

Opción A

Fecha: 23 Noviembre 2012

Alumno.....

Ejercicio nº 1.-

a) Resuelve el siguiente sistema, utilizando el método de Gauss:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 3x + y - z = -3 \\ x - 3y + 3z = 9 \\ 2x + 4y - 4z = -12 \end{cases}$$

Solución:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & -4 & -12 \end{array} \right) \xrightarrow[E4+2E1]{E1+E2, E3-3E1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[E4-E2]{E3+E2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Rango A = rango A* = 2 < nº incógnitas = 3 $\Leftrightarrow$ el sistema es compatible e indeterminado

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 5x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \{x = 0, y \in R, z = 3 + y\}$$

b) En una residencia de estudiantes se compran semanalmente 110 helados de distintos sabores: vainilla, chocolate y nata. El presupuesto destinado para esta compra es de 540 euros y el precio de cada helado es de 4 euros el de vainilla, 5 euros el de chocolate y 6 euros el de nata. Conocidos los gustos de los estudiantes, se sabe que entre helados de chocolate y de nata se han de comprar el 20% más que de vainilla.

Calcula cuántos helados de cada sabor se compran a la semana.

Solución:

x = nº helados de vainilla, y = nº helados de chocolate, z = nº helados de nata

$$\begin{cases} x + y + z = 110 \\ 4x + 5y + 6z = 540 \\ y + z = 1.2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 110 \\ 4x + 5y + 6z = 540 \\ 6x - 5y - 5z = 0 \end{cases} \xrightarrow[E3-6E1]{E2-4E1} \begin{cases} x + y + z = 110 \\ y + 2z = 100 \\ -11y - 11z = -660 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 110 \\ y + 2z = 100 \\ y + z = 60 \end{cases} \xrightarrow[E2-E3]{E2-E3} \begin{cases} x + y + z = 110 \\ y + 2z = 100 \\ z = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50 \\ y = 20 \\ z = 40 \end{cases}$$

Compran 50 helados de vainilla, 20 de chocolate y 40 de nata.

Ejercicio nº 2.-

a) Maximiza la función $z = 3x + 2y$, sujeta a estas restricciones:

$$\begin{cases} 50 \leq x + y \leq 150 \\ y \leq x \\ 0 \leq x \leq 100 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

b) Minimiza la función $w = 2x + 2y$, sujeta a las restricciones anteriores.

Solución:

a) Como puede verse en la figura 1, la función $z = 3x + 2y$ alcanza el valor máximo de 400 en el punto C (100, 50) del conjunto de soluciones factibles. Solución óptima: $x = 100, y = 50$

b) Como puede verse en la figura 2, la función $w = 2x + 2y$ alcanza el mínimo en todos los puntos del segmento AE:

x	25	...	50
y = 50 - x	25	...	0

Es decir, los puntos :P(x, 50-x), siendo $25 \leq x \leq 50$

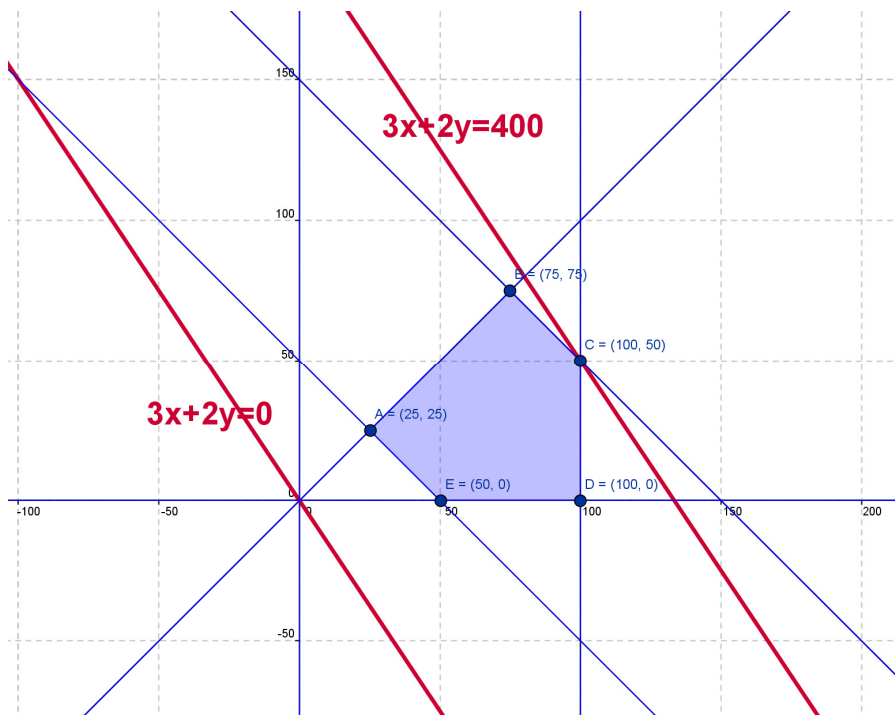


Figura 1

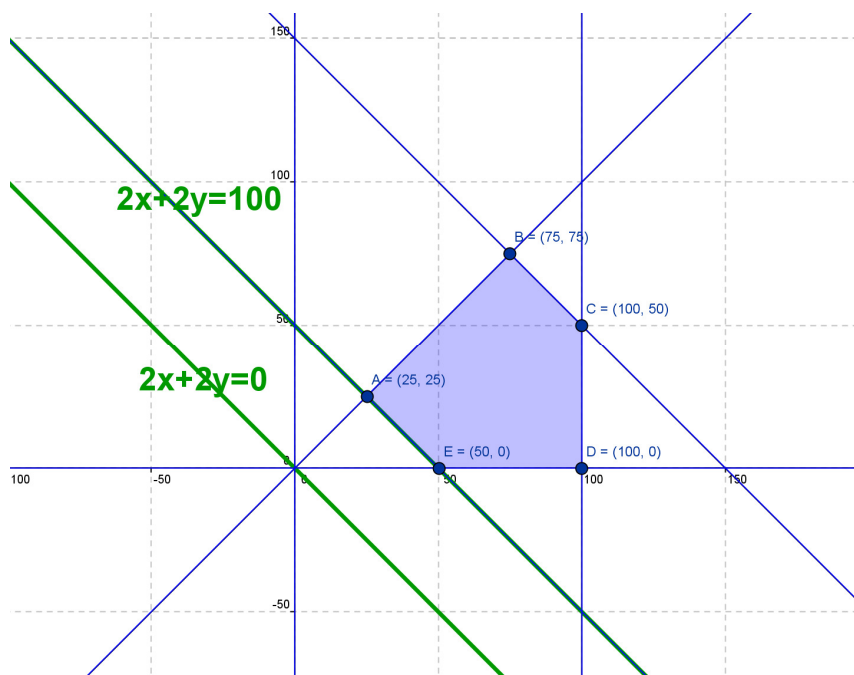


Figura 2

Ejercicio nº 3.-

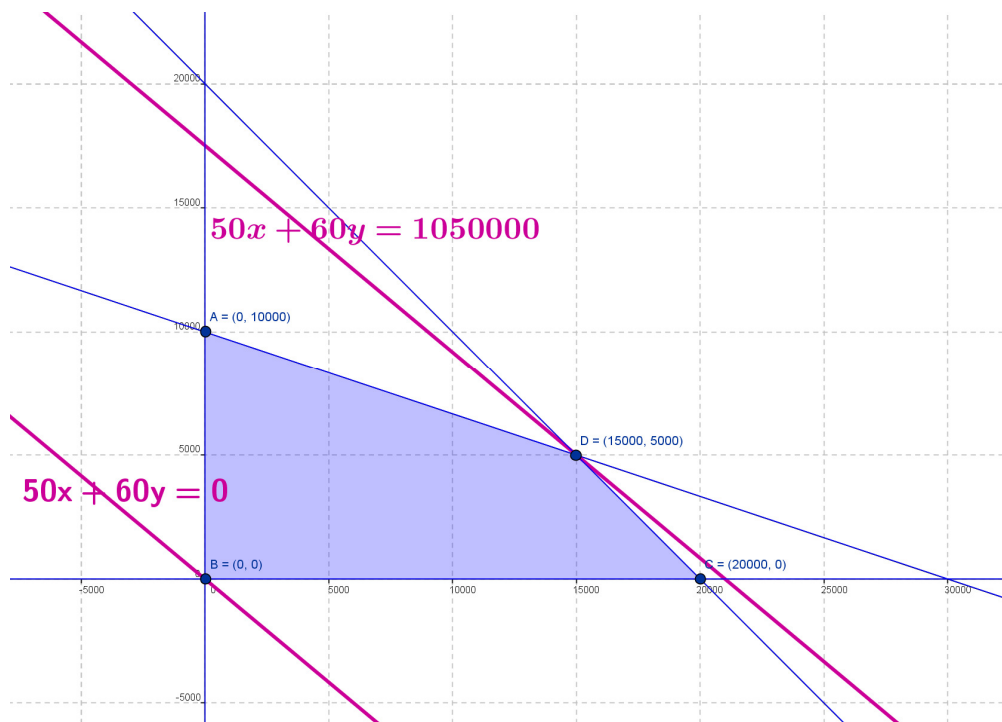
Una fábrica de papel tiene almacenados 4 000 kilos de pasta de papel normal, A, y 3 000 kilos de pasta de papel reciclado, B. La fábrica produce dos tipos diferentes de cajas de cartón. La caja de tipo 1 está fabricada con 0,2 kilos de A y 0,1 kilos de B, mientras que la caja del tipo 2 está fabricada con 0,2 kilos de A y 0,3 kilos de B. El precio de la caja de tipo 1 es de 50 euros/unidad y el precio de la caja de tipo 2 es de 60 euros/unidad. ¿Cuántas cajas de cada clase ha de elaborar la fábrica para maximizar sus ventas?

Solución:

	número	P.normal A	P. reciclado B	Ventas en €
Caja 1	x	0'2x	0'1x	50x
Caja 2	y	0'2y	0'3y	60y

Debemos determinar los pares (x, y) que maximicen las ventas, $50x + 60y$, sujetos a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 0'2x + 0'2y \leq 4000 \\ 0'1x + 0'3y \leq 3000 \\ x, y \in \text{Naturales} \end{cases}$$



En el gráfico anterior aparece el conjunto de soluciones factibles coloreado en azul. Podemos comprobar que el valor máximo de las ventas, 1.050.000 €, se consigue en el punto D (15000, 5000). Por lo que se deben fabricar 15.000 cajas tipo 1 y 5.000 cajas tipo 2.

Ejercicio nº 4.-

Determina la matriz X que verifica la ecuación $(A^2 - A) \cdot X = B$ donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Justifica la respuesta.

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^2 - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (A^2 - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$(A^2 - A) \cdot X = B \Leftrightarrow (A^2 - A)^{-1} \cdot (A^2 - A) \cdot X = (A^2 - A)^{-1} \cdot B \Leftrightarrow X = (A^2 - A)^{-1} \cdot B$$

$$X = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ -3/2 & 5/2 & -1/2 \\ 1/2 & -3/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Opción B

Fecha: 23 Noviembre 2012

Alumno.....

Ejercicio nº 1.-

Estudia el siguiente sistema homogéneo, según los valores del parámetro m ; y resuélvelo en los casos en los que resulte ser compatible indeterminado:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ x + my + 2z = 0 \\ 2x + (3 + m)y + 4z = 0 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & m & 2 \\ 2 & m+3 & 4 \end{vmatrix} = 4m + 2m + 6 + 12 - 4m - 2m - 6 - 12 = 0 \quad \forall m \Leftrightarrow \text{rango } A < 3$$

para todo valor de $m \Leftrightarrow$ El sistema es compatible e indeterminado $\forall m$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & m & 2 \\ 2 & m+3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F3-2F1]{F2-F1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & m-3 & 0 \\ 0 & m-3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F3-F2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & m-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $m = 3 \Leftrightarrow \text{rg} A = 1 \Leftrightarrow$ Sistema compatible e indeterminado $x+3y+2z=0 \Leftrightarrow x = -3y - 2z, y, z \in \mathbb{R}$

Si $m \neq 3 \Leftrightarrow \text{rg} A = 2 \Leftrightarrow$ Sistema compatible e indeterminado $\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ (m-3)y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = 0 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$

Ejercicio nº 2.-

a) Estudia para qué valores de a existe la inversa de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Calcula la matriz inversa de A para $a = 0$.

Solución:

$$\text{a) } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -a + 6$$

Si $|A| = 0 \Leftrightarrow a = 6 \Leftrightarrow \text{rango } A < 3 \Leftrightarrow A$ no tiene inversa

Si $|A| \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 6 \Leftrightarrow \text{rango } A = 3 \Leftrightarrow A$ tiene inversa

$$\text{b) } a = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 6$$

$$\begin{cases} A_{11} = 2 & A_{21} = -1 & A_{31} = 2 \\ A_{12} = 4 & A_{22} = -2 & A_{32} = -2 \\ A_{13} = 0 & A_{23} = 3 & A_{33} = 0 \end{cases} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 3.-

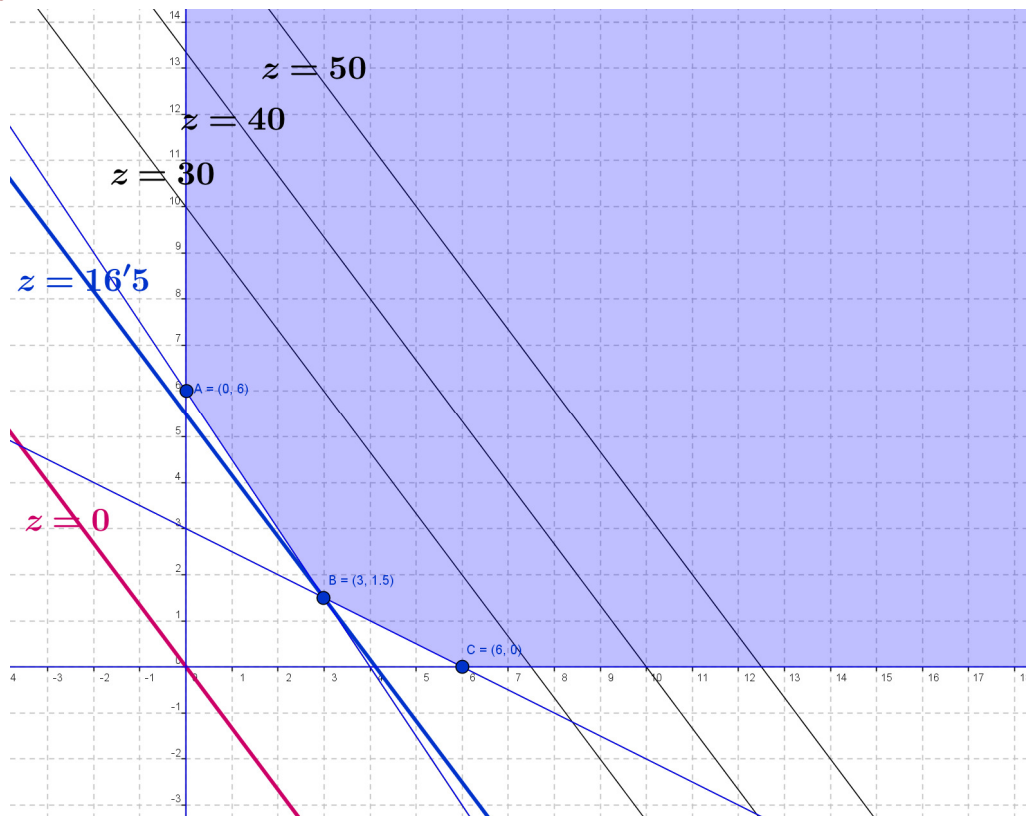
Representa la región del plano delimitada por:

$$\begin{cases} x + 2y \geq 6 \\ 3x + 2y \geq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

¿Es posible maximizar y minimizar la función $z = 4x + 3y$ en ella? Razona la respuesta y, en caso afirmativo, indica en qué puntos se consiguen el máximo y el mínimo.

Solución:

Resolvemos el sistema de restricciones y obtenemos el conjunto de puntos del recinto sombreado en azul de la siguiente figura:



Representamos la función $z = 0$. Se observa que la primera paralela a ella que corta al conjunto de soluciones factibles es la que pasa por el punto B (3, 1.5) y que no existe una última paralela que corte al conjunto de soluciones factibles. Por lo tanto, podemos minimizar $z = 4x + 3y$ en $x = 3$, $y = 1.5$ y no podemos maximizar z .

Ejercicio nº 4.-

Se desea fabricar dos tipos de bombones que llamaremos A y B. Las cajas de tipo A contienen 1 kg de chocolate y 2 kg de cacao; las de tipo B contienen 2 kg de chocolate, 1 kg de cacao y 1 kg de almendras. Por cada caja del tipo A se ganan 2 euros y por cada caja del tipo B, 3 euros. Se dispone de 500 kg de chocolate, 400 kg de cacao y 225 kg de almendras.

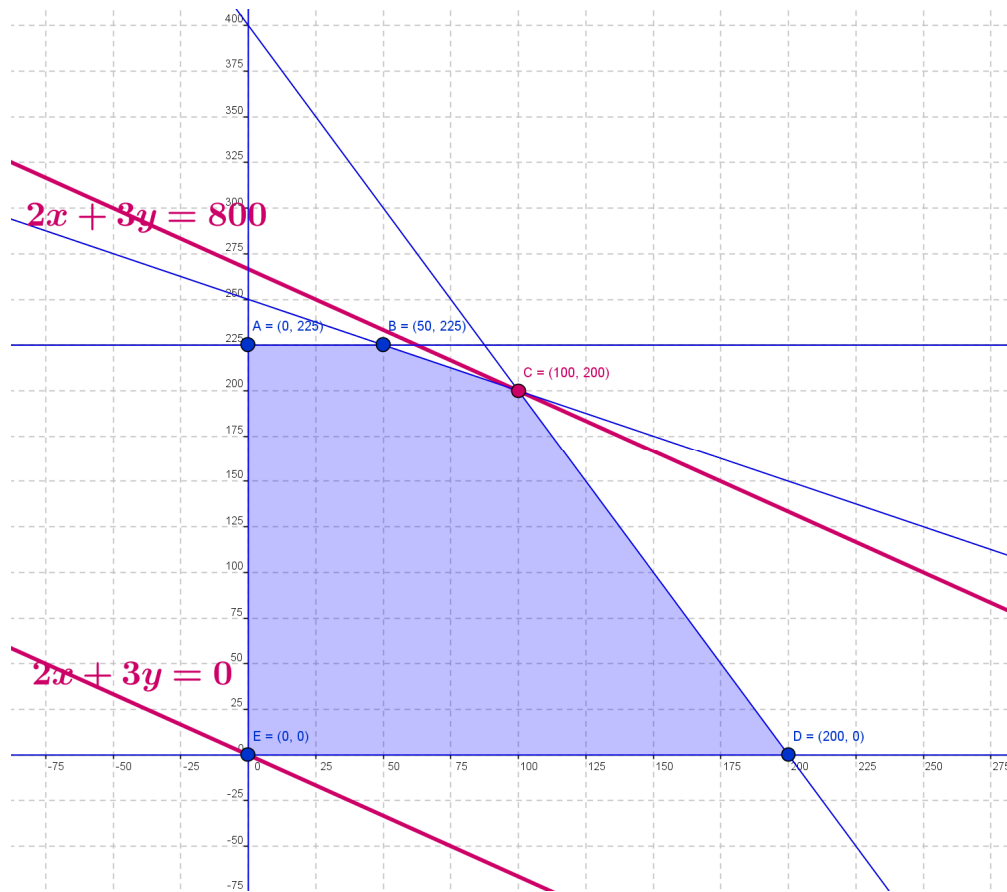
¿Cuántas cajas de cada tipo hay que fabricar para que la ganancia sea máxima?

Solución:

	número	Kilos de chocolate	Kilos de cacao	Kilos de almendras	Beneficio en €
Tipo A	x	x	2x	0	2x
Tipo B	y	2y	y	y	3y

Queremos determinar los pares (x, y) sujetos a las restricciones:
$$\begin{cases} x + 2y \leq 500 \\ 2x + y \leq 400 \\ y \leq 225 \\ x, y \in \text{Naturales} \end{cases}$$
 y que maximicen el beneficio

$$B(x, y) = 2x + 3y.$$



Se puede comprobar que la solución óptima se consigue con $x = 100$ cajas del tipo A, $y = 200$ cajas del tipo B para obtener un beneficio máximo de 800 euros.