0 en todas las posiciones menos en la segunda fila). Ninguna fila es toda de ceros menos la posición correspondiente a los términos independientes (última columna), por lo que no es incompatible. Y la tercera fila es toda de ceros, con lo que debe ser combinación lineal del resto y hay que desecharla. Por tanto, $r(A) = r(A') = 2 <$ nº de incógnitas, con lo que estamos ante un $\boxed{\text{sistema compatible indeterminado}}$, con infinitas soluciones.

Llamamos $z = t$ (le damos un valor arbitrario y fijo a una de las incógnitas, que no sea y, porque en ella hay uno de los 0 de la triangularización y nos resultaría algo más largo resolver la ecuación, aunque también lo conseguiríamos). Pasándola al segundo miembro, el sistema será:

$$\left.\begin{aligned} 3x-y&=t\\ -4x\quad&=18-3t\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{aligned} &2^{\text{a}}\,ec: \quad x=\frac{3t-18}{4}\\ &1^{\text{a}}\,ec: \quad y=3\frac{3t-18}{4}-t=\frac{9t-54-4t}{4}=\frac{5t-54}{4}\end{aligned}$$

La forma de las infinitas soluciones es: $\boxed{\left(\frac{3t-18}{4},\ \frac{5t-54}{4},\ t\right)}$

Por último, nos piden dos soluciones concretas:

- $t = 2$: $\boxed{(-3, -11, 2)}$
- $t = -2$: $\boxed{(-6, -16, -2)}$

2) *(2009)* Sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 4 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\quad \text{y}\quad C=\begin{pmatrix} 5 & -2 & -6\\ 0 & -3 & 2\\ -2 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Determine X en la ecuación matricial $X·A - 2B = C$. *(4 puntos)*

Suponiendo que $\exists A^{-1}$, podemos realizar las siguientes operaciones matriciales para despejar X en la ecuación, donde $O \equiv$ *matriz nula*, $I \equiv$ *matirz unidad*:

$$X·A-2B=C \ \Rightarrow\ X·A-2B+2B=C+2B \ \Rightarrow\ X·A+O=C+2B \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ X\cdot A = C + 2B \ \Rightarrow\ X\cdot A\cdot A^{-1} = (C+2B)\cdot A^{-1} \ \Rightarrow\ X\cdot I = (C+2B)\cdot A^{-1} \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ \boxed{X = (C+2B)\cdot A^{-1}}$$

Efectuemos dichas operaciones. Comenzamos calculando la *inversa* de A, porque si no existiera no sería posible:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1 \neq 0 \ \Rightarrow\ \exists A^{-1}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \ \Rightarrow\ \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} -2 & -9 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 13 & 1 \end{pmatrix} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\text{Adj}(A^t) = -1\begin{pmatrix} -2 & -9 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 13 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 9 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & -13 & -1 \end{pmatrix}}$$

$$C + 2B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -6 \\ 0 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -6 \\ 0 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Ha resultado ser la *matriz identidad* de orden 3. Por tanto:

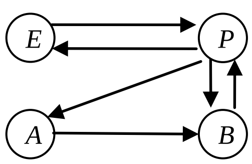
$$X = (C+2B)\cdot A^{-1} = I\cdot A^{-1} = A^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 9 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & -13 & -1 \end{pmatrix}}$$

3) Las conexiones por carretera entre cuatro lugares del Pirineo Aragonés, denominadas Escalona (E), Puyarruego (P), Añisclo (A) y Buerba (B) vienen indicadas mediante la matriz de adyacencia siguiente:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} E & P & A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} E \\ P \\ A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Construya, en forma de grafo, un esquema del mapa de carreteras con las conexiones entre dichos lugares, indicando los sentidos de circulación en cada tramo, según lo representado en dicha matriz. *(2 puntos)*

Si $a_{ij} = 1 \ \Rightarrow$ Hay conexión desde el elemento que representa la fila i al correspondiente a la fila j. No la hay cuando dicho elemento vale 0. Por tanto, el grafo solicitado es:



NOMBRE: ____

1) Clasifique el siguiente sistema de ecuaciones y resuélvalo, si es posible. Además, si tuviera más de una solución, diga dos de ellas concretas:

$$\left.\begin{array}{r} -4x+4y+3z=1 \\ -5x+3y+2z=-1 \\ -2x+6y+5z=5 \end{array}\right\}$$

(2,5 puntos)

2) (Junio 2001) Para fabricar 2 tipos de cable, A y B, que se venderán a 1€ y 0,60€ el metro, respectivamente, se emplean 16 kg de plástico y 4 kg de cobre para cada hm (hectómetro) del tipo A y 6 kg de plástico y 12 kg de cobre para cada hm del tipo B.
Sabiendo que la longitud de cable fabricado del tipo B no puede ser mayor que el doble de la del tipo A y que, además, no pueden emplearse más de 252 kg de plástico ni más de 168 kg de cobre, determine la longitud, en hm, de cada tipo de cable que debe fabricarse para que la cantidad de dinero obtenida en su venta sea máxima, y a cuánto asciende ésta. *(3,5 puntos)*

3) (2012) a) En un problema de programación lineal, la región factible es la región acotada cuyos vértices son $A(2, -1)$, $B(-1, 2)$, $C(1, 4)$ y $D(5, 0)$. La función objetivo es la función $f(x, y) = 2x + 3y + k$, cuyo valor máximo, en dicha región, es igual a 19. Calcule el valor de k e indique dónde se alcanza el máximo y dónde el mínimo. *(2 puntos)*

b) Sean las matrices $A = (1 \;\; -2 \;\; 3)$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Resuelva, si es posible, la ecuación matricial $B \cdot A + 2X = C$. *(2 puntos)*

SOLUCIONES

1) Clasifique el siguiente sistema de ecuaciones y resuélvalo, si es posible. Además, si tuviera más de una solución, diga dos de ellas concretas:

$$\left.\begin{aligned} -4x+4y+3z&=1\\ -5x+3y+2z&=-1\\ -2x+6y+5z&=5 \end{aligned}\right\}$$

(2,5 puntos)

Escribimos la matriz ampliada y la triangularizamos, haciendo las transformaciones lineales de filas indicadas:

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 & 3 & 1\\ -5 & 3 & 2 & -1\\ -2 & 6 & 5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[2F_3-5F_2]{2F_1-3F_2} \begin{pmatrix} 7 & -1 & 0 & 5\\ -5 & 3 & 2 & -1\\ 21 & -3 & 0 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-3F_1} \begin{pmatrix} 7 & -1 & 0 & 5\\ -5 & 3 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ya está triangularizada (una columna, la 3, tiene 0 en todas las posiciones menos en una; otra, la 2, aunque también la 1 –mejor aún–, tiene 0 en todas las posiciones en las que C_3 los tiene, menos una. Y son 2 columnas = nº de filas – 1). Como F_3 está compuesta completamente de 0, la eliminamos. Y ninguna fila tiene 0 en todas las posiciones menos en la de la última columna, por lo que no es incompatible. Así, es *compatible*, y como quedan menos filas (ecuaciones) que incógnitas, *compatible indeterminado*, con infinitas soluciones.

Veamos la estructura de éstas. Para ello, reconstruimos el sistema, llamamos $x = t$, siendo t cualquier número real libremente elegido por nosotros, y lo pasamos al segundo miembro, resolviendo el sistema que resulta (también podríamos haber llamado $y = t$, pero no lo debemos hacer con z, porque está en una de las columnas donde hemos obtenido 0 y nos dará más trabajo al resolver):

$$\left.\begin{aligned} 7x-y\qquad\quad &=5\\ -5x+3y+2z&=-1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} -y&=5-7t\\ 3y+2z&=-1+5t \end{aligned}\right\}$$

De donde:

1ª ec: $y = 7t - 5$

2ª ec: $3(7t-5) + 2z = -1 + 5t \ \Rightarrow\ 21t - 15 + 2z = -1 + 5t \ \Rightarrow$

$$2z = -1 + 5t - 21t + 15 \ \Rightarrow\ z = \frac{14-16t}{2} = 7 - 8t$$

Luego las infinitas soluciones tienen la estructura siguiente, en función de t:

$$\boxed{(t,\ 7t-5,\ 7-8t)}$$

Dos soluciones concretas son:

- Para $t = 0$: $(0, -5, 7)$
- Para $t = 1$: $(1, 2, -1)$

2) (Junio 2001) Para fabricar 2 tipos de cable, A y B, que se venderán a 1€ y 0,60€ el metro, respectivamente, se emplean 16 kg de plástico y 4 kg de cobre para cada hm (hectómetro) del tipo A y 6 kg de plástico y 12 kg de cobre para cada hm del tipo B.

Sabiendo que la longitud de cable fabricado del tipo B no puede ser mayor que el doble de la del tipo A y que, además, no pueden emplearse más de 252 kg de plástico ni más de 168 kg de cobre, determine la longitud, en hm, de cada tipo de cable que debe fabricarse para que la cantidad de dinero obtenida en su venta sea máxima, y a cuánto asciende ésta. *(3,5 puntos)*

Planteamos el problema, con ayuda del siguiente cuadro:

	Cantidad a fabricar (hm)	Plástico empleado (kg)	Cobre empleado (kg)
Tipo A	x	$16x$	$4x$
Tipo B	y	$6y$	$12y$
Limitaciones:	$x \geq 0$ $y \geq 0$ $y \leq 2x$	$16x + 6y \leq 252$	$4x + 12y \leq 168$

Además, la función objetivo, que hay que *maximizar* es (hay que convertir el precio que nos dan por metros a precio por hm):

$$F(x, y) = 100x + 60y$$

Las restricciones, simplificadas, son:

$$x \geq 0; \quad y \geq 0; \quad y \leq 2x; \quad 8x + 3y \leq 126; \quad x + 3y \leq 42$$

Dibujamos el gráfico. Para ello, en cada inecuación cambiamos la desigualdad por un igual, representamos la recta correspondiente haciendo $x = 0$ y calculando el correspondiente valor de y, y llamando $y = 0$ y averiguando su pareja x. Para $y = 2x$ necesitamos un valor adicional, por ejemplo, $x = 8$ que conlleva que $y = 16$. Así, llegamos al gráfico que se muestra más abajo.

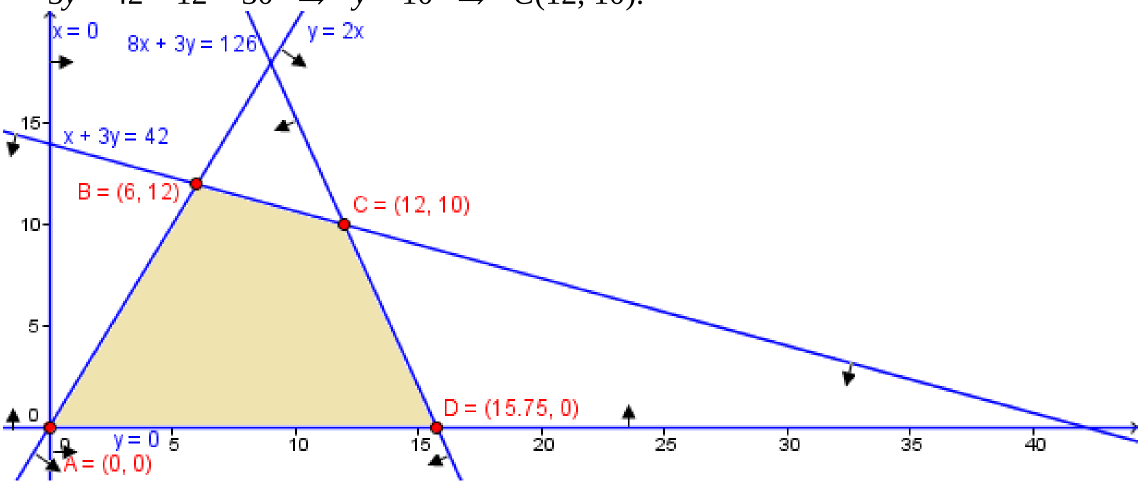
Sobre cada recta, marcamos con unas flechitas la zona que soluciona la inecuación correspondiente. Para ello, podemos despejar en la misma y, y si queda $y \leq$ *resto de la ecuación*, nos interesa el semiplano que queda bajo la recta; y el otro, en caso contrario. También podemos elegir cualquier punto del plano que no esté sobre la recta y ver si verifica la inecuación: en caso afirmativo, el semiplano que contiene al punto elegido es la solución, y el otro, en caso contrario.

Los vértices donde se cortan las distintas rectas determinan la *región factible*, que es la que verifica todas las inecuaciones simultáneamente. Los calculamos. A y D han sido obtenidos al dibujar las rectas correspondientes, porque lo hemos hecho averiguando sus cortes con los ejes. Pero los otros dos, hay que hallarlos, lo que nunca puede hacerse a partir del gráfico, porque la exactitud estaría en entredicho. Los hallamos:

B: $\left.\begin{array}{r} y = 2x \\ x + 3y = 42 \end{array}\right\} \Rightarrow x + 3 \cdot 2x = 42 \Rightarrow 7x = 42 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow y = 12$: $B(6, 12)$.

C: $\left.\begin{array}{r} 8x + 3y = 126 \\ x + 3y = 42 \end{array}\right\}$ Restando: $7x = 84 \Rightarrow x = 12 \Rightarrow$ Sustituyendo en la 2ª ec:

$3y = 42 - 12 = 30 \Rightarrow y = 10 \Rightarrow C(12, 10)$.



La solución de un problema de este tipo está sobre un vértice de la *región factible* o sobre dos consecutivos y todos los puntos del segmento que los une. Para ello, lo más cómodo es averiguar el valor de la *función objetivo* en cada vértice: el mayor valor obtenido, la maximiza, y el menor, la minimiza. Si hay empate, los dos vértices implicados y el segmento que los une son la solución. Así:

- $F(0, 0) = 0$
- $F(6, 12) = 100·6 + 60·12 = 1320$
- $F(12, 10) = 100·12 + 60·10 = 1800$
- $F(15.75, 0) = 100·15.75 = 1575$

Por tanto, la máxima venta se obtiene fabricando 12 hm del tipo A y 10 hm del tipo B, ascendiendo a 1800€.

3) (2012) a) En un problema de programación lineal, la región factible es la región acotada cuyos vértices son $A(2, -1)$, $B(-1, 2)$, $C(1, 4)$ y $D(5, 0)$. La función objetivo es la función $f(x, y) = 2x + 3y + k$, cuyo valor máximo, en dicha región, es igual a 19. Calcule el valor de k e indique dónde se alcanza el máximo y dónde el mínimo. *(2 puntos)*

Como:

$f(A) = f(2, -1) = 2·2 + 3(-1) + k = 1 + k = 19 \Rightarrow k = 18$
$f(B) = f(-1, 2) = 2·(-1) + 3·2 + k = 4 + k = 19 \Rightarrow k = 15$
$f(C) = f(1, 4) = 2·1 + 3·4 + k = 14 + k = 19 \Rightarrow k = 5$
$f(D) = f(5, 0) = 2·5 + 3·0 + k = 10 + k = 19 \Rightarrow k = 9$

hay que concluir que k toma el valor más pequeño: $\boxed{k = 5}$ pues, de lo contrario, f tomaría un valor mayor que 19 en algún vértice. Es decir:

- Si $k = 18 \Rightarrow f(A) = 1 + 18 = 19$, pero $f(B) = 4 + 18 = 22$, con lo que ya no sería 19 el máximo.
- Si $k = 15 \Rightarrow f(A) = 1 + 15 = 16$; $f(B) = 4 + 15 = 19$; pero $f(C) = 14 + 15 = 29$.
- Si $k = 9 \Rightarrow f(A) = 1 + 9 = 10$; $f(B) = 4 + 9 = 13$; pero $f(C) = 14 + 9 = 23$.

Para $k = 5$:

$f(A) = f(2, -1) = 1 + 5 = 6$
$f(B) = f(-1, 2) = 4 + 5 = 9$
$f(C) = f(1, 4) = 14 + 5 = 19$
$f(D) = f(5, 0) = 10 + 5 = 15$

por lo que el máximo se alcanza en $C(1, 4)$ y vale 19, y el mínimo en $A(2, -1)$ y vale 6.

b) Sean las matrices $A = (1 \ \ -2 \ \ 3)$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Resuelva, si es posible, la ecuación matricial $B·A + 2X = C$. *(2 puntos)*

$B·A + 2X = C \Rightarrow B·A + 2X - B·A = C - B·A \Rightarrow B·A - B·A + 2X = C - B·A$

$\Rightarrow 2X = C - B·A \Rightarrow \boxed{X = \frac{1}{2}(C - B·A)}$

Realizamos dichos cálculos.

$$C - B\cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ \ -2 \ \ 3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 4 & -7 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto: $X = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 4 & -7 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 2 & -7/2 \\ 1 & -1/2 & 1 \\ 0 & 5/2 & -1/2 \end{pmatrix}}$

NOMBRE: ____

1) a) Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Determine la matriz X que verifica $B \cdot X = 3A + A^t$. *(1,5 puntos)*

b) Calcule la matriz Y que verifica $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -6 \end{pmatrix}$. *(1 punto)*

2) Un fabricante elabora dos tipos de anillos a base de oro y plata. Cada anillo del primer tipo precisa 4 g de oro y 2 de plata, mientras que cada uno del segundo necesita 3 g de oro y 1 de plata. Sabiendo que dispone de 48 g de oro y 20 de plata y que los precios de venta de cada tipo de anillo son 150 euros el primero y 100 euros el segundo, ¿cuántos anillos de cada tipo tendría que producir para obtener los ingresos máximos? ¿A cuánto ascenderían estos ingresos? *(3 puntos)*

3) Clasifique y resuelva el sistema formado por las tres ecuaciones siguientes, y si tuviera más de una solución, escribir dos soluciones concretas: *(2,5 puntos)*

$$x - 3y + 2z = 0; \quad -2x + y - z = 0; \quad x - 8y + 5z = 0$$

4) Una empresa vende tres artículos diferentes A, B y C, cada uno de ellos en dos formatos, grande y normal. En la matriz F se indican las cantidades de los tres artículos, en cada uno de los dos formatos, que ha vendido la empresa en un mes. En la matriz G se indican las ganancias, en euros, que obtiene la empresa por cada unidad que ha vendido de cada artículo en cada formato

$$F = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 100 & 150 & 80 \\ 200 & 250 & 140 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{grande} \\ \leftarrow \text{normal} \end{array} \qquad G = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 6 & 8 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{grande} \\ \leftarrow \text{normal} \end{array}$$

a) Efectúe los productos $F^t \cdot G$ y $F \cdot G^t$. *(1 punto)*

b) Indique en qué matriz se pueden encontrar las ganancias que ha recibido la empresa en ese mes por el total de las unidades vendidas de cada uno de los tres artículos y especifique cuáles son esas ganancias. *(0,5 puntos)*

c) Indique en qué matriz se pueden encontrar las ganancias que ha recibido la empresa en ese mes por el total de las unidades vendidas en cada uno de los dos formatos, especifique cuáles son esas ganancias y halle la ganancia total. *(0,5 ptos)*

SOLUCIONES

1) a) Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Determine la matriz X que verifica $B \cdot X = 3A + A^t$. *(1,5 puntos)*

Comenzamos despejando X en la ecuación matricial:

$$B \cdot X = 3A + A^t \Rightarrow B^{-1} \cdot B \cdot X = B^{-1}(3A + A^t) \Rightarrow I \cdot X = B^{-1}(3A + A^t) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boxed{X = B^{-1}(3A + A^t)}$$

Por tanto, vamos a poder resolver el problema si existe la inversa de B. Comenzaremos, pues, por ahí:

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists B^{-1}$$

$$B^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj}(B^t) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|}\text{Adj}(B^t) = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}}$$

Por tanto:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\left[3\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 15 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right] =$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 16 & 8 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 8 & 8 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}}$$

b) Calcule la matriz Y que verifica $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -6 \end{pmatrix}$. *(1 punto)*

Como la primera matriz es 3×2 y el resultado del producto es una matriz 3×1, la matriz intermedia I debe ser 2×1: debe tener dos filas para poder ser multiplicada por la primera matriz, a la derecha de ella, y debe tener una columna para que el resultado tenga una columna. Es decir:

$$Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Efectuando, entonces, el producto:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x+5y \\ x-5y \\ 2x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} 2x+5y &= 6 \\ x-5y &= -12 \\ 2x-y &= -6 \end{aligned}\right\}$$

Vamos a resolver el sistema por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & -5 & -12 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - 2F_2]{F_1 - 2F_2} \begin{pmatrix} 0 & 15 & 30 \\ 1 & -5 & -12 \\ 0 & 9 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow{3F_1 - 5F_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & -12 \\ 0 & 9 & 18 \end{pmatrix}$$

Por lo que, una vez triangularizada la matriz, podemos eliminar la primera fila, resultando un sistema triangularizado de dos ecuaciones con dos incógnitas, es decir, *compatible determinado*, con solución única. Reconstruimos el sistema y lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{r} x-5y=-12 \\ 9y=\;\;18 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 2^{a}\,ec:\;\; y=2 \\ 1^{a}\,ec:\;\; x-10=-12 \Rightarrow x=-2 \end{array}$$

Con lo que tenemos que:

$$\boxed{Y=\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}}$$

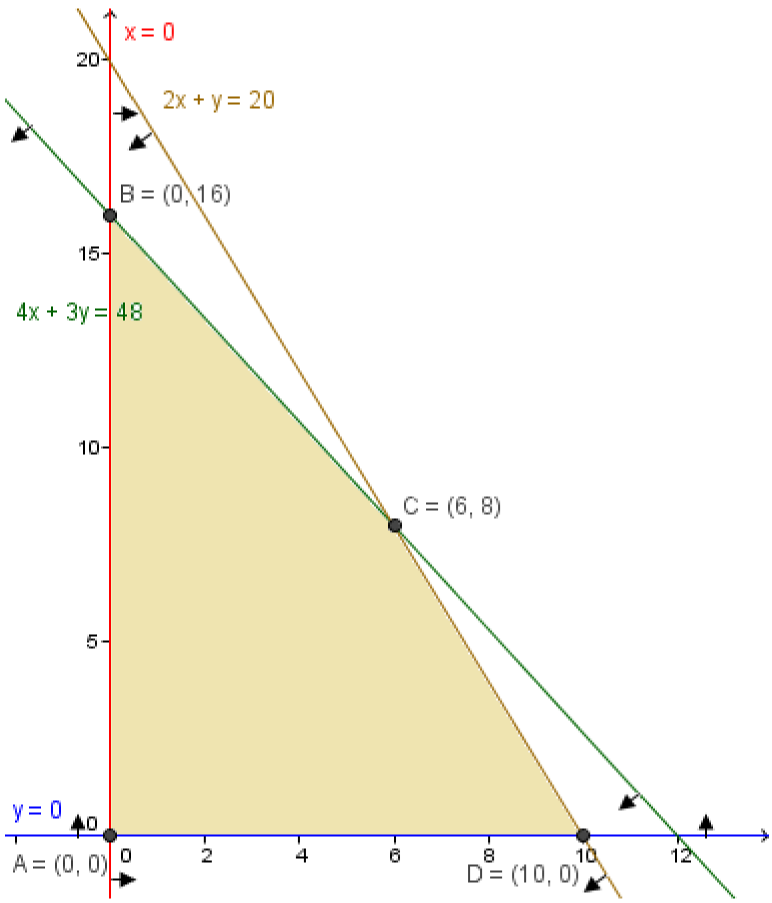
2) Un fabricante elabora dos tipos de anillos a base de oro y plata. Cada anillo del primer tipo precisa 4 g de oro y 2 de plata, mientras que cada uno del segundo necesita 3 g de oro y 1 de plata. Sabiendo que dispone de 48 g de oro y 20 de plata y que los precios de venta de cada tipo de anillo son 150 euros el primero y 100 euros el segundo, ¿cuántos anillos de cada tipo tendría que producir para obtener los ingresos máximos? ¿A cuánto ascenderían estos ingresos? *(3 puntos)*

Planteamos el problema de Programación Lineal:

	Cantidad a fabricar	Oro empleado (g)	Plata empleada (g)
Tipo A	x	$4x$	$2x$
Tipo B	y	$3y$	y
Restricciones:	$x \ge 0 \quad y \ge 0$	$4x + 3y \le 48$	$2x + y \le 20$

Función objetivo (ingresos en €): $F(x, y) = 150x + 100y$ (maximizar)

Dibujamos la *región factible*, trazando las gráficas de las rectas que resultan de cambiar el signo de desigualdad por un = en cada una de las cuatro restricciones y dando a $x = 0$ y hallando el correspondiente valor de y, así como $y = 0$ y el correspondiente x, para averiguar los puntos de corte de las dos últimas rectas con los ejes de coordenadas. Las dos primeras rectas son los ejes OY y OX respectivamente. Después, despejando y en las dos últimas inecuaciones, sabemos que el semiplano solución de cada una de ellas es el que queda bajo la recta correspondiente, ya que en ambas tenemos $y \le recta$. Las dos primeras inecuaciones nos restringen al primer cuadrante.



A continuación, hallamos las coordenadas de los vértices de la *región factible*. Los cortes con los ejes los hemos averiguado al trazar las gráficas, por lo que el único punto que nos queda es la intersección de las rectas correspondientes a las dos últimas inecuaciones, que es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} 4x+3y=48 \\ 2x+y=20 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ll} \cdot 1: & 4x+3y=\ \ 48 \\ \cdot(-3): & \underline{-6x-3y=-60} \\ Sumando: -2x & =-12 \Rightarrow x=6 \end{array}$$

Sust. en la 2ª:
$12 + y = 20 \Rightarrow$
$\Rightarrow y = 8$

El punto es (6, 8).

Calculamos el valor de la *función objetivo* en cada vértice:

$F(A) = F(0, 0) = 150\cdot0 + 100\cdot0 = 0$
$F(B) = F(0, 16) = 150\cdot0 + 100\cdot16 = 1600$
$F(C) = F(6, 8) = 150\cdot6 + 100\cdot8 = 1700$
$F(D) = F(10, 0) = 150\cdot10 + 100\cdot0 = 1500$

Lo que nos lleva a concluir que el máximo ingreso lo va a obtener con la fabricación de $\boxed{\text{6 anillos del tipo } A \text{ y 8 del tipo } B}$, y que $\boxed{\text{dicho ingreso es de 1700€}}$.

3) Clasifique y resuelva el sistema formado por las tres ecuaciones siguientes, y si tuviera más de una solución, escribir dos soluciones concretas: *(2,5 puntos)*

$$x - 3y + 2z = 0; \quad -2x + y - z = 0; \quad x - 8y + 5z = 0$$

El sistema es:

$$\left.\begin{array}{r} x-3y+2z=0 \\ -2x+\ \ y-\ \ z=0 \\ x-8y+5z=0 \end{array}\right\}$$

Es *homogéneo*, puesto que los términos independientes son todos 0. Por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -8 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \rightarrow \\ F_2+2F_1 \\ F_3-F_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \rightarrow \\ F_3-F_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ya está triangularizado, y la última fila es toda ella de 0, por lo que la eliminamos. No hay ninguna fila completa de ceros salvo la última columna, por lo que es compatible. Y como quedan menos ecuaciones (2) que incógnitas (3), es un <u>*sistema homogéneo compatible indeterminado*</u>, con infinitas soluciones. Lo reconstruimos, para hallarlas:

$$\left.\begin{array}{r} x-3y+2z=0 \\ -5y+3z=0 \end{array}\right\} \text{ Llamamos } z=t: \left.\begin{array}{r} x-3y=-2t \\ 5y=3t \end{array}\right\}$$

2ª ec: $y = 3t/5$
1ª ec: $x = -2t + 9t/5 = -t/5$

Luego la forma general de las infinitas soluciones es: $\boxed{(-t/5,\ 3t/5,\ t)}$. Si usamos $k = 5t$, podemos prescindir de denominadores: $\boxed{(-k,\ 3k,\ 5k)}$.

Dando valores a k obtendremos dos soluciones concretas, como nos piden:

- $k = 0 \Rightarrow (0, 0, 0)$
- $k = 1 \Rightarrow (-1, 3, 5)$

4) Una empresa vende tres artículos diferentes A, B y C, cada uno de ellos en dos formatos, grande y normal. En la matriz F se indican las cantidades de los tres artículos, en cada uno de los dos formatos, que ha vendido la empresa en un mes. En la matriz G se indican las ganancias, en euros, que obtiene la empresa por cada unidad que ha vendido de cada artículo en cada formato

$$F = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 100 & 150 & 80 \\ 200 & 250 & 140 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{grande} \\ \leftarrow \text{normal} \end{array} \qquad G = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 6 & 8 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{grande} \\ \leftarrow \text{normal} \end{array}$$

a) Efectúe los productos $F^t \cdot G$ y $F \cdot G^t$. *(1 punto)*

$$F^t \cdot G = \begin{pmatrix} 100 & 200 \\ 150 & 250 \\ 80 & 140 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 8 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1400 & 1800 & 1100 \\ 1900 & 2450 & 1500 \\ 1040 & 1340 & 820 \end{pmatrix}}$$

$$F \cdot G^t = \begin{pmatrix} 100 & 150 & 80 \\ 200 & 250 & 140 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2200 & 1390 \\ 3900 & 2470 \end{pmatrix}}$$

b) Indique en qué matriz se pueden encontrar las ganancias que ha recibido la empresa en ese mes por el total de las unidades vendidas de cada uno de los tres artículos y especifique cuáles son esas ganancias. *(0,5 puntos)*
Están en la primera de estas dos matrices, y son los elementos de la diagonal principal: $\boxed{\text{1400€ por } A\text{, 2450€ por } B \text{ y 820€ por } C}$.

c) Indique en qué matriz se pueden encontrar las ganancias que ha recibido la empresa en ese mes por el total de las unidades vendidas en cada uno de los dos formatos, especifique cuáles son esas ganancias y halle la ganancia total. *(0,5 ptos)*
Se encuentran en la segunda de las matrices, en su diagonal principal, y ascienden a $\boxed{\text{2200€ por el formato grande, y 2470€ por el normal}}$. Por otra parte, tenemos que: $\boxed{2200 + 2470 = 4670\text{€ es la ganancia total}}$.