DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

La mayoría de estos problemas han sido propuestos en exámenes de selectividad de los distintos distritos universitarios españoles.

---

1. Un examen consta de 6 preguntas con 4 posibles respuestas cada una, de las que sólo una de ellas es correcta. Un estudiante que no se había preparado la materia responde completamente al azar marcando una respuesta aleatoriamente. Calcula la probabilidad de que acierte 4 o más preguntas.

Solución:
Se trata de una distribución de probabilidad binomial, B(n, p), con n = 6, p = P(acierto) = 0,25 y q = P(fallo) = 0,75.

Como se sabe, para la B(n, p), la probabilidad de r aciertos en n intentos es:

$$P(X=r)=\binom{n}{r}p^r q^{n-r}$$

En este caso:

P(X ≥ 6) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) =

$$=\binom{6}{4}0{,}25^4\cdot 0{,}75^2+\binom{6}{5}0{,}25^5\cdot 0{,}75+\binom{6}{6}0{,}25^6=$$

$$=15\cdot 0{,}25^4\cdot 0{,}75^2+6\cdot 0{,}25^5\cdot 0{,}75+0{,}24^6=0{,}03296+0{,}00439+0{,}00024=0{,}03759$$

2. La probabilidad de que un cazador novato cobre una pieza es 0,4. Si lo intenta 5 veces, calcula la probabilidad de que cobre una pieza al menos 3 veces.

Solución:
Se trata de una distribución de probabilidad binomial:

B(5, 0,4) $\rightarrow$ n = 5; p = 0,4; q = 0,6

Como sabemos, para la B(n, p), la probabilidad de r aciertos en n intentos es:

$$P(X=r)=\binom{n}{r}p^r q^{n-r}$$

En este caso:

P(X ≥ 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) =

$$=\binom{5}{3}0{,}4^3\cdot 0{,}6^2+\binom{5}{4}0{,}4^4\cdot 0{,}6+\binom{5}{5}0{,}4^5=$$

$$=10\cdot 0{,}4^3\cdot 0{,}6^2+5\cdot 0{,}4^4\cdot 0{,}6+0{,}4^5=0{,}2304+0{,}0768+0{,}01024=0{,}31744$$

3. Un examen de tipo test consta de 100 preguntas, cada una de las cuales se acompaña de cuatro respuestas, una de ellas correcta y erróneas las otras tres. Si un estudiante contesta al azar, ¿cuál es la probabilidad de que acierte más de 30 preguntas? ¿Y menos de 15?

Solución:
El experimento es de tipo binomial, con P(éxito) = p = 0,25 y q = 0,75. Para n = 100, será B(100, 0,25).

La binomial B(100, 0,25) se puede aproximar mediante la normal de media

$$\mu = 100 \cdot 0{,}25 = 25 \text{ y } \sigma = \sqrt{100 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75} = 4{,}33 \quad \to \quad N(25,\ 4{,}33).$$

Con esto,

- P(X > 30) = P(X´ > 30,5), haciendo la corrección de continuidad.
  $P(X´ > 30{,}5) = P\left(Z > \dfrac{30{,}5 - 25}{4{,}33}\right) = P(Z > 1{,}27) = 1 - 0{,}8980 = 0{,}1020.$

- $P(X < 15) = P(X´ < 14{,}5) = P\left(Z < \dfrac{14{,}5 - 25}{4{,}33}\right) = P(Z < -2{,}42) = 1 - 0{,}9922 = 0{,}0078$

DISTRIBUCIÓN NORMAL

4. Una persona que desea encontrar trabajo se presenta a dos entrevistas en las empresas A y B. En la entrevista de la empresa A obtiene una puntuación de 9, con una media de puntuación de 7 para la totalidad de los candidatos y una varianza de 4. En la entrevista de la empresa B obtiene una puntuación de 8, con una media de puntuación de 6 para la totalidad de los candidatos y una desviación típica de 1,5 ¿En qué entrevista ha obtenido esa persona una mejor puntuación relativa?

Solución:
Si se supone que la puntuación de los candidatos se distribuye normalmente en ambos casos, tendrá una puntuación mejor en la entrevista que más se aleje en desviaciones típicas de la media correspondiente.

En la empresa A:

$\bar{x}_A = 7$; $\sigma_A = 2 \rightarrow$ (la desviación típica es la raíz cuadrada de la varianza).

Si su puntuación ha sido 9, está una desviación típica por encima de la media.

En la empresa B:

$\bar{x}_B = 6$; $\sigma_B = 1,5$

Si su puntuación ha sido 8, es 2 : 1,5 = 1,33 desviaciones típicas superior a la media.

Por tanto, su puntuación relativa ha sido mejor en la empresa B.

NOTA: Podría calcularse la probabilidad de que otro candidato esté por debajo de él en cada una de las empresas.

En la empresa A: $\quad P(X < 9) = P\left(Z < \frac{9-7}{2}\right) = P(Z < 1) = 0{,}8413$

En la empresa B: $\quad P(X < 8) = P\left(Z < \frac{8-6}{1{,}5}\right) = P(Z < 1{,}33) = 0{,}9082$

5. La talla de los recién nacidos se distribuye normalmente, pero mientras que en la Comunidad Autónoma A la media es de 52 cm y la desviación típica es de 3 cm, en la B la media es de 53 cm y la desviación típica de 5 cm.

a) Hallar, en el primero de los casos, entre qué valores simétricos respecto a la media está el 50 % (central) de las tallas de los recién nacidos.

b) Determinar en cuál de las dos comunidades es mayor la proporción de recién nacidos con talla superior a 50 cm.

Solución:

Las distribuciones son:

Comunidad A: N(52, 3) → Se tipifica haciendo $Z = \dfrac{X-52}{3}$

Comunidad B: N(53, 5) → Se tipifica haciendo $Z = \dfrac{X-53}{5}$

Con esto:

a) Si el 50 % de los recién nacidos está entre 52 – c y 52 + c cm, se cumplirá que

$$P(52 - c < X < 52 + c) = 0{,}50 \iff P(X < 52 + c) = 0{,}25 \iff$$
$$P\left(Z < \frac{52+c-52}{3}\right) = P\left(Z < \frac{c}{3}\right) = 0{,}25 \Rightarrow \frac{c}{3} = 0{,}675 \Rightarrow c = 2{,}025 \approx 2 \text{ cm}$$

Por tanto, el 50 % de los recién nacidos medirá entre 50 y 54 cm.

b) En la comunidad A:

$$P(X > 50) = P\left(Z > \frac{50-52}{3}\right) = P\left(Z > -\frac{2}{3}\right) =$$
$$= P(Z < 2/3) \approx P(Z < 0{,}66) = 0{,}7454$$

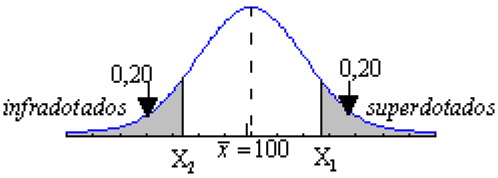
En la comunidad B:

$$P(X > 50) = P\left(Z > \frac{50-53}{5}\right) = P\left(Z > -\frac{3}{5}\right) =$$
$$= P(Z < 3/5) = P(Z < 0{,}6) = 0{,}7258$$

La proporción de niños con talla superior a 50 cm es mayor en la comunidad A.

6. En un test que mide ciertas habilidades específicas, las puntuaciones se distribuyen normalmente, con media 100 y desviación típica 25. El 20 % de las puntuaciones más altas corresponde al grupo de los superdotados, y el 20 % de las puntuaciones más bajas al de los infradotados. Calcular las puntuaciones que delimitan los distintos grupos.

Solución:
La distribución de las puntuaciones es como sigue:



Hay que encontrar los valores X_1 y X_2 tales que:

$P(X < X_1) = 1 – 0,20 = 0,80$ y
$P(X < X_2) = 0,20$

Como la normal de media μ y desviación típica σ, N(μ, σ), se tipifica mediante el cambio $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$, (en nuestro caso, para μ = 100 y σ = 25), se tendrá:.

$P(X < X_1) = P\left(Z < \dfrac{X_1 - 100}{25}\right) = 0,80$, (por la tabla normal) $\Rightarrow \dfrac{X_1 - 100}{25} = 0,84$

(hemos redondeado, pues realmente: $P(Z < 0,84) = 0,7996$)

$\Rightarrow X_1 = 100 + 25 \cdot 0,84 = 100 + 21 = 121$

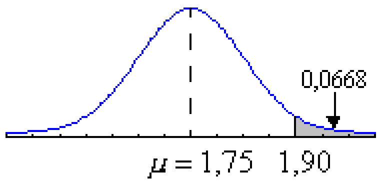
Teniendo en cuenta la simetría de la curva, por cumplirse que $P(X < X_2) = P(X > X_1)$, se tendrá:

$X_2 = 100 – 25 \cdot 0,84 = 100 – 21 = 79$

Por tanto:
son infradotados los que obtiene menos de 79 puntos;
son normales los que obtiene entre 79 y 121;
son superdotados los que obtienen más de 121 puntos.

7. En un país en el que la estatura de sus habitantes sigue una distribución normal de media 1,75 m, los individuos que miden más de 1,90 representan el 6,68 % del total. ¿Cuál es la desviación típica? ¿Cuál es la proporción de individuos con estatura superior a 1,60 m?

Solución:
La distribución de la estatura de la población es como sigue:



Se sabe que P(X > 1,90) = 0,0668

Como la normal de media μ y desviación típica σ, N(μ, σ), se tipifica mediante el cambio $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$, (en nuestro caso, para μ = 1,75 y σ desconocida), se tendrá:

$$P(X > 1{,}90) = P\left(Z > \frac{1{,}90 - 1{,}75}{\sigma}\right) = 0{,}0668 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad P\left(Z > \frac{0{,}15}{\sigma}\right) = 0{,}0668 \quad \Leftrightarrow \quad P\left(Z < \frac{0{,}15}{\sigma}\right) = 1 - 0{,}0668 = 0{,}9332$$

(por la tabla normal) $\Rightarrow \dfrac{0{,}15}{\sigma} = 1{,}5 \quad \Rightarrow \quad \sigma = 0{,}10$

Esto es, la desviación típica vale 0,10 m.

Por tanto:

$$P(X > 1{,}60) = P\left(Z > \frac{1{,}60 - 1{,}75}{0{,}10}\right) = P(Z > -1{,}5) = P(Z < 1{,}5) = 0{,}9332$$

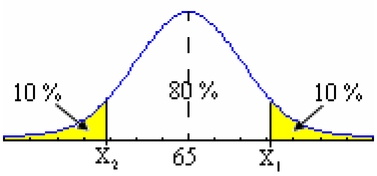
Esta probabilidad equivale al 93,32 %

8. El peso de los huevos de gallina producidos por cierta granja sigue una distribución normal de media 65 g y desviación típica 6 g. Los huevos se clasifican (según peso) en tres categorías: P (pequeños), M (medianos) y G (grandes). Si los pequeños suponen el 10 % del total y los grandes otro 10 %, ¿cuáles son los pesos que marcan los límites de cada categoría?

Solución:

El peso X de los huevos se distribuye según la normal N(65, 6), que se tipifica haciendo el cambio $Z = \frac{X-65}{6}$.

Como se indica en la siguiente figura, hay que buscar los puntos X_1 y X_2 que dejan por encima o por debajo el 10 % de los pesos.



Por tanto:

$$P(X > X_1) = P\left(Z > \frac{X_1 - 65}{6}\right) = 0{,}10$$

En la tabla normal se observa que el valor de $\frac{X_1-65}{6} = 1{,}28 \Rightarrow X_1 = 6 \cdot 1{,}28 + 65 = 72{,}68$ gramos.

Análogamente, por la simetría de la curva

$$P(X < X_2) = P\left(Z < \frac{X_2 - 65}{6}\right) = 0{,}10 \Rightarrow \frac{X_2-65}{6} = -1{,}28 \Rightarrow X_2 = 65 - 6 \cdot 1{,}28 =$$

57,32 gramos.

Por tanto, se consideran huevos pequeños los que pesan menos de 57,32 g. Serán medianos los que pesan entre 57,32 y 72,68 g. Y son grandes todos los que pesen más de 72,68 gramos.

9. En las empresas multinacionales A y B, que tiene 50000 y 60000 empleados, respectivamente, el sueldo mensual de dichos empleados se ajusta a una distribución normal, con media de 1800 euros y desviación típica de 650 euros, en el caso de A; y con una media de 2000 euros y desviación típica de 500 euros, en el caso B. ¿Cuál de las dos empresas tiene más empleados con sueldo superior a 3000 euros?

Solución:

Las distribuciones son:

Empresa A: N(1800, 650) $\to$ Se tipifica haciendo $Z = \dfrac{X - 1800}{650}$

Empresa B: N(2000, 500) $\to$ Se tipifica haciendo $Z = \dfrac{X - 2000}{500}$

Con esto:

Para la empresa A:

$$P(X > 3000) = P\left(Z > \frac{3000 - 1800}{650}\right) = P(Z > 1{,}85) =$$

$$= 1 - P(Z < 1{,}85) = 1 - 0{,}9678 = 0{,}0322$$

Entonces, para 50000 empleados, puede esperarse que 50000 · 0,0322 = 1610 ganen más de 3000 euros.

Para la empresa B:

$$P(X > 3000) = P\left(Z > \frac{3000 - 2000}{500}\right) = P(Z > 2) =$$

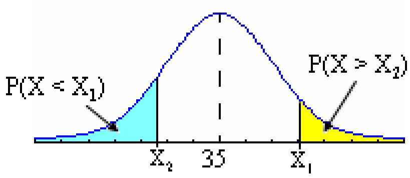
$$= 1 - P(Z < 2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$$

Entonces, para 60000 empleados, puede esperarse que 60000 · 0,0228 = 1368 ganen más de 3000 euros.

Por tanto, la empresa A tiene más empleados que ganen más de 3000 €.

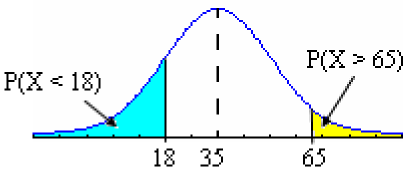
10. En una ciudad en la que la edad de sus habitantes se ajusta a una distribución normal de media 35 años, ¿qué grupo es más numerosos: el de los mayores de 65 años o el de los menores de 18 años? Justifica la respuesta.

Solución:
La población se distribuye según la normal N(35, s). Su función de densidad es aproximadamente como sigue



Esa función es simétrica respecto de la media, siendo la probabilidad de que la variable edad tome valores por encima de un valor X_1 la superficie de la "cola" derecha; y la probabilidad de que tome valores menores de X_2, la superficie de la "cola" izquierda. Por tanto, a mayor distancia de X a la media la superficie de la cola será menor.

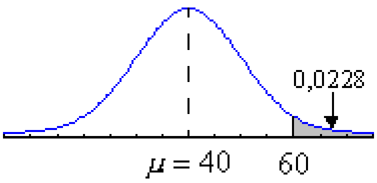
Como la distancia 65 – 35 = 30 y la distancia 35 – 18 = 17, es menos probable pertenecer al grupo de mayores de 65 años.



El grupo más numerosos es el de los menores de 18 años.

11. La edad de los habitantes de cierta ciudad se distribuye normalmente, con una media de 40 años. Se sabe además que el 2,28 % de los habitantes tiene más de 60 años.
a) ¿Cuál es la desviación típica?
b) ¿Cuál es el porcentaje de habitantes con menso de 35 años?

Solución:
La distribución de edad de la población es como sigue:



a) Se sabe que:

$$P(X > 60) = 0{,}0228$$

Como la normal de media μ y desviación típica σ, N(μ, σ), se tipifica mediante el cambio $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$, (en nuestro caso, para μ = 40 y σ desconocida), se tendrá:

$$P(X > 60) = P\left(Z > \frac{60-40}{\sigma}\right) = 0{,}0228 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad P\left(Z > \frac{20}{\sigma}\right) = 0{,}0228 \quad \Leftrightarrow \quad P\left(Z < \frac{20}{\sigma}\right) = 1 - 0{,}0228 = 0{,}9772$$

Por la tabla normal, como el valor de Z correspondiente a una probabilidad de 0,9772 es 2, se deduce que $\frac{20}{\sigma} = 2 \quad \Rightarrow \quad \sigma = 10$

Esto es, la desviación típica vale 10.

(b) $P(X < 35) = P\left(Z < \frac{35-40}{10}\right) = P(Z < -0{,}5) = 1 - P(Z < 0{,}5) = 1 - 0{,}6915 = 0{,}3085$

Esta probabilidad equivale al 30,85 %.

12. El coeficiente de inteligencia de un grupo de 500 alumnos es una variable aleatoria que se distribuye como una normal de media 100 y desviación típica 16. Determina el número esperado de alumnos que tienen un coeficiente entre 118 y 122.

Solución:

La distribución es N(100, 16), que se tipifica mediante el cambio $Z = \dfrac{X-100}{16}$

Para un alumno se tiene:

$$P(118 \le X \le 122) = P\left(\frac{118-100}{16} < Z < \frac{122-100}{16}\right) =$$

$$= P(1{,}125 < Z < 1{,}375) = P(Z < 1{,}375) - P(1{,}125) = 0{,}9154 - 0{,}8697 = 0{,}0457$$

Si hay 500 alumnos, cabe esperar que entre los coeficientes de inteligencia indicados haya

$$500 \cdot 0{,}0457 = 22{,}85 \rightarrow 23 \text{ alumnos.}$$

NOTA: Para asignar las probabilidades anteriores hemos interpolado.

13. Un estudio de un fabricante de televisores indica que la duración media de un televisor es de 10 años, con una desviación típica de 0,7 años. Suponiendo que la duración de los televisores sigue una distribución normal.

a) Calcula la probabilidad de que un televisor dure más de 9 años.
b) Calcula la probabilidad de que dure entre 9 y 11 años.

Solución:

Se trata de una distribución normal N(10, 0,7).

a) $P(X > 9) = P\left(Z > \dfrac{9-10}{0{,}7}\right) \approx P(Z > -1{,}43) = P(Z < 1{,}43) = 0{,}9236$

b) $P(9 < X < 11) = P\left(\dfrac{9-10}{0{,}7} < Z < \dfrac{11-10}{0{,}7}\right) \approx P(-1{,}43 < Z < 1{,}43) =$

$$= P(Z < 1{,}43) - P(Z < -1{,}43) = 0{,}9236 - (1 - 0{,}9236) = 0{,}8472$$

14. En cierta prueba, el 35 por ciento de la población examinada obtuvo una nota superior a 6, el 25 por ciento, entre 4 y 6, y el 40 por ciento inferior a 4. Suponiendo que las notas siguen una distribución normal, calcula la nota media y la desviación típica. ¿Qué porcentaje de población tiene una nota que se diferencia de la media en menos de 2 unidades.

Solución:
Se tienen las siguientes probabilidades:

$$P(X > 6) = 0{,}35, \qquad P(4 \le X \le 6) = 0{,}25, \qquad P(X < 4) = 0{,}40$$

Sea μ la media y σ la desviación típica. Esto es, la distribución es $N(\mu, \sigma)$.

Esta normal se tipifica haciendo el cambio $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$, luego:

$$P(X > 6) = P\left(Z > \frac{6-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}35 \Rightarrow \text{(por la tabla normal)} \ \frac{6-\mu}{\sigma} = 0{,}385$$

$$P(X < 4) = P\left(Z < \frac{4-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}40 \Rightarrow \text{(por la tabla normal)} \ \frac{4-\mu}{\sigma} = -0{,}255$$

Se tiene el sistema:

$$6 - \mu = 0{,}385\sigma$$
$$4 - \mu = -0{,}255\sigma$$

Su solución es: $\mu = 4{,}797$; $\sigma = 3{,}125$

Con esto:

$$P(2{,}797 < X < 6{,}797) = P\left(\frac{-2}{3{,}125} < Z < \frac{2}{3{,}125}\right) =$$
$$= P(-0{,}64 < Z < 0{,}64) = P(Z < 0{,}64) - P(Z < -0{,}64) =$$
$$= 0{,}7389 - (1 - 0{,}7389) = 0{,}4778$$

15. En un examen, al que se presentaron 2000 estudiantes, las puntuaciones se distribuyeron normalmente, con media 72 y desviación típica 9.

(a) ¿Cuántos estudiantes obtuvieron una puntuación entre 60 y 80?

(b) Si el 10 % superior de los alumnos recibió la calificación de sobresaliente, ¿que puntuación mínima había que tener para recibir tal calificación?

Solución:

Se trata de una normal N(72, 9), que supondremos continua.

a) Para cada estudiante:

$$P(60 \le X \le 80) = P\left(\frac{60-72}{9} < Z < \frac{80-72}{9}\right) = P(-1{,}33 < Z < 0{,}89) =$$
$$= P(Z < 0{,}89) - P(Z < -1{,}33) = 0{,}8133 - (1 - 0{,}9082) = 0{,}7215$$

Entre 2000 estudiantes habrá $2000 \cdot 0{,}7215 = 1443$ cuya nota esté entre 60 y 80 puntos.

b) Si $P(X \ge x_0) = 0{,}10 \Rightarrow P(X < x_0) = 0{,}90$

$$P(X < x_0) = 0{,}90 \Leftrightarrow P\left(Z < \frac{x_0 - 72}{9}\right) = 0{,}90 \Rightarrow \frac{x_0 - 72}{9} = 1{,}28 \Rightarrow x_0 = 83{,}54$$

La puntuación mínima para recibir una calificación de sobresaliente es de 83,54 puntos

NOTA: Si la puntuación fuese una variable discreta (por ejemplo, puntuaciones enteras) habría que hacer la corrección de continuidad. En ese caso:

$$P(60 < X < 80) = P(59{,}5 < X' < 80{,}5) = P\left(\frac{59{,}5-72}{9} < Z < \frac{80{,}5-72}{9}\right) =$$
$$= P(-1{,}39 < Z < 0{,}94) = P(Z < 0{,}94) - P(Z < -1{,}39) =$$
$$= 0{,}8264 - (1 - 0{,}9177) = 0{,}7441$$