NOMBRE: ____

1) Sea la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida mediante: *(3 puntos)*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si} \quad x \le 0 \\ x^3 - x + 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

   a) Estudiar la continuidad y derivabilidad.
   b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

2) Calcular los siguientes límites: *(3 puntos)*

   a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{2x} - 2}{3 - \sqrt{x+7}}$

   b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{2x} - 2}{3 - \sqrt{x+7}}$

   c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{2x} - 2}{3 - \sqrt{x+7}}$

   d) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{3x^2 - 1}{3x^2 + 1} \right)^{\frac{2x^2 - 3}{x+3}}$

   e) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{3x - 1}{3x^2 + 1} \right)^{1 - 3x^2}$

3) Derivar y simplificar: *(3 puntos)*

   a) $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x} - (5x - x^2)^2$.
   b) $g(x) = (x^2 - 1) \cdot \ln x$.
   c) $h(x) = 2^{5x}$.
   d) $i(x) = (x^3 - 6x) \cdot (x^2 + 1)^3$.
   e) $j(x) = (x + 1) \cdot e^{2x+1}$.
   f) $k(x) = 3x \cos 3x^2$.

4) Hallar a y b para que sea derivable en todo $\mathbb{R}$ la función: *(1 punto)*

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ x^2 + bx + 3 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

SOLUCIONES

1) Sea la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida mediante: *(3 puntos)*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si} \quad x \le 0 \\ x^3 - x + 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

a) Estudiar la continuidad y derivabilidad.

Continuidad

- Zona $(-\infty, 0)$: Es continua en toda la zona por serlo la función exponencial compuesta con una polinómica.
- Zona $(0, +\infty)$: Es continua en toda la zona por tener una expresión polinómica.
- $x = 0$: 1) $\exists f(0)) = e^0 = 1$; 2) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{-x} = e^0 = 1$; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^3 - x + 1) = 1$. Por tanto, $\exists \lim_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$, por lo que es continua.

Por tanto, f es $\boxed{\text{continua en todo } \mathbb{R}}$. Luego puede ser derivable.

Derivabilidad

Podemos derivar directamente en intervalos *abiertos*:

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si} \quad x < 0 \\ 3x^2 - 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

y nos falta por estudiar la derivada en $x = 0$. Para ello, vemos las derivadas por la derecha y por la izquierda:

$$f'(0^-) = -e^{-0} = -1; \quad f'(0^+) = 3\cdot 0^2 - 1 = -1 \quad \Rightarrow \quad \exists f'(0) = -1$$

Añadimos este resultado a lo que ya teníamos, deduciendo la expresión final de la derivada de f:

$$\boxed{f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si} \quad x < 0 \\ 3x^2 - 1 & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}}$$

Nota 1: El igual se podía haber puesto también en la primera forma de la definición de $f'(x)$, puesto que va a coincidir el resultado que estamos diciendo que debe tener $f'(0)$, esto es: -1. Lo que no podemos es ponerlo en ambas.

Nota 2: En realidad, no hemos calculado $f'(0)$, sino que hemos comprobado que f' es continua. El cálculo estricto sería recurriendo a la definición de derivada en forma de límite, pero en Selectividad admiten este procedimiento, mucho más cómodo. La forma verdadera de calcular $f'(0)$ sería así: Por un lado,

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-e^{-x}}{1} = -1$$

Para el cálculo de este límite hemos usado la Regla de L'Hôpital, que podía aplicarse al tener la indeterminación 0/0. Recordamos que esta Regla cambia la expresión del límite que calculamos por la derivada del numerador partido por la derivada del denominador, y es utilizable con indeterminaciones 0/0 ó ∞/∞ y siempre que la expresión resultante nos permita calcular el límite, es decir, se deshaga de la indeterminación.

Por otro lado,

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3 - x + 1 - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x(x^2 - 1)}{x} = \lim_{x\to 0^+} (x^2 - 1) = -1$$

Al coincidir, $\exists f'(0) = -1$.

b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

- Punto de tangencia: Si $x = 1 \Rightarrow f(1) = 1^3 - 1 + 1 = 1$. Es (1, 1).
- Pendiente: $m = f'(1) = 3\cdot 1^2 - 1 = 2$
- Ecuación: Según la interpretación geométrica de la derivada, usando la ecuación de la recta en forma punto-pendiente, será:

$$y - 1 = 2(x-1) \Rightarrow y = 2x - 2 + 1 \Rightarrow \boxed{y = 2x - 1}$$

2) Calcular los siguientes límites: *(3 puntos)*

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{2x}-2}{3-\sqrt{x+7}}$

Este límite produce la indeterminación 0/0, con raíces dentro de restas. Para eliminar la indeterminación hay que multiplicar y dividir por los conjugados de dichas restas:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{2x}-2}{3-\sqrt{x+7}} = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{2x}-2}{3-\sqrt{x+7}} \frac{\sqrt{2x}+2}{\sqrt{2x}+2} \frac{3+\sqrt{x+7}}{3+\sqrt{x+7}} =$$

Efectuamos *sólo* los productos de los conjugados, que son *suma por diferencia*, con lo que eliminamos las raíces dentro de restas:

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(2x-4)(3+\sqrt{x+7})}{(9-(x+7))(\sqrt{2x}+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{2(x-2)(3+\sqrt{x+7})}{(9-x-7)(\sqrt{2x}+2)} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{2(x-2)(3+\sqrt{x+7})}{(2-x)(\sqrt{2x}+2)} =$$

Factorizamos los polinomios que han resultado. El del numerador es fácil, porque basta con sacar 2 como factor común. El denominador también, pues podemos extraer –1 factor común. Si no nos damos cuenta de esto último, podemos efectuar una división por Ruffini (un único paso, una única división) probando el número al que tiende x, y obtendremos *siempre* la descomposición que nos hace falta.

$$= \lim_{x\to 2} \frac{2(x-2)(3+\sqrt{x+7})}{-(-2+x)(\sqrt{2x}+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{2(x-2)(3+\sqrt{x+7})}{-(x-2)(\sqrt{2x}+2)} =$$

Simplificamos los factores $x - 2$, causantes de la indeterminación 0/0, sustituimos y terminamos. Al sustituir, ya no escribimos *lim* delante de la expresión:

$$= \lim_{x\to 2} \frac{2(3+\sqrt{x+7})}{-(\sqrt{2x}+2)} = \frac{2(3+\sqrt{9})}{-(\sqrt{4}+2)} = \frac{2\cdot 6}{-4} = \boxed{-3}$$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{2x}-2}{3-\sqrt{x+7}}$

Tenemos la indeterminación ∞/∞. En un cociente, sólo el término de mayor grado del numerador y el del denominador son los que deciden el resultado, pues el resto de términos del numerador son despreciables frente al de mayor grado del numerador y lo mismo sucede con el denominador, cuando x tiende a ∞ y va tomando valores enormemente grandes. Por tanto:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x}-2}{3-\sqrt{x+7}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x}}{-\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty}\left(-\sqrt{\frac{2x}{x}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\sqrt{2}\right) = \boxed{-\sqrt{2}}$$

c) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x}-2}{3-\sqrt{x+7}}$

Este límite $\boxed{\text{no existe}}$, porque al acercarnos a $-\infty$ tenemos que darle a x valores negativos, por lo que no van a existir las raíces cuadradas.

d) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-1}{3x^2+1}\right)^{\frac{2x^2-3}{x+3}}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-1}{3x^2+1}\right)^{\frac{2x^2-3}{x+3}} = (1^\infty) = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3}{x+3}\left(\frac{3x^2-1}{3x^2+1}-1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3}{x+3}\frac{3x^2-1-(3x^2+1)}{3x^2+1}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3}{x+3}\frac{3x^2-1-3x^2-1}{3x^2+1}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3}{x+3}\frac{-2}{3x^2+1}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4x^2+6}{3x^3+x+9x^2+3}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4x^2}{3x^3}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4}{3x}} = e^{\left(\frac{-4}{\infty}\right)} = e^0 = \boxed{1}$$

Cuando la indeterminación es 1^∞, podemos sustituir la expresión del límite por el número e elevado al exponente multiplicando a la base menos 1. Y en un cociente de expresiones polinómicas, aunque estén dentro de raíces, si se produce la indeterminación ∞/∞, cada polinomio puede sustituirse por el término de mayor grado, con su coeficiente, puesto que el resto presentará valores despreciables frente a él, cuando nos aproximemos a ∞.

e) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-1}{3x^2+1}\right)^{1-3x^2}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-1}{3x^2+1}\right)^{1-3x^2} = \left(0^{-\infty}\right) = \left(\frac{1}{0^{+\infty}}\right) = \left(\frac{1}{0}\right) = \boxed{\infty}$$

3) Derivar y simplificar: *(3 puntos)*

a) $f(x) = \frac{3x-1}{x} - (5x-x^2)^2.$

$$f'(x) = \frac{3x-(3x-1)}{x^2} - 2(5x-x^2)(5-2x) = \frac{1}{x^2} - 2(25x-10x^2-5x^2+2x^3) =$$

$$= \frac{1}{x^2} - 2(2x^3-15x^2+25x) = \frac{1}{x^2} - 4x^3+30x^2-50x =$$

$$= \boxed{\frac{-4x^5+30x^4-50x^3+1}{x^2}}$$

b) $g(x) = (x^2-1)\cdot\ln x.$

$$g'(x) = 2x\ln x + \frac{x^2-1}{x} = \boxed{\frac{2x^2\ln x + x^2 - 1}{x}}$$

c) $h(x) = 2^{5x}.$

$$h'(x) = \boxed{5\cdot 2^{5x}\ln 2}$$

d) $i(x) = (x^3 - 6x)\cdot(x^2+1)^3$.

$$i\,'(x) = (3x^2 - 6)(x^2+1)^3 + (x^3 - 6x)\;3\cdot 2x\,(x^2+1)^2 =$$
$$= (x^2+1)^2\,((3x^2-6)\,(x^2+1) + 6x(x^3-6x)) =$$
$$= (x^2+1)^2\,(3x^4 + 3x^2 - 6x^2 - 6 + 6x^4 - 36x^2) = \boxed{(x^2+1)^2\,(9x^4 - 39x^2 - 6)}$$

e) $j(x) = (x+1)\cdot e^{2x+1}$.

$$j\,'(x) = e^{2x+1} + (x+1)\,2\,e^{2x+1} = e^{2x+1}(1 + 2x + 2) = \boxed{e^{2x+1}(2x+3)}$$

f) $k(x) = 3x\cos 3x^2$.

$$k\,'(x) = 3\cos 3x^2 - 3x\cdot 6x\,\text{sen}\,3x^2 = \boxed{3\cos 3x^2 - 18x^2\,\text{sen}\,3x^2}$$

Nota: La expresión simplificada final siempre puede resultar subjetiva, y debe entenderse como una expresión cómoda para operar y para volver a derivar si es preciso. Por ejemplo, en el d y el f se podría extraer 3 factor común.

4) Hallar a y b para que sea derivable en todo R la función: *(1 punto)*

$$f(x) = \begin{cases} ax^2+1 & \text{si } x<1 \\ x^2+bx+3 & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$$

Para ser derivable, previamente debe comprobarse que es continua. Como las dos expresiones que forman f son polinómicas, será continua en todo R salvo en el punto de conexión $x = 1$, que siempre hay que estudiarlo por separado:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(ax^2+1) = a + 1$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(x^2+bx+3) = 1 + b + 3 = b + 4$$

El límite existirá, y coincidirá con $f(1) = b + 4$, cuando $a + 1 = b + 4 \Leftrightarrow \boxed{a - b = 3}$.
Con ello, la función será continua en todo R y podemos plantearnos su derivada (donde no sea continua, no puede ser derivable). De este modo, derivando directamente en intervalos abiertos:

$$f\,'(x) = \begin{cases} 2ax & \text{si } x<1 \\ 2x+b & \text{si } x>1 \end{cases}$$

Esta función tiene imagen siempre, salvo para $x = 1$, que aún no hemos estudiado. Ello significa que, a falta de dicho punto, f es siempre derivable. Pues bien:

$$f\,'(1^-) = 2a;\quad f\,'(1^+) = 2 + b.$$

Por tanto, será derivable, también, en $x = 1$ cuando $2a = 2 + b \Leftrightarrow \boxed{2a - b = 2}$.
Resolvemos el sistema formado por ambas condiciones, para que se verifiquen a la vez:
Despejando en la primera: $a = b + 3$. Sustituyendo en la segunda: $2(b + 3) - b = 2$ $\Rightarrow$ $b = 2 - 6 = -4$ $\Rightarrow$ $a = -4 + 3 = -1$.
Luego serán continua y derivable en todo R si $\boxed{a = -1 \text{ y } b = -4}$.

NOMBRE: ____

ALUMNOS CON LA PRIMERA EVALUACIÓN APROBADA

1) Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 4 & si \quad x \le 2 \\ 4 - \dfrac{x}{a} & si \quad x > 2 \end{cases}$$

a) Halle el valor de a para que dicha función sea continua y estudie la derivabilidad de f para ese valor de a. *(1,5 puntos)*

b) Para $a = 1$, ¿existe alguna asíntota vertical de esa función? ¿Y horizontal? Razone las respuestas y calcule, en caso afirmativo, dichas asíntotas. *(0,5 puntos)*

2) a) Halle el dominio, los puntos de corte con los ejes, y las asíntotas de la función:

$$f(x) = \frac{4x^2}{2x+1}$$ *(0,2 + 0,3 +1 puntos)*

b) Halle los intervalos de monotonía, los extremos relativos, los intervalos de curvatura y los puntos de inflexión de la función $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$. Represéntela gráficamente. *(1 + 1 + 0,5 puntos)*

3) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = -2e^{3x}$ en el punto de abscisa $x = 0$. *(1 punto)*

4) Sea la función $f(x) = 2x^2 + ax + b$. Determine los valores de a y b sabiendo que su gráfica pasa por el punto (1, 3) y alcanza un extremo local en el punto de abscisa $x = -2$. *(1,5 puntos)*

5) Calcule las derivadas de las siguientes funciones: *(1,5 puntos)*

a) $f(x) = \left(\dfrac{2-5x}{3}\right)^2 + \dfrac{1-2x}{x^2}$

b) $g(x) = (3x + 2)^2 \ln(1 + x^2)$

c) $h(x) = 2^{5x} + \dfrac{1}{x^2}$

SOLUCIONES

1) Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 4 & si \quad x \le 2 \\ 4 - \dfrac{x}{a} & si \quad x > 2 \end{cases}$$

a) Halle el valor de a para que dicha función sea continua y estudie la derivabilidad de f para ese valor de a. *(1,5 puntos)*

Continuidad

Nos aseguramos de que sea continua en todo R, no sólo en el punto de conexión de zonas de definición de f, puesto que la continuidad y derivabilidad nos la piden en general, es decir, en todo R.

- Zona $(-\infty, 2)$: f coincide con una función polinómica, las cuales con continua en todo R, por lo que lo será en toda la zona.
- Zona $(2, +\infty)$: También es polinómica la expresión, de grado 1, con coeficiente $1/a$ para x^1. Luego también es continua aquí.
- $x = 2$: 1) $\exists f(2) = 2^2 - 3\cdot 2 + 4 = 2$. 2) Para ver si existe $\lim_{x\to 2} f(x)$ hemos de evaluar forzosamente los límites laterales, porque la fórmula de $f(x)$ es diferente a cada lado de $x = 2$:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(x^2 - 3x + 4) = 2; \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}\left(4 - \frac{x}{a}\right) = 4 - \frac{2}{a}$$

$f(2)$ y $\lim_{x\to 2} f(x)$ existirán y coincidirán (que es la condición para que f sea continua en $x = 2$) si y sólo si:

$$2 = 4 - \frac{2}{a} \iff 2a = 4a - 2 \iff 2 = 2a \iff a = 1$$

En resumen:

Si $a = 1$, f será continua en todo R. Si $a \ne 1$ f tendrá una discontinuidad de salto finito en $x = 2$, siendo continua en el resto.

Derivabilidad

Derivamos directamente en intervalos abiertos:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & si \quad x < 2 \\ -\dfrac{1}{a} & si \quad x > 2 \end{cases}$$

Si $a \ne 1$, al no ser f continua en $x = 2$, no será derivable en dicho punto. Si $a = 1$, podría serlo, por lo que estudiamos las derivadas laterales en $x = 2$ para $a = 1$:

$$f'(2^-) = 2\cdot 4 - 3 = 1; \quad f'(2^+) = -1 \ \ (\text{si } a = 1)$$

Como no coinciden, $\nexists f'(2)$. Por tanto, para ningún valor de a es derivable la función en $x = 2$, por lo que $\boxed{\text{la expresión final de la derivada es la anterior}}$.

b) Para $a = 1$, ¿existe alguna asíntota vertical de esa función? ¿Y horizontal? Razone las respuestas y calcule, en caso afirmativo, dichas asíntotas. *(0,5 puntos)*

Tenemos que:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 4 & si \quad x \le 2 \\ 4 - x & si \quad x > 2 \end{cases}$$

Como es continua en todo R, $\boxed{\text{no tiene asíntotas verticales}}$.

Como la expresión es polinómica tanto cuando hacemos tender x a $+\infty$ como cuando tiende a $-\infty$, y los límites de las expresiones polinómicas en el infinito valen siempre infinito, $\boxed{\text{no tiene asíntotas horizontales}}$.

2) a) Halle el dominio, los puntos de corte con los ejes, y las asíntotas de la función:

$$f(x) = \frac{4x^2}{2x+1}$$ *(0,2 + 0,3 +1 puntos)*

1. Dominio: $\boxed{\mathbb{R} - \{-1/2\}}$, puesto que $-1/2$ es el único valor de x que anula el denominador.
2. Cortes con los ejes:
   - $x = 0 \;\Rightarrow\; f(0) = 0$: $\boxed{\text{Corta en } (0, 0)}$.
   - $y = 0 \;\Rightarrow\; 0 = \dfrac{4x^2}{2x+1} \;\Rightarrow\; 4x^2 = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$: El mismo punto.
3. Asíntotas.
   - AH: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^2}{2x+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^2}{2x} = \lim\limits_{x\to\infty} 2x = \infty$ $\boxed{\text{No tiene asíntotas horizontales}}$.
   - AV: Tomamos límites en la única discontinuidad:

     $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} \dfrac{4x^2}{2x+1} = \left(\dfrac{1}{0}\right) = \infty \;\Rightarrow\;$ $\boxed{\text{La recta } x = -1/2 \text{ es asíntota vertical}}$.
   - AO:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4x^2}{2x+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2}{2x^2+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2}{2x^2} = 2$$

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x^2}{2x+1} - 2x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2 - 4x^2 - 2x}{2x+1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-2x}{2x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x}{2x} = \frac{-2}{2} = -1$$

Por tanto, $\boxed{\text{la recta } y = 2x - 1 \text{ es asíntota oblicua}}$.

b) Halle los intervalos de monotonía y los extremos relativos, los intervalos de curvatura y los puntos de inflexión de la función $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$. Represéntela gráficamente. *(1 + 1 + 0,5 puntos)*

1. Monotonía. Extremos relativos. Como $\boxed{g'(x) = 3x^2 + 6x + 3}$, tenemos:
   - Discontinuidades de g ó g': No tiene (son polinómicas).
   - $g'(x) = 0$: $3x^2 + 6x + 3 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 + 2x + 1 = 0 \;\Rightarrow\; (x+1)^2 = 0 \;\Rightarrow\; x = -1$.

   Dividimos R en intervalos mediante el único punto obtenido:

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, +\infty)$
g'	+	0	+
g	↗	...	↗

   $\boxed{\text{Siempre es creciente y no tiene extremos relativos}}$. En $x = -1$ tendrá pendiente horizontal, puesto que se anula la derivada.

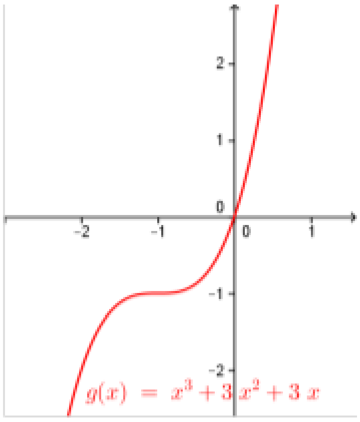
2. Curvatura. Puntos de inflexión.
$g''(x) = 6x + 6$
- Discontinuidades de g, g' ó g': No tiene (son polinómicas).
- $g''(x) = 0$: $6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1$.

Dividimos R en intervalos mediante el único punto obtenido:

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, +\infty)$
g''	–	0	+
g	$\cap$	P.I.	$\cup$

Tiene un punto de inflexión en $(-1, -1)$.

3. Gráfica.
Como g es polinómica, no tiene discontinuidades ni asíntotas. No es ni par ni impar, puesto que:
$g(-x) = (-x)^3 + 3(-x)^2 + 3(-x) = -x^3 + 3x^2 - 3x = -(x^3 - 3x^2 + 3x)$
Los cortes con los ejes son:
$x^3 + 3x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x(x^2 + 3x + 3) = 0 \Rightarrow x = 0$ ó $x^2 + 3x + 3 = 0$
puesto que un producto vale 0 si, y sólo si algún factor se anula. Y la ecuación de segundo grado no tiene solución, por lo que sólo corta a los ejes en (0, 0). Por ello, para afinar un poco nos vemos obligados a usar una pequeña tabla de valores, con lo que obtenemos la gráfica adjunta.



3) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = -2e^{3x}$ en el punto de abscisa $x = 0$. *(1 punto)*
- Punto de tangencia: $x = 0 \Rightarrow f(0) = -2e^0 = -2\cdot 1 = -2$: $(0, -2)$.
- Pendiente: $f'(x) = -2\cdot 3e^{3x} = -6e^{3x} \Rightarrow m = f'(0) = -6e^0 = -6\cdot 1 = -6$
- Ecuación: $y + 2 = -6(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = -6x - 2}$

4) Sea la función $f(x) = 2x^2 + ax + b$. Determine los valores de a y b sabiendo que su gráfica pasa por el punto (1, 3) y alcanza un extremo local en el punto de abscisa $x = -2$. *(1,5 puntos)*
- Pasa por $(1, 3) \Rightarrow f(1) = 3 \Rightarrow \boxed{2 + a + b = 3}$.
- Alcanza un extremo relativo en $x = -2 \Rightarrow f'(-2) = 0$. Como $f'(x) = 4x + a$, se tiene que: $-8 + a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 8}$.

Sustituyendo en la ecuación anterior: $2 + 8 + b = 3 \Rightarrow b = 3 - 10 = -7$.
De modo que: $\boxed{a = 8,\quad b = -7}$.

5) Calcule las derivadas de las siguientes funciones: *(1,5 puntos)*

a) $f(x) = \left(\dfrac{2-5x}{3}\right)^2 + \dfrac{1-2x}{x^2}$

$$f'(x) = 2\left(\frac{2-5x}{3}\right)\frac{-5}{3} + \frac{-2x^2-(1-2x)2x}{x^4} = \frac{-10(2-5x)}{9} + \frac{-2x^2-2x+4x^2}{x^4} =$$

$$= \frac{50x-20}{9} + \frac{2x^2-2x}{x^4} = \frac{50x-20}{9} + \frac{x(2x-2)}{x^4} = \frac{50x-20}{9} + \frac{2x-2}{x^3} =$$

$$= \frac{50x^4 - 20x^3}{9x^3} + \frac{18x - 18}{9x^3} = \boxed{\frac{50x^2 - 20x^3 + 18x - 18}{9x^3}}$$

b) $g(x) = (3x + 2)^2 \ln(1 + x^2)$

$$g\,'(x) = 2(3x + 2)3\ln(1 + x^2) + (3x + 2)^2 \frac{2x}{1+x^2} =$$

$$= \boxed{(18x + 12)\ln(1 + x^2) + \frac{2x(3x+2)^2}{1+x^2}}$$

c) $h(x) = 2^{5x} + \dfrac{1}{x^2}$

$$h'(x) = \boxed{5{\cdot}2^{5x}\ln 2 - \frac{2}{x^3}}$$

NOMBRE: ____

ALUMNOS CON LA PRIMERA EVALUACIÓN SUSPENDIDA

1) Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 4 & si \quad x \le 2 \\ 4 - \dfrac{x}{a} & si \quad x > 2 \end{cases}$$

Halle el valor de a para que dicha función sea continua y estudie la derivabilidad de f para ese valor de a. *(1,5 puntos)*

2) a) Halle el dominio, los puntos de corte con los ejes, y las asíntotas de la función:

$$f(x) = \frac{4x^2}{2x+1}$$ *(0,2 + 0,3 +1 puntos)*

c) Halle los intervalos de monotonía, los extremos relativos, los intervalos de curvatura y los puntos de inflexión de la función $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$. Represéntela gráficamente. *(1 + 1 + 0,5 puntos)*

3) Calcule las derivadas de las siguientes funciones: *(1,5 puntos)*

a) $f(x) = \left(\dfrac{2-5x}{3}\right)^2 + \dfrac{1-2x}{x^2}$

b) $g(x) = (3x + 2)^2 \ln(1 + x^2)$

c) $h(x) = 2^{5x} + \dfrac{1}{x^2}$

4) Sea la igualdad $A \cdot X + B = A$, donde A, X y B son matrices cuadradas de la misma dimensión.

a) Despeje la matriz X en la igualdad anterior, sabiendo que A tiene inversa. *(0,5 ptos)*

b) Obtenga la matriz X en la igualdad anterior, siendo: *(1 punto)*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

5) Sea el recinto del plano definido por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$x + y \le 3; \quad -x + y \le 3; \quad x \le 2; \quad y \ge 0$$ *(1,5 puntos)*

a) Represéntelo gráficamente.

b) Calcule los vértices de dicho recinto.

c) ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo de la función objetivo dada por: $F(x, y) = -2x - y$? ¿En qué puntos se alcanzan dichos valores?

SOLUCIONES

Los primeros ejercicios se encuentran resueltos en el examen de los alumnos con la primera evaluación aprobada.

4) Sea la igualdad $A \cdot X + B = A$, donde A, X y B son matrices cuadradas de la misma dimensión.

a) Despeje la matriz X en la igualdad anterior, sabiendo que A tiene inversa. *(0,5 ptos)*

$$A \cdot X + B = A \Rightarrow A \cdot X + B - B = A - B \Rightarrow A \cdot X = A - B \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (A - B) \Rightarrow \boxed{X = A^{-1} \cdot (A - B)}$$

b) Obtenga la matriz X en la igualdad anterior, siendo: *(1 punto)*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{Tiene inversa.}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}(A^t) = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}$$

Luego: $X = A^{-1} \cdot (A - B) = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right) =$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -4 & 19 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}}$$

5) Sea el recinto del plano definido por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$x + y \leq 3; \quad -x + y \leq 3; \quad x \leq 2; \quad y \geq 0$$ *(1,5 puntos)*

a) Represéntelo gráficamente.

Mediante una pequeña tabla de valores, dibujamos las rectas, teniendo en cuenta que $x = 2$ es una recta vertical, e $y = 0$ es el eje OX, y así tenemos el recinto.

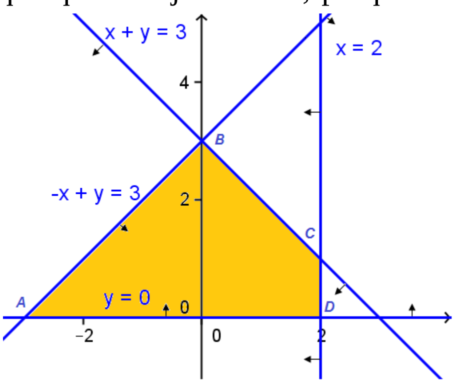
$x + y = 3$

x	0	3
y	3	0

$-x + y = 3$

x	0	-3
y	3	0

Para la primera inecuación: $x + y \leq 3 \Leftrightarrow y \leq 3 - x$, nos interesa el semiplano que queda bajo la recta, porque es aquél cuyos puntos tienen la coordenada y menor que los puntos de la recta.



Para la segunda inecuación: $-x + y \leq 3 \Leftrightarrow y \leq 3 + x$, nos interesa el semiplano que queda, igualmente, bajo la recta.

Para $x \leq 2$, el semiplano de la izquierda, que es aquél cuyos puntos tienen la x inferior a los puntos de la recta.

$y \geq 0$ corresponde a los puntos que están por encima del eje OX. Así, el recinto es el del gráfico.

b) Calcule los vértices de dicho recinto.

- *A*: Intersección de $-x+y=3$ con el eje OX: $\boxed{A(-3,\ 0)}$
- *B*: Intersección de $-x+y=3$ con $x+y=3$:

$$\left.\begin{array}{r} -x+y=3 \\ x+y=3 \end{array}\right\} \qquad \text{Se sustituye en la } 2^{\text{a}} \text{ ec}: \quad x+3=3 \Rightarrow x=0$$

$$2y=6 \Rightarrow y=3$$

Luego $\boxed{B(0,\ 3)}$

- *C*: Intersección de $x+y=3$ con $x=2$: $\boxed{C(2,\ 1)}$
- *D*: Intersección de $x=2$ con el eje OX: $\boxed{D(2,\ 0)}$

c) ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo de la función objetivo dada por: $F(x, y) = -2x - y$? ¿En qué puntos se alcanzan dichos valores?

- $F(A) = F(-3, 0) = -2(-3) - 0 = 6$
- $F(B) = F(0, 3) = -2\cdot 0 - 3 = -3$
- $F(C) = F(2, 1) = -2\cdot 2 - 1 = -5$
- $F(D) = F(2, 0) = -2\cdot 2 - 0 = -4$

$\boxed{\text{El máximo vale } 6 \text{ y se alcanza en } (-3, 0). \text{ El mínimo, } -5, \text{ en } (2, 1).}$

NOMBRE: ____

1) Sea la función $f(x)=\begin{cases} 9-x^2 & \text{si} \quad x\le 3 \\ -2x^2+16x-30 & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$.

   a) **(1 punto)** Estudie su continuidad y derivabilidad.
   b) **(1 punto)** Estudie su monotonía y calcule sus extremos relativos.
   c) **(0,5 puntos)** Represéntela gráficamente.

2) a) **(1.5 puntos)** Dada la función $f(x)=ax^2+bx$, calcule a y b para que la función tenga un extremo relativo en el punto (1, 4).

   b) **(1.5 puntos)** Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x)=\dfrac{2}{x}+\ln x$ en el punto de abscisa $x=1$.

3) Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

   a) **(0.5 puntos)** $f(x)=\dfrac{3x-1}{x}-(5x-x^2)^2$.
   b) **(0.5 puntos)** $g(x)=(x^2-1)\cdot\ln x$.
   c) **(0.5 puntos)** $h(x)=2^{5x}$.
   d) **(0.5 puntos)** $i(x)=(x^3-6x)\cdot(x^2+1)^3$.

4) Sea la función $f(x)=-x^3+6x^2-9x$.

   a) **(0,8 puntos)** Estudie la monotonía y calcule los extremos relativos de *f*.
   b) **(0,8 puntos)** Estudie la curvatura y calcule el punto de inflexión de *f*.
   c) **(0,9 puntos)** Represente gráficamente la función.

SOLUCIONES

1) Sea la función $f(x) = \begin{cases} 9 - x^2 & \text{si} \quad x \le 3 \\ -2x^2 + 16x - 30 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$.

a) **(1 punto)** Estudie su continuidad y derivabilidad.

Continuidad

- Zona $(-\infty, 3)$: f coincide con la función $y = 9 - x^2$, que, al ser polinómica, es continua en todos los números reales. Por tanto, es continua en $(-\infty, 3)$.
- Zona $(3, +\infty)$: f coincide con $y = -2x^2 + 16x - 30$, y, por idénticas razones, es continua en $(3, +\infty)$.
- $x = 3$: 1) $\exists f(3) = 9 - 3^2 = 0$.

  2) $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (9 - x^2) = 0$; $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (-2x^2 + 16x - 30) = -18 + 48 - 30 = 0$

  Por tanto $f(3) = \lim_{x \to 3} f(x) \Rightarrow$ f es continua en $x = 3$.

Luego $\boxed{f \text{ es continua en todo } \mathbb{R}}$.

Derivabilidad

Las fórmulas de derivación son aplicables en intervalos abiertos, por lo que obtenemos directamente que:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si} \quad x < 3 \\ -4x + 16 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

Para $x = 3$ tenemos: $f'(3^-) = -2 \cdot 3 = -6$; $f'(3^+) = -4 \cdot 3 + 16 = 4$ $\Rightarrow$ Al no coincidir, $\nexists f'(3)$. $\boxed{\text{La expresión final de } f'(x) \text{ es la anterior}}$.

b) **(1 punto)** Estudie su monotonía y calcule sus extremos relativos.

- Discontinuidades de f ó f': $x = 3$.
- $f'(x) = 0$:

  En $(-\infty, 3)$ tendría que ocurrir que $-2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, que es un punto válido, porque está en dicho intervalo.

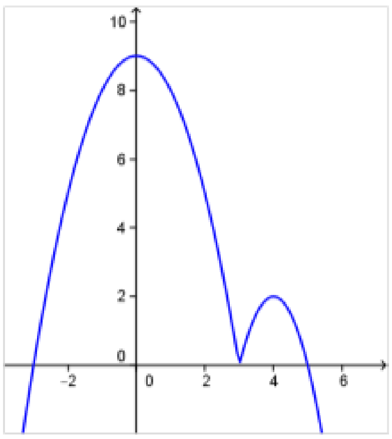
  En $(3, +\infty)$ debería ser $-4x + 16 = 0 \Leftrightarrow x = 4$. También es válido.

Dividimos $\mathbb{R}$ en intervalos mediante estos puntos:

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 3)$	3	$(3, 4)$	4	$(4, +\infty)$
f'	+	0	–	$\nexists$	+	0	–
f	↗	**Máx**	↘	**mín**	↗	**Máx**	↘

Luego la función tiene un mínimo en $(3, 0)$ y dos máximos en $(0, 9)$ y $(4, 2)$.

c) **(0,5 puntos)** Represéntela gráficamente.



Afinamos un poco para completar los datos que tenemos. La función está compuesta por dos trozos, cada uno de ellos es una parábola. Hallamos los cortes con los ejes.

- $x = 0 \Rightarrow f(0) = 9$. Corta en $\boxed{(0, 9)}$.
- $y = 0 \Rightarrow$ En $(-\infty, 3)$ sería $9 - x^2 = 0 \Rightarrow x = 3$: $\boxed{(3, 0)}$. Y en $(3, +\infty)$ tendríamos: $-2x^2 + 16x - 30 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0$ $x = 3$ ó $x = 5$. Así que tenemos $\boxed{(3, 0) \text{ y } (5, 0)}$.

Llevamos todo lo que sabemos a un gráfico y afinamos, si nos hace falta, con alguna pequeña tabla de valores, quedándonos la imagen adjunta.
Con Geogebra, para obtener la gráfica escribiríamos:
$f(x)$ = Si (x<=3, 9–x^2, –2x^2+16x–30)

2) a) **(1.5 puntos)** Dada la función $f(x) = ax^2 + bx$, calcule a y b para que la función tenga un extremo relativo en el punto (1, 4).

f es continua en todo R, por ser polinómica. Para tener un extremo relativo en el punto suministrado, debe ocurrir, por tanto, que $f'(1) = 0 \Rightarrow 2a\cdot 1 + b = 0$.
Además, (1, 4) es un punto de la gráfica. Por tanto $f(1) = 4 \Rightarrow a\cdot 1^2 + b\cdot 1 = 4$.
Nos resulta el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2a + b = 0 \\ a + b = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2a + b = 0 \\ -a - b = -4 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{Se sustituye en la 1ª ec:} \\ 2(-4) + b = 0 \Rightarrow b = 8 \end{array}$$
$$a \quad = -4$$

Luego $\boxed{a = -4,\ b = 8}$.

b) **(1.5 puntos)** Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x) = \dfrac{2}{x} + \ln x$ en el punto de abscisa $x = 1$.

- Coordenadas del punto de tangencia: (1, 2), puesto que $g(1) = \dfrac{2}{1} + \ln 1 = 2 + 0$.
- Pendiente en el punto de tangencia: $m = g'(1)$. Puesto que $g'(x) = -\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x}$
  $\Rightarrow m = g'(1) = -2 + 1 = -1$.
- Ecuación de la tangente: $y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = -1(x - 1) \Rightarrow$
  $\Rightarrow y = -x + 1 + 2 \Rightarrow \boxed{y = -x + 3}$.

3) Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

a) **(0.5 puntos)** $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x} - (5x - x^2)^2$.

$$f'(x) = \frac{3x - (3x - 1)}{x^2} - 2(5x - x^2)(5 - 2x) = \frac{3x - 3x + 1}{x^2} - (5x - x^2)(10 - 4x) =$$
$$= \frac{1}{x^2} - (50x - 20x^2 - 10x^2 + 4x^3) = \frac{1 - 50x^2 + 30x^4 - 4x^5}{x^2} =$$
$$= \boxed{\frac{-4x^5 + 30x^4 - 50x^2 + 1}{x^2}}$$

b) **(0.5 puntos)** $g(x) = (x^2 - 1)\cdot \ln x$.

$$g'(x) = \boxed{2x \ln x + \frac{x^2 - 1}{x}}$$

c) **(0.5 puntos)** $h(x) = 2^{5x}$.

$$h'(x) = \boxed{5\cdot 2^{5x} \ln 2}$$

d) **(0.5 puntos)** $i(x) = (x^3 - 6x)\cdot (x^2 + 1)^3$.

$$i'(x) = (3x^2 - 6)(x^2 + 1)^3 + (x^3 - 6x)3(x^2 + 1)^2 2x =$$
$$= (3x^2 - 6)(x^2 + 1)^3 + (6x^4 - 36x^2)(x^2 + 1)^2 =$$
$$= (x^2 + 1)^2[(3x^2 - 6)(x^2 + 1) + 6x^4 - 36x^2] =$$

$$= (x^2 + 1)^2(3x^4 + 3x^2 - 6x^2 - 6 + 6x^4 - 36x^2) =$$
$$= \boxed{(x^2 + 1)^2(9x^4 - 39x^2 - 6)}$$

4) Sea la función $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x$.

a) **(0,8 puntos)** Estudie la monotonía y calcule los extremos relativos de *f*.

$f'(x) = -3x^2 + 12x - 9$

- Discontinuidades de f ó de f': No tiene.
- $f'(x) = 0$: $x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1$ ó $x = 3$.

Dividimos R en intervalos mediante estos puntos:

	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
f'	–	0	+	0	–
f	↘	**mín**	↗	**Máx**	↘

Tiene un $\boxed{\text{mínimo relativo en } (1, -4) \text{ y un máximo relativo en } (3, 0)}$.

b) **(0,8 puntos)** Estudie la curvatura y calcule el punto de inflexión de *f*.

$f''(x) = -6x + 12$

- Discontinuidades de f, f' ó f'': No tiene.
- $f''(x) = 0$: $-6x + 12 = 0 \Rightarrow x = 2$.

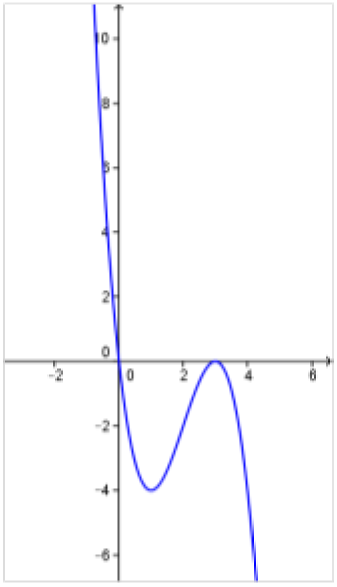
Dividimos R en intervalos mediante este punto:

	$(-\infty, 2)$	2	$(2, +\infty)$
f''	+	0	–
f	$\cup$	P.I.	$\cap$

Tiene un $\boxed{\text{punto de inflexión en } (2, -2)}$.

c) **(0,9 puntos)** Represente gráficamente la función.

Llevando los datos que conocemos a un gráfico, y considerando que pasa por (0, 0), la gráfica debe ser como la de la figura adjunta.



NOMBRE: ____

1) **(1,5 puntos)** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, y suponiendo que existe la inversa de A, despeje M en la siguiente ecuación y calcule, en consecuencia, su valor: $M \cdot A = A^t$.

2) **(2 puntos)** Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{2^x + x^2}{x}; \quad g(x) = (x^2 + 1)^2 \cdot \ln(e^{3x} + 4)$$

3) a) **(1,5 puntos)** Represente la región definida por las siguientes inecuaciones y determine sus vértices:

$$x \le 2; \quad y \ge -4x + 8; \quad 3y - 4x - 16 \le 0$$

b) **(0,5 puntos)** Calcule los valores máximo y mínimo en el recinto anterior de la función $F(x, y) = 3x - y$, y los puntos donde se alcanzan.

4) Sea la función $f(x) = \begin{cases} -x+4 & \text{si} \quad x < 2 \\ \dfrac{4}{x} & \text{si} \quad 2 \le x < 4 \\ x^2 - 4x + 1 & \text{si} \quad x \ge 4 \end{cases}$.

a) **(1 punto)** Estudie la continuidad (clasificando las discontinuidades) y la derivabilidad de f.

b) **(1,5 puntos)** Estudie su monotonía y determine los extremos locales de f.

c) **(1 punto)** Calcule las asíntotas de f.

d) **(1 punto)** Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 3$.

SOLUCIONES

1) **(1,5 puntos)** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, y suponiendo que existe la inversa de A, despeje M en la siguiente ecuación y calcule, en consecuencia, su valor: $M \cdot A = A^t$.

Multiplicando por la inversa de A a la derecha:

$M \cdot A = A^t \;\Rightarrow\; M \cdot A \cdot A^{-1} = A^t \cdot A^{-1} \;\Rightarrow\; \boxed{M = A^t \cdot A^{-1}}$

$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

$|A| = 10 - 12 = -2$ (en efecto, existe la inversa de A)

$$\text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}(A^t) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5/2 & -1/2 \end{pmatrix}}$$

2) **(2 puntos)** Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{2^x + x^2}{x}; \quad g(x) = (x^2+1)^2 \cdot \ln(e^{3x}+4)$$

$$f'(x) = \frac{(2^x \ln 2 + 2x)x - (2^x + x^2) \cdot 1}{x^2} = \frac{2^x x \ln 2 + 2x^2 - 2^x - x^2}{x^2} = \boxed{\frac{2^x x \ln 2 + x^2 - 2^x}{x^2}}$$

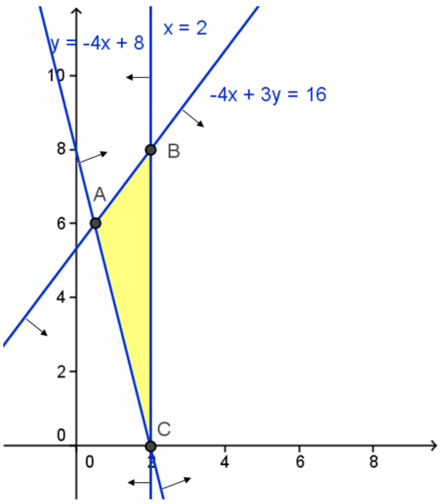
$$g'(x) = 2(x^2+1)2x\ln(e^{3x}+4) + (x^2+1)^2\,\frac{3e^{3x}}{e^{3x}+4} =$$

$$= \boxed{(4x^3+4x)\ln(e^{3x}+4) + \frac{3e^{3x}(x^2+1)^2}{e^{3x}+4}}$$

3) a) **(1,5 puntos)** Represente la región definida por las siguientes inecuaciones y determine sus vértices:

$$x \le 2; \quad y \ge -4x+8; \quad 3y - 4x - 16 \le 0$$

Cambiando los signos de desigualdad por iguales, dibujamos las tres rectas mediante tablas de valores, resultando el gráfico adjunto. Cada inecuación señala una zona de los dos semiplanos en los que queda dividido el plano mediante la recta correspondiente. Determinamos dichos semiplanos escogiendo un punto que sepamos con seguridad que está en uno de ellos y viendo si verifica la desigualdad. En caso afirmativo, el semiplano que contiene al punto elegido es el que resuelve la inecuación; y es el otro, en caso negativo. Señalamos el semiplano correspondiente mediante flechitas y la zona que verifica las tres desigualdades es la destacada en el gráfico.



Calculemos los vértices.

- A: Intersección de $y = -4x + 8$ con $-4x + 3y = 16$:

$$\left.\begin{array}{r} 4x + \ \ y = \ 8 \\ -4x + 3y = 16 \end{array}\right\} \qquad \text{Se sustituye en la 1ª ec:}$$

$$4y = 24 \Rightarrow y = 6 \qquad 4x + 6 = 8 \Rightarrow 4x = 2 \Rightarrow x = 1/2$$

Luego $\boxed{A(1/2, 6)}$

- B: Intersección de $x = 2$ con $–4x + 3y = 16$:
  Sustituyendo $x = 2$ en la otra ecuación: $–8 + 3y = 16 \Rightarrow 3y = 24 \Rightarrow y = 8$.
  Luego $\boxed{B(2, 8)}$.
- C: Intersección de $x = 2$ con $y = –4x + 8$:
  Sustituyendo $x = 2$ en la otra ecuación: $y = –8 + 8 = 0$.
  Luego $\boxed{B(2, 0)}$.

b) **(0,5 puntos)** Calcule los valores máximo y mínimo en el recinto anterior de la función $F(x, y) = 3x – y$, y los puntos donde se alcanzan.

- $F(A) = F(1/2, 6) = \dfrac{3}{2} - 6 = \dfrac{3-12}{2} = -\dfrac{9}{2}$
- $F(B) = F(2, 8) = 6 – 8 = – 2$
- $F(C) = F(2, 0) = 6$

El máximo vale 6 y se alcanza en $C(2, 0)$.   El mínimo vale $–9/2$ y se alcanza en $A(1/2, 6)$.

4) Sea la función $f(x) = \begin{cases} -x+4 & \text{si} \quad x<2 \\ \dfrac{4}{x} & \text{si} \quad 2 \le x < 4 \\ x^2-4x+1 & \text{si} \quad x \ge 4 \end{cases}$.

a) **(1 punto)** Estudie la continuidad (clasificando las discontinuidades) y la derivabilidad de f.

Continuidad

- Zona $(–\infty, 2)$: f coincide con la función $y = – x + 4$, que es continua en todo R, ya que se trata de una recta. Por tanto, es continua en todos los puntos de $(–\infty, 2)$.
- Zona $(2, 4)$: Aquí coincide con $y = 4/x$. Esta función, al ser elemental, es continua en todos los puntos de su dominio, que es R – {0}. Pero $x = 0$ no pertenece a esta zona. Luego es continua en toda la zona.
- Zona $(4, +\infty)$: f coincide con $y = x^2 – 4x + 1$, que es continua en todos los números reales, por ser polinómica. Luego f es continua en todos los puntos de $(4, +\infty)$.
- $x = 2$: 1) $\exists f(2) = 4/2 = 2$; 2) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(-x+4) = -2+4 = 2$; $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \dfrac{4}{x} = \dfrac{4}{2} = 2$. Por tanto, $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$, por lo que f es continua en $x = 2$.
- $x = 4$: $\exists f(4) = 4^2 – 4\cdot 4 + 1 = 1$; 2) $\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} \dfrac{4}{x} = 1$; $\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+}(x^2-4x+1) = 1$. Luego f es continua en $x = 4$.

Así que $\boxed{f \text{ es continua en R}}$.

Derivabilidad

Como f es continua en todos los puntos, podemos estudiar la derivada. Podemos aplicar directamente las reglas de derivación en intervalos abiertos; resulta:

$$f'(x)=\begin{cases}-1 & \text{si} \quad x<2\\ -\dfrac{4}{x^2} & \text{si} \quad 2<x<4\\ 2x-4 & \text{si} \quad x>4\end{cases}$$

- $\underline{x=2}$: $f'(2^-)=-1$; $f'(2^+)=-4/2^2=-1 \Rightarrow \exists f'(2)=-1$.
- $\underline{x=4}$: $f'(4^-)=-4/4^2=-¼$; $f'(4^+)=2\cdot4-4=4 \Rightarrow \nexists f'(4)$.

Por tanto, la expresión final de la derivada es:

$$\boxed{f'(x)=\begin{cases}-1 & \text{si} \quad x\le 2\\ -\dfrac{4}{x^2} & \text{si} \quad 2<x<4\\ 2x-4 & \text{si} \quad x>4\end{cases}}$$

Para dibujar la gráfica con Geogebra, escribimos:

$f(x)$ = Si($x<2$, $-x+4$, Si($x<4$, $4/x$, x^2 – $4x$ + 1))

b) **(1,5 puntos)** Estudie su monotonía y determine los extremos locales de f.

- Discontinuidades de f ó f': $x=4$.
- $\underline{f'(x)=0}$: Sólo puede ser cuando $x>4$, pues las otras dos fórmulas igualadas a 0 no dan solución: $2x-4=0 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2$, pero este punto no está en la zona donde es válida la fórmula $f'(x)=2x-4$. Lo desechamos.

Dividimos R en intervalos mediante estos puntos:

	$(-\infty, 4)$	4	$(4, +\infty)$
f'	–	∄	+
f	↘	**mín**	↗

Luego la función $\boxed{\text{tiene un mínimo en } (4, 1)}$.

c) **(1 punto)** Calcule las asíntotas de f.

Las funciones polinómicas no tienen asíntotas. Si intentásemos calcularla para lo zona en la que f es una recta, saldría la propia recta. De modo que cuando x tiende a $+\infty$ ó a $-\infty$ f no tiene asíntotas de ningún tipo.

Sólo puede tenerlas en puntos de discontinuidad. Como es continua en todo R, $\boxed{\text{no tiene asíntotas}}$.

d) **(1 punto)** Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=3$.

- Coordenadas del punto de tangencia: (3, 4/3).
- Pendiente en el punto de tangencia: $m=f'(3)=-4/9$.
- Ecuación de la tangente: $y-y_0=m(x-x_0) \Rightarrow y-\dfrac{4}{3}=-\dfrac{4}{9}(x-3) \Rightarrow$

$$9\left(y-\frac{4}{3}\right)=-4(x-3) \Rightarrow 9y-12=-4x+12 \Rightarrow 9y=-4x+24 \Rightarrow$$

$$\boxed{y=\frac{-4x+24}{9}}$$