CURSO 2012-13 2º BACHILLERATO

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES: ÁLGEBRA

OPCIÓN A

EJERCICIO 1 Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro k :

$$\begin{aligned} x+y+z&=2 \\ 2x+3y+z&=3 \\ kx+10y+4z&=11 \end{aligned}$$

(3 puntos)

a) **Discútase el sistema según los valores del parámetro k.**
b) **Resuélvase el sisteme en el caso en que tenga infinitas soluciones**
c) **Resuélvase el sistema para k = 0**

EJERCICIO 2 Se consideran las matrices: *(3 puntos)*

A= $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$ I= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ O = $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) **Calcúlense a y b para que se verifique AB = BA**
b) **Calcúlense c y d para que se verifique A^2 + cA + dI = O**

EJERCICIO 3 Sea A = $\begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *(2,5 puntos)*

a) **Halla para qué valores de x A tiene inversa.**
b) **Calcula la inversa para x = 2**

EJERCICIO 5 Si $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix}$ **= 5, calcula** $\begin{vmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2x & 2y & 2z \\ 3a+7 & 3b+7 & 3c+7 \end{vmatrix}$ *(1,5 puntos)*

OPCIÓN B

EJERCICIO 1 Discute el siguiente sistema homogéneo en función del parámetro a y resuelvelo para a = 2. *(1,5 + 1 puntoa)*

$$\begin{aligned} x+y+z&=0 \\ ax+2z&=0 \\ 2x-y+az&=0 \end{aligned}$$

EJERCICIO 2 Halla todas las matrices X = $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ **que satisfacen la ecuación X^2 = 2X**

(2 puntos)

EJERCICIO 3 ¿Para qué valores de a se anula este determinante? *(2,5 puntos)*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

EJERCICIO 4 Plantea mediante una ecuación matricial: *(1 punto)*

Una empresa instala casas prefabricadas de tres tipos A, B y C. Cada casa del tipo A necesita 10 horas de albañilería, 2 de fontanería y 2 de electricista. Cada casa del tipo B necesita 15 horas de albañilería,4 de fontanería y 3 de electricista. Cada casa de tipo C necesita 20 horas de albañilería, 6 de fontnería y 5 de electricista. La empresa puede disponer de 270 horas de albañilería, 68 de fontanería y 58 de electricista. ¿Cuántas casas de cada tipo se pueden hacer?

EJERCICIO 5 Dada A = $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ **, halla una matriz X tal que AXA =** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *(2 puntos)*

SOLUCIONES OPCIÓN A

EJERCICIO 1

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ k & 10 & 4 \end{pmatrix} = 14 - 2k = 0 \quad si\ k = 7$$

$$Para\ k = 7,\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1\ \ luego\ \ ranA = 2$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 7 & 10 & 4 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 7 & 10 & 11 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 7 & 4 & 11 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 10 & 4 & 11 \end{vmatrix} = 0$$

$Tenemos\ \ ranA' = 2$

DISCUSIÓN:

Si $k \neq 7, ranA = ranA' = n^o\ incógnitas = 3 \quad SCD$

Si $k = 7, ranA = ranA' = 2 < n^o\ incógnitas \quad SCI$

b) *Hacemos* $k = 7$ *y nos quedamos con las dos primeras ecuaciones con las que hallamos* $ranA$

$$\begin{matrix} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + z = 3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x + y = 2 - z \\ 2x + 3y = 3 - z \end{matrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2-z & 1 \\ 3-z & 3 \end{vmatrix}}{1} = 3 - 2z \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2-z \\ 2 & 3-z \end{vmatrix}}{1} = z - 1$$

c) *Hacemos* $k = 0 \quad \det A = 14$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 11 & 10 & 4 \end{vmatrix}}{14} = 0 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 11 & 4 \end{vmatrix}}{14} = \frac{1}{2} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 10 & 11 \end{vmatrix}}{14} = \frac{3}{2}$$

EJERCICIO 2

a)

$$A \bullet B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & a+b \end{pmatrix} \quad a = 0 \quad b = 2$$

$$B \bullet A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}$$

b) $$A^2 + cA + dI = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 1+c & 1+c+d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d & 0 \\ 1+c & 1+c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad d = 0 \quad 1 + c = 1 \quad c = 0$$

EJERCICIO 3

a) $$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix} = x = 0 \quad Para\ x \neq 0\ A\ \ tiene\ inversa$$

b) $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 4

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 2x & 2y & 2z \\ 3a+7 & 3b+7 & 3c+7 \end{vmatrix} = \frac{2}{3}\left(3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right) = \frac{2}{3} \bullet 3 \bullet (-5) = -10$$

SOLUCIONES OPCIÓN B

EJERCICIO 1

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 2 & -1 & a \end{vmatrix} = -a^2 - a + 6 = 0 \quad \{a = -3\}, \{a = 2\}$$

$$a = -3 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

$$a = 2 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$RAnA' = RanA$ *por ser un sistema homogéneo*

DISCUSIÓN

$a \neq 2,-3 \quad RanA = RanA' = 3 = n^o$ *incógnitas SCD (Solución trivial)*

$a = 2,-3 \quad RanA = RanA' = 2 \quad SCI$

Solución para $a = 2$

$$\begin{matrix} x+y+z=0 \\ 2x+2z=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x+y=-z \\ 2x=-2z \end{matrix} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} -z & 1 \\ -2z & 0 \end{vmatrix}}{-2} = -z \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -z \\ 2 & -2z \end{vmatrix}}{-2} = 0$$

EJERCICIO 2

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ ba+cb & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 2b & 2c \end{pmatrix}$$

$a^2 = 2a \Rightarrow a^2 - 2a = 0 \Rightarrow a = 0,2$

$c^2 = 2c \Rightarrow c^2 - 2c = 0 \Rightarrow c = 0,2$

$a = c = 0 \quad b \bullet 0 + 0 \bullet b = 2b \Rightarrow b = 0$

$a = 0 \quad c = 2 \Rightarrow b \bullet 0 + 2b = 2b \Rightarrow$ *b cualquier valor*

$a = 2 \quad c = 0 \Rightarrow b \bullet 2 + 0 = 2b \Rightarrow$ *b cualquier valor*

$a = 2 \quad c = 2 \Rightarrow 2b + 2b = 4b \Rightarrow b = 0$

EJERCICIO 3

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{matrix} Igual \\ F2-F1 \\ Igual \\ F4-F1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (\textit{desarrollamos por } F4)$$

$$= (-2) \bullet (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 6 \\ a & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-2) \bullet (-4 + 6a + 8a + 6) = 0 \quad a = -\frac{1}{7}$$

EJERCICIO 4

$x =$ *casas tipo A* $\quad y =$ *casas tipo B* $\quad z =$ *casas tipo C*

ALBAÑILERÍA $\quad 10x + 15y + 20z = 270$

FONTANERÍA $\quad 2x + 4y + 6z = 68$

ELECTRICISTA $\quad 2x + 3y + 5z = 58$

$$\begin{pmatrix} 10 & 15 & 20 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 270 \\ 68 \\ 58 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 5

$$AXA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = A^{-1} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \bullet A^{-1} \text{ .Calculamos } A^{-1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \ |A| = 1 \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$