NOMBRE: ____

1) Calcule las derivadas de las siguientes funciones: *(2 puntos)*

$$f(x) = \left(\frac{2-5x}{3}\right)^2 + \frac{1-2x}{x^2}; \qquad g(x) = (3x+2)^2 \cdot \ln(1+x^2)$$

2) Estudie la derivabilidad de la función: *(3 puntos)*

$$f(x) = \begin{cases} e^x & si \quad x \le 0 \\ 1 & si \quad 0 < x \le 3 \\ -x^2+6x+2 & si \quad x > 3 \end{cases}$$

3) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$, siendo: *(2 puntos)*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2-x} & si \quad x \le 1 \\ x^2-6x+6 & si \quad x > 1 \end{cases}$$

4) Estudiar la continuidad, clasificando sus discontinuidades, hallar las asíntotas y los puntos de corte con los ejes de coordenadas de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{2x^2-8}{2x+1}$$ *(1+1,5+0,5 puntos)*

SOLUCIONES

1) Calcule las derivadas de las siguientes funciones: *(2 puntos)*

$$f(x) = \left(\frac{2-5x}{3}\right)^2 + \frac{1-2x}{x^2}; \qquad g(x) = (3x+2)^2 \cdot \ln(1+x^2)$$

$$f'(x) = 2\frac{2-5x}{3}\cdot\frac{-5}{3} + \frac{-2x^2-(1-2x)2x}{x^4} = \frac{-20+50x}{9} + \frac{-2x^2-2x+4x^2}{x^4} =$$

$$= \frac{50x-20}{9} + \frac{2x^2-2x}{x^4} = \frac{50x-20}{9} + \frac{x(2x-2)}{x^4} = \boxed{\frac{50x-20}{9} + \frac{2x-2}{x^3}} =$$

$$= \frac{(50x-20)x^3+(2x-2)9}{9x^3} = \boxed{\frac{50x^4-20x^3+18x-18}{9x^3}}$$

$$g'(x) = 2(3x+2)3\cdot\ln(1+x^2) + (3x+2)^2\frac{2x}{1+x^2} =$$

$$= \boxed{(18x+12)\cdot\ln(1+x^2) + \frac{2x(3x+2)^2}{1+x^2}}$$

2) Estudie la derivabilidad de la función: *(3 puntos)*

$$f(x) = \begin{cases} e^x & si \quad x \le 0 \\ 1 & si \quad 0 < x \le 3 \\ -x^2+6x+2 & si \quad x > 3 \end{cases}$$

Para estudiar la derivabilidad hemos de ver antes la continuidad aunque no nos la pidan, porque si en un punto f no fuera continua no sería, tampoco, derivable (en dicho punto).

Continuidad

- Zona $(-\infty, 0)$: f coincide con $y = e^x$, que es continua en su dominio, por ser una función elemental, siendo éste todo R. Como no presenta, pues, discontinuidades, f es continua en todo $(-\infty, 0)$. Observar que $x = 0$ no se ha incluido en la zona, porque los puntos que conectan diferentes definiciones en una función definida a trozos hay que estudiarlos *siempre* por separado.
- Zona $(0, 3)$: $y = 1$ es continua en R (es una recta), luego lo es en $(0, 3)$.
- Zona $(3, +\infty)$: f es continua en toda la zona, por ser polinómica.
- $x = 0$: Estudiamos la continuidad en este punto verificando las tres condiciones de la definición de continuidad de una función en un punto:

  i) $\exists f(0) = e^0 = 1$, ya que cuando $x = 0$ estamos en la primera forma de definición de f, porque ésta es válida cuando $x \le 0$.

  ii) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^x = e^0 = 1$; $\quad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 = 1$

  ya que, a la izquierda de $x = 0$, es decir, cuando $x < 0$, $f(x)$ vale e^x, y a la derecha (si $x > 0$), 1. Al coincidir los dos límites laterales, $\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

  Como $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) \Rightarrow f$ es continua en $x = 0$.

- $x = 3$: De análoga forma:

  iii) $\exists f(3) = 1$.

  iv) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} 1 = 1$; $\quad \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} (-x^2+6x+2) = -9+18+2 = 11$

Como no coinciden los dos límites laterales, $\nexists \lim_{x\to 3} f(x) = 1$. Por tanto, no es continua en $x = 3$, presentando una discontinuidad de salto finito.

Luego, $\boxed{f \text{ es continua en } R - \{3\}\text{, con una discontinuidad de salto finito en } x = 3}$.

Como sólo nos piden la *derivabilidad* de la función, no es necesario clasificar la discontinuidad. Es más, no debe responderse a lo que no nos piden, porque no nos dará puntos y, además, corremos el riesgo de equivocarnos inútilmente.

Derivabilidad

Las fórmulas de la tabla de derivadas son ciertas en intervalos abiertos, por lo que pueden usarse de esta forma directamente, resultando:

$$f'(x) = \begin{cases} e^x & si \quad x < 0 \\ 0 & si \quad 0 < x < 3 \\ -2x + 6 & si \quad x > 3 \end{cases}$$

Falta estudiar la derivabilidad en $x = 0$ y en $x = 3$.

Como f es continua en un entorno de $x = 0$, podemos usar que:

$f'(0^-) = e^0 = 1$; $f'(0^+) = 0 \Rightarrow \nexists f'(0)$, por no coincidir las derivadas laterales.

Pero en $x = 3$ la función no puede ser derivable, porque no es continua. Si no hubiésemos recabado este dato e intentásemos hacer lo anterior (que no es válido porque f no es continua en $x = 3$), hubiésemos obtenido la siguiente información falsa: $f'(3^-) = 0$; $f'(3^+) = -2\cdot 3 + 6 = 0$, y concluiríamos erróneamente que $\exists f'(3) = 0$.

En definitiva, es válida la expresión anterior:

$$\boxed{f'(x) = \begin{cases} e^x & si \quad x < 0 \\ 0 & si \quad 0 < x < 3 \\ -2x + 6 & si \quad x > 3 \end{cases}}$$

3) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$, siendo: *(2 puntos)*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2-x} & si \quad x \le 1 \\ x^2 - 6x + 6 & si \quad x > 1 \end{cases}$$

En un entorno de $x = 0$, $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$. Como la tangente se calcula, según la interpretación geométrica de la derivada, por la fórmula $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, siendo (x_0, y_0) las coordenadas del punto de tangencia, basta quedarse con la fórmula válida en el entorno de $x_0 = 0$.

- Punto de tangencia: Cuando $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = f(0) = \dfrac{1}{2-0} = \dfrac{1}{2}$. Es: (0, 1/2).
- Pendiente de la tangente: Como $f'(x) = \dfrac{0 - 1(-1)}{(2-x)^2} = \dfrac{1}{(2-x)^2} \Rightarrow m = f'(0) = \dfrac{1}{4}$.
- Ecuación de la recta tangente: $y - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}}$

4) Estudiar la continuidad, clasificando sus discontinuidades, hallar las asíntotas y los puntos de corte con los ejes de coordenadas de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{2x^2-8}{2x+1}$$ *(1+1,5+0,5 puntos)*

Continuidad

Las funciones elementales con continuas en su dominio. El de ésta lo constituyen todos los valores de x que no anulen el denominador, lo que ocurre cuando:

$$2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1/2$$

Veamos qué discontinuidad hay.

a) $\nexists f'(-1/2)$.

b) $\lim_{x\to-\frac{1}{2}} \frac{2x^2-8}{2x+1} = \left(\frac{-15/2}{0}\right) = \infty$. Además: $\lim_{x\to-\frac{1}{2}^-} \frac{2x^2-8}{2x+1} = +\infty$ y $\lim_{x\to-\frac{1}{2}^+} \frac{2x^2-8}{2x+1} = -\infty$

Luego $\boxed{\text{es continua en } R - \{-1/2\}\text{, con disc. asintótica de salto infinito en } x = -1/2}$.
Los signos de infinito los obtenemos dando a x valores muy próximos a $-1/2$ por el lado correspondiente (izquierda o derecha), y observando los signos de los resultados.

Asíntotas

- Verticales: Según lo anterior, $\boxed{x = -1/2 \text{ es asíntota vertical}}$.
- Horizontales: $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-8}{2x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{2x} = \lim_{x\to\infty} x = \infty \Rightarrow$ $\boxed{\text{No tiene A.H.}}$
- Oblicuas: $m = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2-8}{2x+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-8}{2x^2+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{2x^2} = \lim_{x\to\infty} 1 = 1$

  $n = \lim_{x\to\infty}[f(x)-mx] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-8}{2x+1} - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-8-x(2x+1)}{2x+1} =$

  $= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-8-2x^2-x}{2x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-8-x}{2x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$

  Por tanto, $\boxed{\text{la recta } y = x - 1/2 \text{ es asíntota oblicua}}$.

Intersecciones con los ejes

- $x = 0 \Rightarrow y = -8$. $\boxed{\text{Corta a OY en } (0, -8)}$.
- $y = 0 \Rightarrow 2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$. $\boxed{\text{Corta a OX en } (-2, 0) \text{ y } (2, 0)}$.

NOMBRE: ____

1ª EVALUACIÓN: □ APROBADA □ SUSPENDIDA (Marcar lo correcto)

1) Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2+24 & si \quad -4 \le x < -3 \\ x^2-3 & si \quad -3 \le x \le 2 \\ -x^2+5 & si \quad 2 < x \le 4 \end{cases}$$

a) Estudiar la continuidad y derivabilidad de f en su dominio. *(1 punto)*
b) Estudiar la monotonía de f en su dominio, calculando los extremos relativos. *(1,5 puntos)*
c) Calcular los extremos absolutos de f. *(1,5 puntos)*

2) Sea la función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$. Si consideramos la función $g(x) = f\,'(x)$, calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$. *(1 punto)*

3) Calcule las derivadas de las siguientes funciones: *(0,6+0,6+0,8 puntos)*

a) $f(x) = \dfrac{(x^2-5)^4}{3-x^2}$ b) $g(x) = e^{7x}(x-5x^2)^3$ c) $h(x) = \dfrac{x\cdot \ln(x^2-1)}{x-2}$

4) **(Sólo para quienes tienen *aprobada* la 1ª evaluación)** Determine las intersecciones con los ejes y asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{2x^2-8}{x-3}$ *(1,5 puntos)*

5) **(Sólo para quienes tienen *aprobada* la 1ª evaluación)** Dada la función $f(x) = x^3 - ax + b$, calcular a y b para que tenga tangente horizontal en (0, 1). *(1,5 puntos)*

6) **(Sólo para quienes tienen *pendiente* la 1ª evaluación)** Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Despeje X en la ecuación matricial: $A\cdot X + B\cdot C = D$. *(0,5 puntos)*
b) Calcule X, según el resultado del apartado anterior. *(1 punto)*

7) **(Sólo para quienes tienen *pendiente* la 1ª evaluación)** Se desea maximizar la función $F(x, y) = 14x + 8y$ en el recinto dado por:

$$y + 3x \ge 9; \quad y \le -\frac{4}{7}x + 14; \quad 5x - 2y \le 15; \quad x \ge 0$$

a) Represente la región factible y obtenga el valor máximo de F y la solución óptima del problema. *(1 punto)*
b) Obtenga un punto de la región factible que no sea el óptimo. *(0,5 puntos)*

SOLUCIONES

1) Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 24 & si \quad -4 \le x < -3 \\ x^2 - 3 & si \quad -3 \le x \le 2 \\ -x^2 + 5 & si \quad 2 < x \le 4 \end{cases}$$

a) Estudiar la continuidad y derivabilidad de f en su dominio. *(1 punto)*

Continuidad

- Zona [–4, –3): f es continua, puesto que tiene una expresión polinómica, y los polinomios son funciones continuas en todo R.
- Zona (–3, 2): f es continua por idéntica razón.
- Zona (2, 4]: f es continua por idéntica razón.
- $x = -3$: 1) $\exists f(-3) = (-3)^2 - 3 = 6$; 2) Para ver si existe el límite de $f(x)$ cuando x tiende a –3, hemos de estudiar los límites laterales, porque la expresión de f es diferente cuando x se encuentra a la izquierda o a la derecha de –3. Así: $\lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^-}(-2x^2+24) = 6$; $\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+}(x^2-3) = 6$. Como ambos valores coinciden, $\exists \lim_{x\to -3} f(x) = 6$. 3) El límite y la imagen dan el mismo resultado. Como se cumplen las tres condiciones de continuidad, f es continua en $x = -3$.
- $x = 2$: 1) $\exists f(2) = -2^2 + 5 = 1$; 2) Como antes, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(x^2-3) = 1$; $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(-x^2+5) = 1$. Como coinciden y, además, lo hacen con la imagen, f es continua en $x = 2$.

Como consecuencia, hemos obtenido que $\boxed{f \text{ es continua en todo su dominio}}$, que es [–4, 4]. Comentar que la continuidad en un intervalo cerrado se entiende que se refiere a todos los puntos del abierto y a la continuidad lateral, desde dentro del intervalo, en los extremos del mismo.

Derivabilidad

Al ser continua en todo su dominio, podría ser derivable. Aplicamos las fórmulas de las tablas de derivadas, pero teniendo en cuenta que son válidas sólo en intervalos abiertos, de donde deducimos, en primer lugar, que:

$$f'(x) = \begin{cases} -4x & si \quad -4 < x < -3 \\ 2x & si \quad -3 < x < 2 \\ -2x & si \quad 2 < x < 4 \end{cases}$$

y nos falta estudiar si existe la derivada en los puntos de conexión de zonas. Así:

- $f'(-3^-) = -4(-3) = 12$; $f'(-3^+) = 2(-3) = -6 \Rightarrow \nexists f'(-3)$, porque no coinciden.
- $f'(2^-) = 2\cdot 2 = 4$; $f'(2^+) = -2\cdot 2 = -4 \Rightarrow \nexists f'(2)$, porque no coinciden.

Por tanto, la expresión definitiva de f' era la que escribimos antes:

$$\boxed{f'(x) = \begin{cases} -4x & si \quad -4 < x < -3 \\ 2x & si \quad -3 < x < 2 \\ -2x & si \quad 2 < x < 4 \end{cases}}$$

b) Estudiar la monotonía de f en su dominio, calculando los extremos relativos. *(1,5 puntos)*

No debemos estudiarla por separado en las funciones que forman f y restringiéndola a su zona, porque chocaríamos con los puntos de conexión de zonas, que no entrarían en el proceso. Por tanto, procedemos con f globalmente.

Monotonía

- Discontinuidades de f ó de f': f no tiene discontinuidades, pero sí f', en –3 y en 2 (puesto que falla la primera condición de continuidad, ya que no tiene imagen en ellos).
- Valores que anulan f': Vemos, por separado, cada una de las fórmulas que conforman f':
  - $-4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, pero no es un valor de la zona de validez de la fórmula, que es el intervalo (–4, –3).
  - $2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, que sí hay que considerarlo, porque está en (–3, 2), donde es válida la fórmula.
  - $-2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, no válido, porque no está en (2, 4).

De este modo, el cuadro de monotonía es:

	(–4, –3)	–3	(–3, 0)	0	(0, 2)	2	(2, 4)
f'	+	∄	–	0	+	∄	–
f	↗	Mx	↘	mín	↗	Mx	↘

Las coordenadas de los extremos relativos son (sustituimos cada x en f):

- $\boxed{\text{Máximo relativo en } (-3, 6) \text{ y en } (2, 1)}$.
- $\boxed{\text{Mínimo relativo en } (0, -3)}$.

Otra posibilidad de abordar el problema, menos elegante pero válida, es dibujar la gráfica completa, trazando las tres parábolas por separado y restringiéndolas cada una a su zona, y deducir qué sucede en los puntos de conexión desde la propia gráfica. La gráfica figura más abajo.

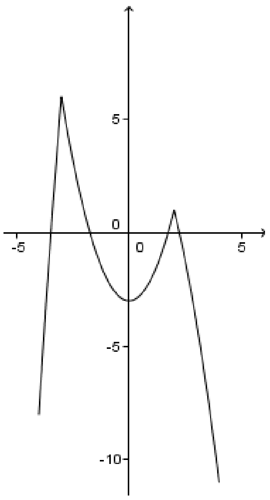
c) Calcular los extremos absolutos de f. *(1,5 puntos)*

Consideramos los puntos donde podemos encontrarlos:

- Extremos del intervalo de definición de f: –4; 4.
- Discontinuidades de f: No tiene.
- Discontinuidades de f': –3 y 2.
- Valores que anulan f': 0.

Estudiamos las imágenes o límites (si no puede calcularse imagen) en cada uno de ellos:

- $x = -4$: $f(-4) = -8$.
- $x = 4$: $f(4) = -11$.
- $x = -3$: $f(-3) = 6$.
- $x = 2$: $f(2) = 1$.
- $x = 0$: $f(0) = -3$.



En consecuencia, de entre estos resultados escogemos:

- Mayor resultado en $x = -3$ (imagen): El máximo absoluto se alcanza en $x = -3$ y vale 6.
- Menor resultado en $x = 4$ (imagen): El mínimo absoluto se alcanza en $x = 4$ y vale –11.

Otra forma de resolver el problema sería dibujar la función y, a partir de la gráfica, deducir estos resultados.

2) Sea la función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$. Si consideramos la función $g(x) = f'(x)$, calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$. *(1 punto)*

Para empezar, calculamos quién es g:

$$g(x) = f'(x) = \frac{1}{3}3x^2 + \frac{1}{2}2x - 2 = x^2 + x - 2$$

- Punto de tangencia: $g(2) = 4 + 2 - 2 = 4$: $(2, 4)$.
- Pendiente de la tangente: $g'(x) = 2x + 1 \Rightarrow m = g'(2) = 5$.
- Ecuación de la tangente: $y - 4 = 5(x - 2) \Rightarrow y = 5x - 10 + 4 \Rightarrow \boxed{y = 5x - 6}$.

3) Calcule las derivadas de las siguientes funciones: *(0,6+0,6+0,8 puntos)*

a) $f(x) = \frac{(x^2-5)^4}{3-x^2}$ b) $g(x) = e^{7x}(x - 5x^2)^3$ c) $h(x) = \frac{x\cdot\ln(x^2-1)}{x-2}$

- $f(x) = \frac{(x^2-5)^4}{3-x^2} \Rightarrow$

$$f'(x) = \frac{4(x^2-5)^3 2x(3-x^2) - (x^2-5)^4(-2x)}{(3-x^2)^2} =$$

$$= \frac{8x(x^2-5)^3(3-x^2) + 2x(x^2-5)^4}{(3-x^2)^2} = \frac{(x^2-5)^3[8x(3-x^2) + 2x(x^2-5)]}{(3-x^2)^2} =$$

$$= \frac{(x^2-5)^3[24x - 8x^3 + 2x^3 - 10x]}{(3-x^2)^2} = \boxed{\frac{(x^2-5)^3(-6x^3+14x)}{(3-x^2)^2}}$$

- $g(x) = e^{7x}(x - 5x^2)^3 \Rightarrow$
$g'(x) = 7e^{7x}(x - 5x^2)^3 + e^{7x}\,3(x - 5x^2)^2(1 - 10x) =$
$= e^{7x}(x - 5x^2)^2\,[7(x - 5x^2) + 3(1 - 10x)] = e^{7x}(x - 5x^2)^2\,[7x - 35x^2 + 3 - 30x] =$
$= \boxed{e^{7x}(x - 5x^2)^2\,(-35x^2 - 23x + 3)}$

- $h(x) = \frac{x\cdot\ln(x^2-1)}{x-2} \Rightarrow$

$$h'(x) = \frac{\left[\ln(x^2-1) + x\frac{2x}{x^2-1}\right](x-2) - x\ln(x^2-1)}{(x-2)^2} =$$

$$= \frac{\frac{(x^2-1)\ln(x^2-1) + 2x^2}{x^2-1}(x-2) - x\ln(x^2-1)}{(x-2)^2} =$$

$$= \frac{\frac{(x^2-1)(x-2)\ln(x^2-1) + 2x^2(x-2) - x(x^2-1)\ln(x^2-1)}{x^2-1}}{(x-2)^2} =$$

$$= \boxed{\frac{(x^2-1)(x-2)\ln(x^2-1) + 2x^2(x-2) - x(x^2-1)\ln(x^2-1)}{(x^2-1)(x-2)^2}}$$

4) **(Sólo para quienes tienen *aprobada* la 1ª evaluación)** Determine las intersecciones con los ejes y asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{2x^2-8}{x-3}$ *(1,5 puntos)*

Intersecciones con los ejes

- $x = 0 \Rightarrow f(0) = 8/3$: $\boxed{(0,\ 8/3)}$ (intersección con OY).
- $y = 0 \Rightarrow 0 = \dfrac{2x^2-8}{x-3} \Rightarrow 2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$: $\boxed{(-2,\ 0);\ (2,\ 0)}$ (intersección con OX).

Asíntotas

- Asíntotas verticales: Es preciso disponer de los puntos de discontinuidad. Como Dom(f) = R – {3}, la única discontinuidad la tenemos en 3, punto que anula el denominador. Es el único candidato, por lo que calculamos:

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-8}{x-3} = \left(\frac{10}{0}\right) = \infty \Rightarrow \boxed{\text{La recta } x = 3 \text{ es una asíntota vertical.}}$$

- Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-8}{x-3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x} = \lim_{x\to\infty}2x = \infty \Rightarrow \boxed{\text{No tiene A.H.}}$$

- Asíntotas oblicuas:
Procede su cálculo, porque no hemos obtenido ninguna horizontal:
  - $m = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{2x^2-8}{x-3}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-8}{(x-3)x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-8}{x^2-3x} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) =$
  $= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2}{x^2} = 2$
  - $n = \lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - mx] = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2-8}{x-3} - 2x\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-8-2x(x-3)}{x-3} =$
  $= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-8-2x^2+6x}{x-3} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-8+6x}{x-3} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x}{x} = 6$

  Por lo que $\boxed{y = 2x + 6 \text{ es asíntota oblicua}}$.

5) **(Sólo para quienes tienen *aprobada* la 1ª evaluación)** Dada la función $f(x) = x^3 - ax + b$, calcular a y b para que tenga tangente horizontal en (0, 1). *(1,5 puntos)*

- Una recta horizontal tiene como pendiente 0. La pendiente de la tangente en $x = a$ es $f'(a)$. Luego para tener tangente horizontal en $x = 0$ tiene que ocurrir que $f'(0) = 0$, Y ya que $f'(x) = 3x^2 - a \Rightarrow 3\cdot 0^2 - a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 0}$.
- Pasa por (0, 1) $\Rightarrow f(0) = 1 \Rightarrow \boxed{b = 1}$.

6) **(Sólo para quienes tienen *pendiente* la 1ª evaluación)** Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},\quad D = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Despeje X en la ecuación matricial: $A\cdot X + B\cdot C = D$. *(0,5 puntos)*

$A\cdot X + B\cdot C = D \Rightarrow A\cdot X + B\cdot C - B\cdot C = D - B\cdot C \Rightarrow A\cdot X + O = D - B\cdot C \Rightarrow$
donde O es la matriz nula 2x1, ya que $B\cdot C$ tiene esa dimensión.

$\Rightarrow A{\cdot}X = D - B{\cdot}C \Rightarrow A^{-1}A{\cdot}X = A^{-1}(D - B{\cdot}C) \Rightarrow I{\cdot}X = A^{-1}(D - B{\cdot}C) \Rightarrow$
donde I es la matriz identidad 2x2, ya que ésa es la dimensión de A. Además, estamos suponiendo que existe la inversa de A. Si no fuera así, no sería posible el despeje.

$$\Rightarrow \boxed{X = A^{-1}(D - B{\cdot}C)}$$

b) Calcule X, según el resultado del apartado anterior. *(1 punto)*
Lo primero que vamos a calcular es la inversa de A, pues si no existe, no se podría resolver el problema que nos piden.

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 9 = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$.

$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}}$

Por otra parte:

$$D - B{\cdot}C = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

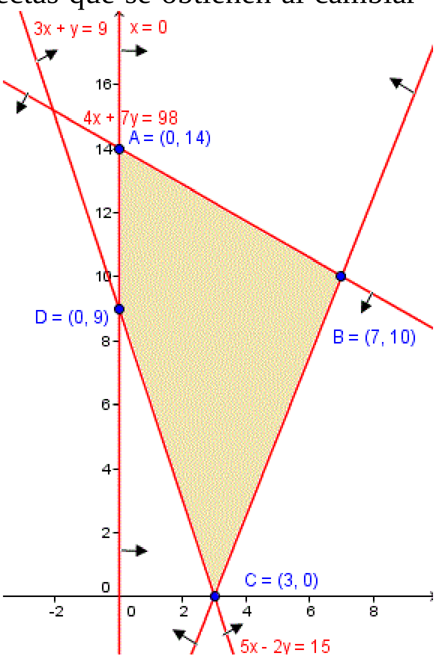
Y, finalmente:

$$X = A^{-1}(D - B{\cdot}C) = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -11 \\ 6 \end{pmatrix}}$$

7) **(Sólo para quienes tienen *pendiente* la 1ª evaluación)** Se desea maximizar la función $F(x, y) = 14x + 8y$ en el recinto dado por:

$$y + 3x \geq 9; \quad y \leq -\frac{4}{7}x + 14; \quad 5x - 2y \leq 15; \quad x \geq 0$$

a) Represente la región factible y obtenga el valor máximo de F y la solución óptima del problema. *(1 punto)*
Mediante tablas de valores, representamos las rectas que se obtienen al cambiar el signo de desigualdad por un igual en cada una de las inecuaciones. Después, decidimos, para cada una de de ellas, cuál de los dos semiplanos nos interesa. Para la primera, es el de arriba, pues al despejar queda $y \geq$ (ec. de la recta); para la segunda, el de abajo, pues es $y \leq$ (ec. de la recta); para la tercera, el de arriba, pues resulta $y \geq \dfrac{5x - 15}{2}$. Y la última, señala la para que queda a la derecha del eje OY, cuya ecuación es $x = 0$. Así, la región factible, a falta de calcular sus vértices, es la del gráfico.



Vértice A
$x = 0 \Rightarrow 4{\cdot}0 + 7y = 98 \Rightarrow 7y = 98 \Rightarrow y = 14$
Luego $\boxed{A(0, 14)}$.

Vértice B

$$\begin{cases} 4x + 7y = 98 \\ 5x - 2y = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x + 14y = 196 \\ 35x - 14y = 105 \end{cases}$$

Sumando: $43x = 301 \Rightarrow x = 7$
Sust. en la 2ª ec:
$35 - 2y = 15 \Rightarrow 2y = 20 \Rightarrow y = 10$
Luego $\boxed{B(7, 10)}$.

Vértice C

$y = 0 \Rightarrow 5x - 2\cdot 0 = 15 \Rightarrow x = 3$. Luego $\boxed{C(3, 0)}$.

Vértice D

$x = 0 \Rightarrow 3\cdot 0 + y = 9 \Rightarrow y = 9$. Luego $\boxed{D(0, 9)}$.

Calculamos el valor de la función objetivo en cada vértice:

- $F(A) = F(0, 14) = 14\cdot 0 + 8\cdot 14 = 112$
- $F(B) = F(7, 10) = 14\cdot 7 + 8\cdot 10 = 178$
- $F(C) = F(3, 0) = 14\cdot 3 + 8\cdot 0 = 42$
- $F(D) = F(0, 9) = 14\cdot 0 + 8\cdot 9 = 72$

Por tanto, $\boxed{\text{el máximo se alcanza en (7, 10) y vale 178}}$.

b) Obtenga un punto de la región factible que no sea el óptimo. *(0,5 puntos)*
Cualquier vértice que no sea (7, 10) nos vale. Por ejemplo, (0, 9).

NOMBRE: ____

1ª EVALUACIÓN: □ APROBADA □ SUSPENDIDA (Marcar lo correcto)

1) Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2+10 & si \quad -3 \le x < -2 \\ x^2-2 & si \quad -2 \le x \le 3 \\ -x^2+16 & si \quad 3 < x \le 4 \end{cases}$$

a) Estudiar la continuidad y derivabilidad de f en su dominio. *(1 punto)*

b) Estudiar la monotonía de f en su dominio, calculando los extremos relativos. *(1,5 puntos)*

c) Calcular los extremos absolutos de f. *(1,5 puntos)*

d) Calcule la recta tangente a f en el punto de abscisa $x = 2$ *(1 punto)*

2) Calcule las derivadas de las siguientes funciones: *(0,6+0,6+0,8 puntos)*

a) $f(x) = e^{3x} \cdot \ln(2x-5)$ b) $g(x) = \dfrac{3^{2x}}{x^2-1}$ c) $h(x) = (3x^2+5x-1)^6 + x^2 - \ln x$

3) **(Sólo para quienes tienen *aprobada* la 1ª evaluación)** Determine las intersecciones con los ejes y asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{2x^2-18}{x-1}$ *(1,5 puntos)*

4) **(Sólo para quienes tienen *aprobada* la 1ª evaluación)** Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + b$, calcular a y b para que tenga un punto de inflexión en (1, 2). *(1,5 puntos)*

5) **(Sólo para quienes tienen *pendiente* la 1ª evaluación)** Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Despeje X en la ecuación matricial $AX + BA = B$. *(0,5 puntos)*

b) Calcule X, según el resultado del apartado anterior. *(1 punto)*

6) **(Sólo para quienes tienen *pendiente* la 1ª evaluación)** Se considera el recinto del plano determinado por los siguientes semiplanos:

$$4x - y \ge 4; \quad 2x + y \le 15; \quad 3y - x \le 10; \quad y \ge 0$$

a) Represente la región factible y calcule el máximo y el mínimo, en el recinto, de la función $F(x, y) = 4x - 7y$, indicando dónde se alcanzan. *(1 punto)*

b) Indique un punto del recinto que no sea óptimo. *(0,5 puntos)*

SOLUCIONES

1) Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2+10 & si \quad -3 \le x < -2 \\ x^2-2 & si \quad -2 \le x \le 3 \\ -x^2+16 & si \quad 3 < x \le 4 \end{cases}$$

a) Estudiar la continuidad y derivabilidad de f en su dominio. *(1 punto)*

Continuidad

- Zona [–3, –2): f es continua, puesto que tiene una expresión polinómica, y los polinomios son funciones continuas en todo R.
- Zona (–2, 3): f es continua por idéntica razón.
- Zona (3, 4]: f es continua por idéntica razón.
- $x = -2$: 1) $\exists f(-2) = (-2)^2 - 2 = 2$; 2) Para ver si existe el límite de $f(x)$ cuando x tiende a -2, hemos de estudiar los límites laterales, porque la expresión de f es diferente cuando x se encuentra a la izquierda o a la derecha de -2: $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-}(-2x^2+10) = 2$; $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+}(x^2-2) = 2$. Como ambos valores coinciden, $\exists \lim\limits_{x\to -2} f(x) = 2$. 3) El límite y la imagen dan el mismo resultado. Como se cumplen las tres condiciones de continuidad, f es continua en $x = -2$.
- $x = 3$: 1) $\exists f(3) = 3^2 - 2 = 7$; 2) Como antes, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-}(x^2-2) = 7$; $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+}(-x^2+16) = 7$. Como coinciden y, además, lo hacen con la imagen, f es continua en $x = 3$.

Como consecuencia, hemos obtenido que $\boxed{f \text{ es continua en todo su dominio}}$, que es [–3, 4]. Comentar que la continuidad en un intervalo cerrado se entiende que se refiere a todos los puntos del abierto y a la continuidad lateral, desde dentro del intervalo, en los extremos del mismo.

Derivabilidad

Al ser continua en todo su dominio, podría ser derivable. Aplicamos las fórmulas de las tablas de derivadas, pero teniendo en cuenta que son válidas sólo en intervalos abiertos, de donde deducimos, en primer lugar, que:

$$f'(x) = \begin{cases} -4x & si \quad -3 < x < -2 \\ 2x & si \quad -2 < x < 3 \\ -2x & si \quad 3 < x < 4 \end{cases}$$

y nos falta estudiar si existe la derivada en los puntos de conexión de zonas. Así:

- $f'(-2^-) = -4(-2) = 8$; $f'(-2^+) = 2(-2) = -4 \Rightarrow \nexists f'(-2)$, porque no coinciden.
- $f'(3^-) = 2\cdot 3 = 6$; $f'(3^+) = -2\cdot 3 = -6 \Rightarrow \nexists f'(2)$, porque no coinciden.

Por tanto, la expresión definitiva de f' era la que escribimos antes:

$$\boxed{f'(x) = \begin{cases} -4x & si \quad -3 < x < -2 \\ 2x & si \quad -2 < x < 3 \\ -2x & si \quad 3 < x < 4 \end{cases}}$$

b) Estudiar la monotonía de f en su dominio, calculando los extremos relativos. *(1,5 puntos)*

No debemos estudiarla por separado en las funciones que forman f y restringiéndola a su zona, porque chocaríamos con los puntos de conexión de zonas, que no entrarían en el proceso. Por tanto, procedemos con f globalmente.

Monotonía

- Discontinuidades de f ó de f': f no tiene discontinuidades, pero sí f', en -2 y en 3 (puesto que falla la primera condición de continuidad, ya que no tiene imagen en ellos).
- Valores que anulan f': Vemos, por separado, cada una de las fórmulas que conforman f':
  - $-4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, pero no es un valor de la zona de validez de la fórmula, que es el intervalo $(-3, -2)$.
  - $2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, que sí hay que considerarlo, porque está en $(-2, 3)$, donde es válida la fórmula.
  - $-2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, no válido, porque no está en $(3, 4)$.

De este modo, el cuadro de monotonía es:

	$(-3, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, 3)$	3	$(3, 4)$
f'	+	∄	–	0	+	∄	–
f	↗	Mx	↘	mín	↗	Mx	↘

Las coordenadas de los extremos relativos son (sustituimos cada x en f):

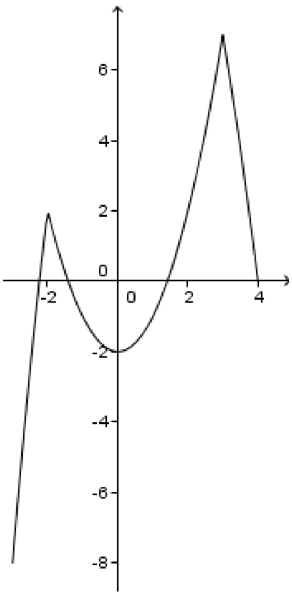
- $\boxed{\text{Máximo relativo en } (-2, 2) \text{ y en } (3, 7)}$.
- $\boxed{\text{Mínimo relativo en } (0, -2)}$.

Otra posibilidad de abordar el problema, menos elegante pero válida, es dibujar la gráfica completa, trazando las tres parábolas por separado y restringiéndolas cada una a su zona, y deducir qué sucede en los puntos de conexión desde la propia gráfica. La gráfica figura más abajo.

c) Calcular los extremos absolutos de f. *(1,5 puntos)*

Consideramos los puntos donde podemos encontrarlos:

- Extremos del intervalo de definición de f: -3; 4.
- Discontinuidades de f: No tiene.
- Discontinuidades de f': -2 y 3.
- Valores que anulan f': 0.



Estudiamos las imágenes o límites (si no puede calcularse imagen) en cada uno de ellos:

- $x = -3$: $f(-3) = -8$.
- $x = 4$: $f(4) = 0$.
- $x = -2$: $f(-2) = 2$.
- $x = 3$: $f(3) = 7$.
- $x = 0$: $f(0) = -2$.

En consecuencia, de entre estos resultados escogemos:

- Mayor resultado en $x = 3$ (imagen): El máximo absoluto se alcanza en $x = 3$ y vale 7.
- Menor resultado en $x = -3$ (imagen): El mínimo absoluto se alcanza en $x = -3$ y vale -8.

Otra forma de resolución, igualmente válida, sería dibujar la función y, a partir de la gráfica, deducir estos resultados.

d) Calcule la recta tangente a f en el punto de abscisa $x = 2$ *(1 punto)*
Podemos conseguir un entorno de $x = 2$ totalmente incluido en la zona [–2, 3], por lo que trabajaremos con la fórmula $y = x^2 - 2$.

- Punto de tangencia: $f(2) = 4 - 2 = 2$: (2, 2).
- Pendiente de la tangente: $f'(x) = 2x \Rightarrow m = f'(2) = 4$.
- Ecuación de la tangente: $y - 2 = 4(x - 2) \Rightarrow y = 4x - 8 + 2 \Rightarrow \boxed{y = 4x - 6}$.

2) Calcule las derivadas de las siguientes funciones: *(0,6+0,6+0,8 puntos)*

a) $f(x) = e^{3x}\cdot\ln(2x - 5)$ b) $g(x) = \dfrac{3^{2x}}{x^2 - 1}$ c) $h(x) = (3x^2 + 5x - 1)^6 + x^2 - \ln x$

a) $f(x) = e^{3x}\cdot\ln(2x - 5)$

$$f'(x) = 3e^{3x}\ln(2x-5) + e^{3x}\frac{2}{2x-5} = \boxed{e^{3x}\left(3\ln(2x-5) + \frac{2}{2x-5}\right)}$$

b) $g(x) = \dfrac{3^{2x}}{x^2 - 1}$

$$g'(x) = \boxed{\frac{2\cdot 3^{2x}(\ln 3)(x^2-1) - 2x\cdot 3^{2x}}{(x^2-1)^2}}$$

c) $h(x) = (3x^2 + 5x - 1)^6 + x^2 - \ln x$

$$h'(x) = \boxed{6(3x^2 + 5x - 1)^5(6x + 5) + 2x - \frac{1}{x}}$$

3) **(Sólo para quienes tienen *aprobada* la 1ª evaluación)** Determine las intersecciones con los ejes y asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{2x^2 - 18}{x - 1}$ *(1,5 puntos)*

Intersecciones con los ejes

- $x = 0 \Rightarrow f(0) = -18/(-1)$: $\boxed{(0, 18)}$ (intersección con OY).
- $y = 0 \Rightarrow 0 = \dfrac{2x^2 - 18}{x - 1} \Rightarrow 2x^2 - 18 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$: $\boxed{(-3, 0); (3, 0)}$
  (intersección con OX).

Asíntotas

- Asíntotas verticales: Es preciso disponer de los puntos de discontinuidad. Como Dom(f) = R – {1}, la única discontinuidad la tenemos en 1, punto que anula el denominador. Es el único candidato, por lo que calculamos:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-18}{x-1} = \left(\frac{-16}{0}\right) = \infty \Rightarrow \boxed{\text{La recta } x = 1 \text{ es una asíntota vertical.}}$$

- Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-18}{x-1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} 2x = \infty \Rightarrow \boxed{\text{No tiene A.H.}}$$

- Asíntotas oblicuas:
  Procede su cálculo, porque no hemos obtenido ninguna horizontal:

- $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2-18}{x-1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-18}{(x-1)x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-18}{x^2-x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$
  $= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$
- $n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2-18}{x-1} - 2x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-18-2x(x-1)}{x-1} =$
  $= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-18-2x^2+2x}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-18+2x}{x-1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x} = 2$

Por lo que $\boxed{y = 2x + 2 \text{ es asíntota oblicua}}$.

4) **(Sólo para quienes tienen *aprobada* la 1ª evaluación)** Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + b$, calcular a y b para que tenga un punto de inflexión en (1, 2). *(1,5 puntos)*

- Punto de inflexión en $x = 1 \Rightarrow$ Como se trata de una función derivable indefinidamente, debe ser $f''(1) = 0 \wedge f'''(1) \neq 0$. Y siendo $f'(x) = 3x^2 + 2ax$, $f''(x) = 6x + 2a$, $f'''(x) = 6 \neq 0$, exigiremos que $6\cdot 1 + 2a = 0 \Rightarrow 2a = -6 \Rightarrow \boxed{a = -3}$.
- Pasa por (1, 2) $\Rightarrow f(1) = 2 \Rightarrow 1 + a + b = 2 \Rightarrow 1 - 3 + b = 2 \Rightarrow -2 + b = 2 \Rightarrow \boxed{b = 4}$.

5) **(Sólo para quienes tienen *pendiente* la 1ª evaluación)** Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Despeje X en la ecuación matricial $AX + BA = B$. *(0,5 puntos)*

$$AX + BA = B \Rightarrow AX + BA - BA = B - BA \Rightarrow AX + O = B - BA \Rightarrow$$

donde O es la matriz nula de orden 2.

$$AX = B - BA \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(B - BA) \Rightarrow \boxed{X = A^{-1}(B - BA)}$$

suponiendo que $\exists A^{-1}$.

b) Calcule X, según el resultado del apartado anterior. *(1 punto)*

Lo primero que vamos a calcular es la inversa de A, pues si no existe, no se podría resolver el problema que nos piden.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}.$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}}$$

Por otra parte:

$$B - B\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Y, finalmente:

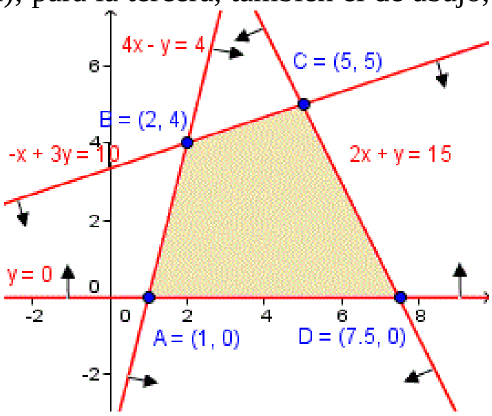
$$X = A^{-1}(B - B\cdot A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -23 & -5 \end{pmatrix}}$$

6) **(Sólo para quienes tienen *pendiente* la 1ª evaluación)** Se considera el recinto del plano determinado por los siguientes semiplanos:

$$4x - y \geq 4; \quad 2x + y \leq 15; \quad 3y - x \leq 10; \quad y \geq 0$$

a) Represente la región factible y calcule el máximo y el mínimo, en el recinto, de la función $F(x, y) = 4x - 7y$, indicando dónde se alcanzan. *(1 punto)*

Mediante tablas de valores, representamos las rectas que se obtienen al cambiar el signo de desigualdad por un igual en cada una de las inecuaciones. Después, decidimos, para cada una de de ellas, cuál de los dos semiplanos nos interesa. Para la primera, es el de abajo, pues al despejar queda $y \leq 4x - 4$; para la segunda, el de abajo, pues es $y \leq$ (ec. de la recta); para la tercera, también el de abajo, pues resulta $y \leq$ (ec. de la recta). Y la última, señala la para que queda sobre la recta horizontal $y = 0$ (eje OX). Así, la región factible, a falta de calcular sus vértices, es la del gráfico.



Vértice *A*:
$y = 0 \Rightarrow 4x - 0 = 4 \Rightarrow x = 1$: $\boxed{A(1, 0)}$.

Vértice *B*:
$$\begin{cases} 4x - y = 4 \\ -x + 3y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x - 3y = 12 \\ -x + 3y = 10 \end{cases} \Rightarrow$$
Sumando: $11x = 22 \Rightarrow x = 2$
Sustituyendo en la 1ª ec: $8 - y = 4 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow \boxed{B(2, 4)}$.

Vértice *C*:
$$\begin{cases} 2x + y = 15 \\ -x + 3y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 15 \\ -2x + 6y = 20 \end{cases} \Rightarrow \text{Sumando: } 7y = 35 \Rightarrow y = 5$$
Sustituyendo en la 1ª ec: $2x + 5 = 15 \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5$: $\boxed{C(5, 5)}$.

Vértice *D*:
$y = 0 \Rightarrow 2x + 0 = 15 \Rightarrow x = 15/2$: $\boxed{D(15/2, 0)}$.

Calculamos los valores de la función objetivo en los vértices:

- $F(A) = F(1, 0) = 4\cdot 1 - 7\cdot 0 = 4$
- $F(B) = F(2, 4) = 4\cdot 2 - 7\cdot 4 = -20$
- $F(C) = F(5, 5) = 4\cdot 5 - 7\cdot 5 = -15$
- $F(D) = F(15/2, 0) = 4(15/2) - 7\cdot 0 = 30$

$\boxed{\text{Máximo igual a 30, alcanzado en (15/2, 0). Mínimo igual a –20, en (2, 4)}}$.

b) Indique un punto del recinto que no sea óptimo. *(0,5 puntos)*

Vale cualquier otro vértice. Por ejemplo (5, 5).

NOMBRE: ____

1) Dado el recinto limitado por las inecuaciones *(2 puntos)*

$$y \geq 30,\ \ 3x - y \geq 150,\ \ 6x + 7y \leq 840,$$

halle en qué puntos de ese recinto la función $F(x, y) = 6x - 2y$ alcanza su valor mínimo.

2) Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Despeje X en la ecuación matricial $B \cdot X = 3A + A^t$ y determine la matriz X que la verifica. *(1,5 puntos)*

3) Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2-x} & si \quad x \leq 1 \\ x^2 - 6x + 6 & si \quad x > 1 \end{cases}$$

se pide:

a) Estudiar la continuidad y derivabilidad. *(1,5 puntos)*

b) Estudiar la monotonía y calcular los extremos locales. *(1,5 puntos)*

c) Calcular los extremos absolutos. *(1,5 puntos)*

d) Calcular la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$. *(1 punto)*

e) Derivar: $g(x) = (x^2 + 1)^2 \cdot \ln(e^{3x} + 4)$ *(1 punto)*

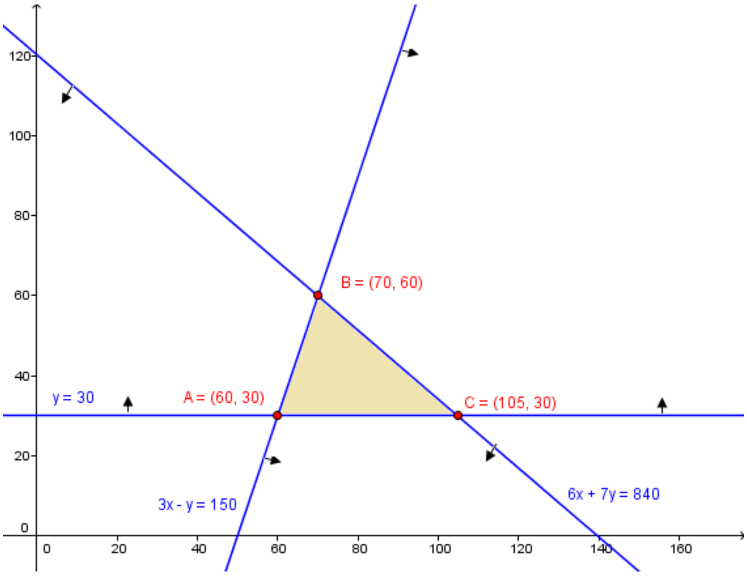
SOLUCIONES

1) Dado el recinto limitado por las inecuaciones *(2 puntos)*

$$y \geq 30,\ \ 3x - y \geq 150,\ \ 6x + 7y \leq 840,$$

halle en qué puntos de ese recinto la función $F(x, y) = 6x - 2y$ alcanza su valor mínimo.

Mediante tablas de valores, representamos las rectas que se obtienen al cambiar el signo de desigualdad por un igual en cada una de las inecuaciones. Después, decidimos, para cada una de de ellas, cuál de los dos semiplanos nos interesa. Para la primera, es el de arriba, porque es $y \geq$ (ec. de la recta). En la segunda, el de abajo, pues al despejar queda $y \leq 3x - 150$, o sea, $y \leq$ (ecuación de la recta). Y para la tercera, también el de abajo, por la misma razón. Así, la región factible, a falta de calcular sus vértices, es la del gráfico.



Calculamos las coordenadas de los vértices:

- A: $\begin{cases} y = 30 \\ 3x - y = 150 \end{cases} \Rightarrow 3x - 30 = 150 \Rightarrow 3x = 180 \Rightarrow x = 60$: $\boxed{A(60, 30)}$.
- B: $\begin{cases} 6x + 7y = 840 \\ 3x - y = 150 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x + 7y = 840 \\ \underline{-6x + 2y = -300} \end{cases}$ Sumando : $9y = 540 \Rightarrow y = 60$ Sustituyendo en la 2ª: $3x - 60 = 150 \Rightarrow$ $3x = 210 \Rightarrow x = 70$

  Luego $\boxed{B(70, 60)}$.
- C: $\begin{cases} y = 30 \\ 6x + 7y = 840 \end{cases} \Rightarrow 6x + 210 = 840 \Rightarrow 6x = 630 \Rightarrow x = 105$: $\boxed{C(105, 30)}$.

Evaluamos la función objetivo en cada vértice:

- $F(60, 30) = 6 \cdot 60 - 2 \cdot 30 = 300$
- $F(70, 60) = 6 \cdot 70 - 2 \cdot 60 = 300$
- $F(105, 30) = 6 \cdot 105 - 2 \cdot 30 = 570$

Como el mínimo se alcanza en dos vértices, la solución la constituyen todos y cada uno de los puntos del $\boxed{\text{segmento que une (60, 30) con (70, 60), ambos inclusive}}$.

2) Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Despeje X en la ecuación matricial $B \cdot X = 3A + A^t$ y determine la matriz X que la verifica. *(1,5 puntos)*

$$B \cdot X = 3A + A^t \Rightarrow B^{-1} B \cdot X = B^{-1}(3A + A^t) \Rightarrow \boxed{X = B^{-1}(3A + A^t)}$$

supuesto que existe B^{-1}. Hagamos los cálculos, para obtener X:

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists B^{-1}.$$

$$B^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj}(B^t) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{B^{-1}} = \frac{1}{|B|} Adj(B^t) = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}}$$

Por otra parte:

$$\boxed{3A + A^t} = 3\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 15 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 16 & 8 \end{pmatrix}}$$

Luego:

$$\boxed{X} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 16 & 8 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 8 & 8 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}}$$

3) Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2-x} & si \quad x \le 1 \\ x^2 - 6x + 6 & si \quad x > 1 \end{cases}$$

se pide:

a) Estudiar la continuidad y derivabilidad. *(1,5 puntos)*

Aunque no nos pidieran la continuidad, para estudiar la derivabilidad tenemos que hacerla, porque donde no sea continua no puede ser derivable.

Continuidad

- Zona $(-\infty, 1)$: f coincide con $y = \dfrac{1}{2-x}$ que, al ser elemental, es continua en su dominio. Éste lo constituyen los puntos que no anulen el denominador, o sea todo R salvo 2. Pero $2 \notin (-\infty, 1)$, por lo que no nos importa: en todos los puntos de la zona, la función $y = \dfrac{1}{2-x}$ (y, por coincidir con ella, f), es continua.
- Zona $(1, +\infty)$: f coincide con $y = x^2 - 6x + 6$, que es continua, por ser polinómica, en todo R, en particular, en nuestra zona. O sea, f es continua en todo el intervalo.
- $x = 1$: Los puntos que conectan una zona con otra tienen que estudiarse siempre por separado.

  1) $\exists\, f(1) = \dfrac{1}{2-1} = 1$

  2) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{2-x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x^2 - 6x + 6) = 1$

  Como los dos límites laterales coinciden y existen, el límite completo toma el valor coincidente. A su vez, es igual a la imagen del punto, por lo que se cumplen las tres condiciones de continuidad: f es continua en $x = 1$.

Por tanto, $\boxed{f \text{ es continua en todo } \mathbb{R}}$.

Derivabilidad

Las fórmulas de la *tabla de derivadas* son aplicable en intervalos abiertos, por lo que obtenemos, directamente, que:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(2-x)^2} & si \quad x < 1 \\ 2x - 6 & si \quad x > 1 \end{cases}$$

Falta ver si existe f' en $x = 1$. Como:

$$f'(1^-) = \frac{1}{(2-1)^2} = 1 \quad \text{y} \quad f'(1^+) = 2\cdot 1 - 6 = -4 \ \Rightarrow\ \nexists f'(1)$$

por tanto, la expresión definitiva de f es la que ya teníamos, lo que implica que f' es discontinua en $x = 1$, porque no tiene imagen en dicho punto, es decir, por fallar la primera condición para que sea continua. Así:

$$\boxed{f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(2-x)^2} & si \quad x<1 \\ 2x-6 & si \quad x>1 \end{cases}}$$

b) Estudiar la monotonía y calcular los extremos locales. *(1,5 puntos)*

- Discontinuidades de f: No tiene.
- Discontinuidades de f': $x = 1$.
- $f'(x) = 0$: Si estamos en $(-\infty, 1)$: $\dfrac{1}{(2-x)^2} = 0 \ \Rightarrow\ 1 = 0$, lo que no es posible. Y si estamos en $(1, +\infty)$: $2x - 6 = 0 \ \Rightarrow\ x = 3$, que sí hay que considerarlo, porque es un punto de nuestra zona $(1, +\infty)$.

Dividimos el dominio en intervalos por los puntos obtenidos:

	$(-\infty, 1)$	1	(1, 3)	3	$(3, +\infty)$
f'	+	∄	–	0	+
f	↗	Mx	↘	mín	↗

- Máximo relativo: (1, 1) (sustituyendo $x = 1$ en f).
- Mínimo relativo: (3, –3)

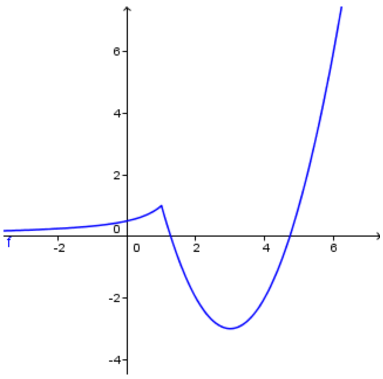
c) Calcular los extremos absolutos. *(1,5 puntos)*

Hacemos el estudio teórico.

- Extremos del intervalo de definición de f: $-\infty$, $+\infty$.
- Puntos de discontinuidad de f: No hay.
- Puntos de discontinuidad de f': $x = 1$.
- Puntos que anulan f': $x = 3$.

Comparamos imágenes (o límites, cuando no haya imagen o, aunque la haya, en los puntos de discontinuidad de f) en los puntos obtenidos:

- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2-x} = \frac{1}{-(-\infty)} = 0$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^2 - 6x + 6) = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$
- $f(1) = 1$
- $f(3) = -3$



Mínimo valor obtenido: –3, para $x = 3$, y es imagen (no procede de un límite) $\Rightarrow$ $\boxed{\text{mínimo absoluto en } x = 3 \text{ que vale } -3}$.

Máximo valor obtenido: $+\infty$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{No alcanza el máximo absoluto}}$.

Este estudio también podría haberse deducido de la gráfica, que puede realizarse estudiando por separado $y = \dfrac{1}{2-x}$ y la función $y = x^2 - 6x + 6$, restringiéndolas, cada una, a las zonas donde coinciden con f. Se adjunta la gráfica final de f.

d) Calcular la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.
(1 punto)

En un entorno de centro $x = 0$, f coincide con $y = \dfrac{1}{2-x}$, por lo que nos limitamos a trabajar con esta función.

- Punto de tangencia: $x = 0 \Rightarrow f(0) = 1/2$.
- Pendiente de la tangente: $f'(x) = 1/(2-x)^2 \Rightarrow m = f'(0) = 1/4$.
- Ecuación de la tangente: $y - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}(x-0) \Rightarrow y = \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{2} \Rightarrow \boxed{y = \dfrac{x+2}{4}}$

e) Derivar: $g(x) = (x^2+1)^2 \cdot \ln(e^{3x}+4)$ *(1 punto)*

$$\boxed{g'(x)} = 2(x^2+1)2x\ln(e^{3x}+4) + (x^2+1)^2\frac{3e^{3x}}{e^{3x}+4} =$$

$$= \boxed{(4x^3+4x)\ln(e^{3x}+4) + \frac{3e^{3x}(x^2+1)^2}{e^{3x}+4}}$$