NOMBRE: ____

Instrucciones: 1) Todos los folios deben tener el nombre y estar numerados en la parte superior. 2) Todas las respuestas deben estar justificadas y simplificadas. 3) No se puede usar corrector ni lápiz. Se aconseja no usar borrador. 4) Se puede alterar el orden de las respuestas, pero no se puede intercalar la respuesta a una pregunta con las de otras.

1) Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que:

$$P(A) = 0.4, \quad P(B) = 0.5 \quad \text{y} \quad P(A \cap B) = 0.15$$

   a) Calcule las siguientes probabilidades: $P(A \cup B)$; $P(A/B)$; $P(B - A)$; $P(A^C \cap B^C)$. *(2 puntos)*

   b) Razone si los sucesos A y B son incompatibles y si son independientes. *(1 pto)*

2) En una primera bolsa se han colocado 4 bolas blancas y 3 negras, y en una segunda bolsa 3 blancas y 5 negras. Se saca una bola de la primera y, sin verla, se introduce en la segunda. A continuación, se saca una bola de la segunda. Halle la probabilidad de que:

   a) La bola extraída de la segunda bolsa sea negra. *(1 punto)*

   b) La bola extraída de la primera bolsa sea negra, si sabemos que la bola extraída de la segunda ha sido blanca. *(2 puntos)*

3) Sea X una variable aleatoria Normal de media 50 y desviación típica 4. Se toman muestras de tamaño 16.

   a) ¿Cuál es la distribución de la media muestral? *(1 punto)*

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 47.5 y 52.5? *(2 puntos)*

4) Una población se ha dividido en 4 estratos de tamaño 15%, 40%, 25% y 20% del total. Utilizando muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional, se han seleccionado 10 individuos del tercer estrato. ¿Cuál es el tamaño de la muestra, y cuál es la composición de la misma, según los estratos? *(1 punto)*

SOLUCIONES

1) Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que:

$$P(A) = 0.4, \quad P(B) = 0.5 \quad \text{y} \quad P(A\cap B) = 0.15$$

a) Calcule las siguientes probabilidades: $P(A\cup B)$; $P(A/B)$; $P(B-A)$; $P(A^C\cap B^C)$. *(2 puntos)*

Usamos la fórmula que nos da la probabilidad de la unión de dos sucesos:

$$\boxed{P(A\cup B) =} P(A) + P(B) - P(A\cap B) = 0.4 + 0.5 - 0.15 = \boxed{0.75}$$

Y, ahora, la de la probabilidad condicionada:

$$\boxed{P(A/B) =} \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0.15}{0.5} = \boxed{0.3}$$

La fórmula que nos proporciona la probabilidad de la diferencia de sucesos:

$$\boxed{P(B-A) =} P(B\cap A^C) = P(B) - P(A\cap B) = 0.5 - 0.15 = \boxed{0.35}$$

Por una de las Leyes de Morgan:

$$\boxed{P(A^C\cap B^C) =} P((A\cup B)^C) = 1 - P(A\cup B) = 1 - 0.75 = \boxed{0.25}$$

b) Razone si los sucesos A y B son incompatibles y si son independientes. *(1 pto)*

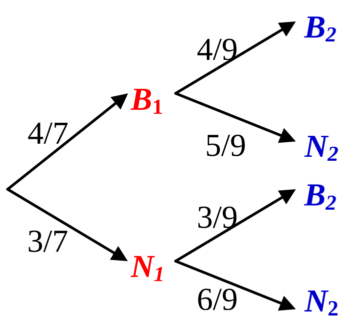
Dos sucesos son incompatibles si, y sólo si la probabilidad del suceso intersección de ambos es 0. Como $P(A\cap B) = 0.15 \neq 0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{No son incompatibles}}$.

Dos sucesos A y B son independientes si, y sólo si $P(A/B) = P(A)$ (hay otras formas equivalentes de verlo. Dado que $P(A/B) = 0.3$, como se calculó antes, y $P(A) = 0.4$, según el enunciado, los sucesos $\boxed{\text{no son independientes}}$.

2) En una primera bolsa se han colocado 4 bolas blancas y 3 negras, y en una segunda bolsa 3 blancas y 5 negras. Se saca una bola de la primera y, sin verla, se introduce en la segunda. A continuación, se saca una bola de la segunda. Halle la probabilidad de que:

a) La bola extraída de la segunda bolsa sea negra. *(1 punto)*

Llamamos B_1 y N_1 a los sucesos consistentes en extraer bola *blanca* o *negra*, respectivamente, de la primera bolsa. Análogo para B_2 y N_2 y la segunda bolsa. Creamos un diagrama de árbol con las probabilidades correspondientes, según las condiciones de las que nos informa el enunciado (en el árbol, en la segunda fase, las probabilidades son *condicionadas* al resultado de la primera fase). Se adjunta el diagrama.



Según el *Teorema de la Probabilidad Total*, se verifica:

$$P(N_2) = \frac{4}{7}\frac{5}{9} + \frac{3}{7}\frac{6}{9} = \boxed{\frac{38}{63} = 0.6032}$$

b) La bola extraída de la primera bolsa sea negra, si sabemos que la bola extraída de la segunda ha sido blanca. *(2 puntos)*

Utilizamos la fórmula de la *Probabilidad Condicionada*, y tenemos en cuenta que B_2 y N_2 son sucesos contrarios entre sí:

$$P(N_1/B_2) = \frac{P(N_1 \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{\frac{3}{7}\frac{3}{9}}{1-P(N_2)} = \frac{\frac{1}{7}}{1-\frac{38}{63}} = \boxed{\frac{9}{25} = 0.36}$$

3) Sea X una variable aleatoria Normal de media 50 y desviación típica 4. Se toman muestras de tamaño 16.

a) ¿Cuál es la distribución de la media muestral? *(1 punto)*

Si $X \sim N(\mu;\ \sigma)$ o bien, por el *Teorema Central del Límite*, las muestras son de tamaño $n \geq 30$ $\Rightarrow$ la variable aleatoria que nos da las medias muestrales sigue la siguiente distribución: $\bar{x} \sim N\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

Por tanto, al tener en este caso una población Normal de la que se extraen las muestras, y siendo $\mu = 50$ y $\sigma = 4$, se verifica:

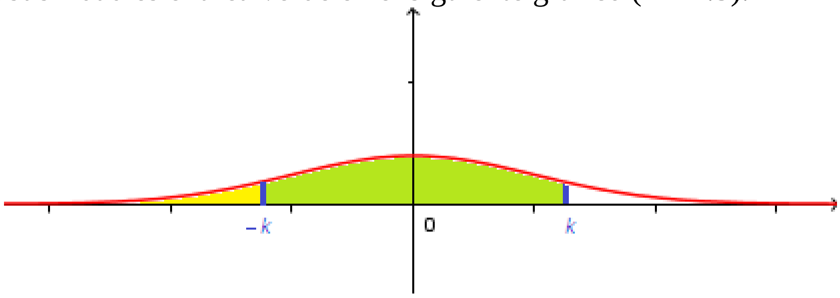
$$\bar{x} \sim N\left(50; \frac{4}{\sqrt{16}}\right) = \boxed{N(50;\ 1)}$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 47.5 y 52.5? *(2 puntos)*

Tipificando:

$$P(47.5 \leq \bar{x} \leq 52.5) = P\left(\frac{47.5-50}{1} \leq \frac{\bar{x}-50}{1} \leq \frac{52.5-50}{1}\right) = P(-2.5 \leq Z \leq 2.5) =$$

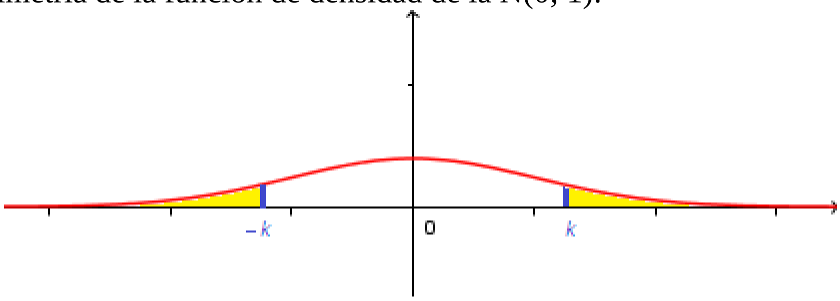
Esta probabilidad es el área verde en el siguiente gráfico ($k = 2.5$).



Como $P(Z \leq 2.5)$ es el área amarilla más la verde (desde $-\infty$ hasta 2.5), y $P(Z \leq -2.5)$ el área amarilla, el área buscada será igual a:

$$= P(Z \leq 2.5) - P(Z \leq -2.5) =$$

Por la simetría de la función de densidad de la N(0; 1):



Lo anterior será igual a:

$$= P(Z \leq 2.5) - P(Z \geq 2.5) =$$

Y por el suceso contrario:
$= P(Z \leq 2.5) - [1 - P(Z \leq 2.5)] = P(Z \leq 2.5) - 1 + P(Z \leq 2.5) = 2P(Z \leq 2.5) - 1 =$

Buscando en las tablas de la N(0; 1):
$$= 2 \cdot 0.9938 - 1 = \boxed{0.9876}$$

Nótese que no nos preocupamos de poner las desigualdades estrictas o no, porque en una distribución continua la probabilidad de que la variable aleatoria tome un único valor es 0. Sólo son mayores que 0 las probabilidades de que la variable aleatoria tome valores en un intervalo.

4) Una población se ha dividido en 4 estratos de tamaño 15%, 40%, 25% y 20% del total. Utilizando muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional, se han seleccionado 10 individuos del tercer estrato. ¿Cuál es el tamaño de la muestra, y cuál es la composición de la misma, según los estratos? *(1 punto)*

El 25% son 10 individuos $\Rightarrow$ El 100% son 40 individuos (una regla de 3). Luego $\boxed{n = 40}$ (tamaño de la muestra).

- Del estrato primero, figurarán el 15% de la muestra:
  15% de 40 = $0.15 \cdot 40 = \boxed{6 \text{ individuos}}$
- Del segundo: 40% de 40 = $0.4 \cdot 40 = \boxed{16 \text{ individuos}}$
- Del tercero $\boxed{\text{son } 10}$, según el enunciado (25% de 40 = $0.25 \cdot 40$).
- Del cuarto: 20% de 40 = $0.2 \cdot 40 = \boxed{8 \text{ individuos}}$.

Nótese que 6 + 16 + 10 + 8 = 40.

NOMBRE: ____

Instrucciones: 1) Todos los folios deben tener el nombre y estar numerados en la parte superior. 2) Todas las respuestas deben estar justificadas y simplificadas. 3) No se puede usar corrector ni lápiz. Se aconseja no usar borrador. 4) Se puede alterar el orden de las respuestas, pero no se puede intercalar la respuesta a una pregunta con las de otras.

1) En un experimento aleatorio, la probabilidad de que ocurra un suceso A es 0.68, la de que ocurra otro suceso B es 0.2, y la de que no ocurra ninguno de los dos es 0.27. Halle la probabilidad de que:
   a) Ocurran los dos a la vez. *(1 punto)*
   b) Ocurra B pero no A. *(0,5 puntos)*
   c) Ocurra B, sabiendo que no ha ocurrido A. *(0,5 puntos)*
   d) ¿Son independientes? ¿Son incompatibles? *(0,5 puntos)*

2) El 41% de quienes se presentan a un examen son varones. Aprueban dicho examen el 70% de los varones presentados y el 60% de las mujeres presentadas.
   a) Calcule la probabilidad de que, si una persona escogida al azar ha aprobado, sea mujer. *(1 punto)*
   b) Calcule la probabilidad de que, si una persona escogida al azar ha suspendido, sea mujer. *(1 punto)*
   c) Ana dice que, si alguien ha aprobado, es más probable que sea mujer que varón; Benito dice que, si alguien ha suspendido, es más probable que sea mujer que varón. ¿Quién tiene razón? *(0,5 puntos)*

3) a) De una población sabemos que 4/9 son hombres y el resto, mujeres. Se quiere seleccionar una muestra de 135 personas mediante muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional. ¿Cuál sería la composición de la muestra? *(0,5 puntos)*
   b) Una población tiene 5 elementos. Mediante muestreo aleatorio simple, se seleccionan muestras de tamaño 3, siendo la desviación típica de sus medias 2 y la media de las medias muestrales, 7. ¿Cuánto valen la media y la varianza de la población? *(1 punto)*
   c) El peso, en kg, de los alumnos de primaria de un colegio sigue una distribución Normal de media 28 kg y desviación típica 2.7 kg. Si elegimos, entre ellos y al azar, una muestra de tamaño 9, ¿cuál es la probabilidad de que su media esté comprendida entre 26 y 29 kg? *(1 punto)*

4) Queremos estudiar la proporción de personas de una población que acceden a internet a través de teléfono móvil. Para ello hacemos una encuesta a una muestra aleatoria de 400 personas de esa población, y obtenemos que 240 de ellas acceden a internet a través del móvil.
   a) Determine un intervalo de confianza, al 98.5%, para la proporción de personas de esa población que acceden a internet a través del teléfono móvil. *(1,5 puntos)*
   b) Razone el efecto que tendría sobre la amplitud del intervalo de confianza el aumento o disminución del tamaño de la muestra, suponiendo que se mantuvieran la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza. *(1 punto)*

SOLUCIONES

1) En un experimento aleatorio, la probabilidad de que ocurra un suceso A es 0.68, la de que ocurra otro suceso B es 0.2, y la de que no ocurra ninguno de los dos es 0.27. Halle la probabilidad de que:

a) Ocurran los dos a la vez. *(1 punto)*

Sabemos: $P(A) = 0.68$, $P(B) = 0.2$ y $P(A^c \cap B^c) = 0.27$. Nos piden $P(A \cap B)$. Ésta, junto con las probabilidades de A y de B, aparece en la fórmula de la probabilidad de la unión.

El tercer dato que nos dan, parece relacionado con una de las Leyes de Morgan. Intentamos empezar por ahí:

$$P(A^c \cap B^c) = P[(A \cup B)^c] = 0.27 \ \Rightarrow \ P(A \cup B) = 1 - 0.27 = 0.73$$

Como tenemos ya la probabilidad de la unión:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \boxed{P(A \cap B) =} \ P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.68 + 0.2 - 0.73 = \boxed{0.15}$$

b) Ocurra B pero no A. *(0,5 puntos)*

$$\boxed{P(B - A) =} \ P(B \cap A^c) = P(B) - P(A \cap B) = 0.2 - 0.15 = \boxed{0.05}$$

c) Ocurra B, sabiendo que no ha ocurrido A. *(0,5 puntos)*

$$P(B/A^c) = \frac{P(B \cap A^c)}{P(A^c)} = \frac{0.05}{1 - 0.68} = \boxed{\frac{5}{32} = 0.15625}$$

d) ¿Son independientes? ¿Son incompatibles? *(0,5 puntos)*

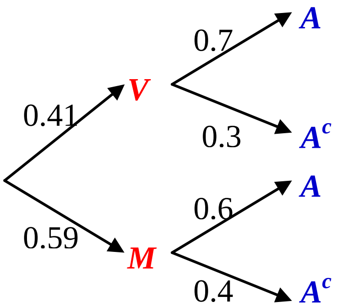
Como $P(B) \neq P(B/A^c)$, según el enunciado y el apartado anterior, B no es independiente de A^c, por lo que tampoco lo es de $A \Rightarrow$ $\boxed{\text{no son independientes}}$.

Como $P(A \cap B) \neq 0$, según el apartado a, $\boxed{\text{no son incompatibles}}$.

2) El 41% de quienes se presentan a un examen son varones. Aprueban dicho examen el 70% de los varones presentados y el 60% de las mujeres presentadas.

a) Calcule la probabilidad de que, si una persona escogida al azar ha aprobado, sea mujer. *(1 punto)*

Estructuramos los datos en un diagrama de árbol.



Nos piden $P(M / A)$. Para calcularla, necesitamos conocer, previamente, $P(A)$. Lo hacemos por el *Teorema de la Probabilidad Total*:

$$P(A) = 0.41 \cdot 0.7 + 0.59 \cdot 0.6 = 0.641$$

Por el *Axioma de la Probabilidad Condicionada*:

$$\boxed{P(M / A) =} \ \frac{P(M \cap A)}{P(A)} = \frac{0.59 \cdot 0.6}{0.641} = \boxed{0.5523}$$

b) Calcule la probabilidad de que, si una persona escogida al azar ha suspendido, sea mujer. *(1 punto)*

$$\boxed{P(M / A^c) =} \ \frac{P(M \cap A^c)}{P(A^c)} = \frac{P(M \cap A^c)}{1 - P(A)} = \frac{0.59 \cdot 0.4}{1 - 0.641} = \boxed{0.65738}$$

c) Ana dice que, si alguien ha aprobado, es más probable que sea mujer que varón; Benito dice que, si alguien ha suspendido, es más probable que sea mujer que varón. ¿Quién tiene razón? *(0,5 puntos)*

Conocemos $P(M / A) = 0.5523$. Su suceso contrario es: $P(V / A) = 1 - P(M / A) = 1 - 0.5523 = 0.4477$. Por tanto, si alguien ha aprobado, es más probable que sea varón, de modo que $\boxed{\text{Ana tiene razón}}$.

Por otra parte, $P(M / A^c) = 0.65738 \Rightarrow P(V / A^c) = 1 - P(M / A^c) = 1 - 0.65738 = 0.34262$. Luego si alguien ha suspendido, es más probable que sea mujer. Por lo que $\boxed{\text{Benito también tiene razón}}$.

3) a) De una población sabemos que 4/9 son hombres y el resto, mujeres. Se quiere seleccionar una muestra de 135 personas mediante muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional. ¿Cuál sería la composición de la muestra? *(0,5 puntos)*

	Población	Muestra
Hombres	4/9	n_H
Mujeres	5/9	n_M
TOTAL:	1	135

Simplemente, $\boxed{n_H =} \frac{4}{9}135 = \boxed{60}$ y $\boxed{n_M =} \frac{5}{9}135 = \boxed{75}$, siendo $60 + 75 = 135$

b) Una población tiene 5 elementos. Mediante muestreo aleatorio simple, se seleccionan muestras de tamaño 3, siendo la desviación típica de sus medias 2 y la media de las medias muestrales, 7. ¿Cuánto valen la media y la varianza de la población? *(1 punto)*

Siendo μ la media poblacional y σ la desviación típica poblacional, las medias muestrales tienen como media μ y como desviación típica $\sigma / \sqrt{n}$.

Como la media de las medias muestrales es $7 \Rightarrow \boxed{\mu = 7}$.

Y como $\sigma / \sqrt{n} = 2 \Rightarrow \sigma = 2\sqrt{n} = 2\sqrt{3} \Rightarrow$ la varianza es: $\boxed{\sigma^2 = 4 \cdot 3 = 12}$.

c) El peso, en kg, de los alumnos de primaria de un colegio sigue una distribución Normal de media 28 kg y desviación típica 2.7 kg. Si elegimos, entre ellos y al azar, una muestra de tamaño 9, ¿cuál es la probabilidad de que su media esté comprendida entre 26 y 29 kg? *(1 punto)*

Si $X \in N(28; 2.7) \Rightarrow \bar{x} \in N\left(28; \frac{2.7}{\sqrt{9}}\right) = N(28; 0.9)$. Luego, tipificando:

$$P(26 \le \bar{x} \le 29) = P\left(\frac{26-28}{0.9} \le Z \le \frac{29-28}{0.9}\right) = P(-2.22 \le Z \le 1.11) =$$

$$= P(Z \le 1.11) - P(Z \le -2.22) = P(Z \le 1.11) - P(Z > 2.22) =$$

$$= P(Z \le 1.11) - [1 - P(Z \le 2.22)] = P(Z \le 1.11) - 1 + P(Z \le 2.22) =$$

$$= 0.8665 - 1 + 0.9868 = \boxed{0.8533}$$

4) Queremos estudiar la proporción de personas de una población que acceden a internet a través de teléfono móvil. Para ello hacemos una encuesta a una muestra aleatoria de 400 personas de esa población, y obtenemos que 240 de ellas acceden a internet a través del móvil.

a) Determine un intervalo de confianza, al 98.5%, para la proporción de personas de esa población que acceden a internet a través del teléfono móvil. *(1,5 puntos)*

Como $n \ge 30$, puede construirse el intervalo de confianza.

$1 - \alpha = 0.985 \Rightarrow \alpha = 0.015 \Rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.9925$. Entonces $P(Z \le z_{\alpha/2}) = 0.9925 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2.43$.

$n = 400$

$$\hat{p} = \frac{240}{400} = 0.6 \Rightarrow \hat{q} = 0.4$$

Luego el intervalo de confianza al 98.5% para la proporción poblacional p es:

$$\left(0.6 - 2.43\sqrt{\frac{0.6 \cdot 0.4}{400}}, 0.6 + 2.43\sqrt{\frac{0.6 \cdot 0.4}{400}}\right) = \boxed{(0.54,\ 0.66)}$$

b) Razone el efecto que tendría sobre la amplitud del intervalo de confianza el aumento o disminución del tamaño de la muestra, suponiendo que se mantuvieran la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza. *(1 punto)*

Amplitud $= 2E = 2z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$. Si únicamente varía n, como está en el denominador, si aumenta, el resultado (la amplitud) será menor, porque se divide entre un número mayor, y al contrario, si disminuye.

IES Fernando de Herrera **Curso 2014 / 15**

Tercer trimestre – Examen Global – 2º Bach CCSS A

NOMBRE: ____

Instrucciones: 1) Todos los folios deben tener el nombre y estar numerados en la parte superior. 2) Todas las respuestas deben estar justificadas y simplificadas. 3) No se puede usar corrector ni lápiz. Se aconseja no usar borrador. 4) Se puede alterar el orden de las respuestas, pero no se puede intercalar la respuesta a una pregunta con las de otras.

ALUMNOS CON LA 1ª Y 2ª EVALUACIÓN APROBADA

1) De un estudio sobre accidentes de tráfico se dedujeron los siguientes datos: En el 23% de los casos no se llevaba puesto el cinturón de seguridad; en el 65% no se respetaron los límites de velocidad permitidos y en el 30% de los casos se cumplían ambas normas, es decir, llevaban puesto el cinturón y respetaban los límites de velocidad.
   a) Calcule la probabilidad de que, en un accidente de tráfico, no se haya cumplido alguna de las dos normas. *(0.8 puntos)*
   b) Razone si son independientes los sucesos "*llevar puesto el cinturón*" y "*respetar los límites de velocidad*". *(0.8 puntos)*
   c) Calcule la probabilidad de llevar puesto el cinturón pero no respetar los límites de velocidad. *(0.9 puntos)*
2) El 50% de los préstamos que concede un banco son para vivienda, el 30%, para industria y el 20%, para consumo. No se pagan el 20% de los préstamos para vivienda, el 15% de los préstamos para industria y el 70% de los préstamos para consumo.
   a) Si se elige al azar un préstamo, calcule la probabilidad de que se pague. *(1 punto)*
   b) Se elige un préstamo al azar que resulta impagado. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un préstamo para consumo? *(0.8 puntos)*
   c) Ante un préstamo impagado, el director del banco afirma que es más probable que sea para vivienda que para consumo. ¿Lleva razón el director? *(0.7 puntos)*
3) La longitud de la ballena azul se distribuye según una ley Normal con desviación típica 7.5 m. en un estudio estadístico realizado a 25 ejemplares se ha obtenido el intervalo de confianza (21.06, 26.04) para la longitud media.
   a) Calcule la longitud media de los 25 ejemplares de la muestra. *(0.5 puntos)*
   b) Calcule el nivel de confianza con el que se ha construido dicho intervalo. *(1.5 ptos)*
   c) ¿Qué tamaño muestral sería necesario para garantizar una amplitud máxima de 4 m con un nivel de confianza del 97%? *(0.5 puntos)*
4) Un informe de un Ayuntamiento afirma que al menos el 26% de los usuarios del carril bici habrían utilizado el coche particular para sus desplazamientos de no haber existido dicho carril. Sin embargo, un periódico local anuncia la falsedad del dato, informando que una encuesta propia indica que sólo 240 de los 1000 usuarios encuestados afirman que habrían utilizado el coche particular.
   a) Establezca un contraste, con hipótesis nula H_0: $p \geq 0.26$, para verificar la afirmación del Ayuntamiento e indique la región crítica de dicho contraste para un nivel de significación del 5%. *(1.5 puntos)*
   b) Con este nivel de significación, ¿podría aceptarse el informe del Ayuntamiento? *(1 punto)*

SOLUCIONES

1) De un estudio sobre accidentes de tráfico se dedujeron los siguientes datos: En el 23% de los casos no se llevaba puesto el cinturón de seguridad; en el 65% no se respetaron los límites de velocidad permitidos y en el 30% de los casos se cumplían ambas normas, es decir, llevaban puesto el cinturón y respetaban los límites de velocidad.

   a) Calcule la probabilidad de que, en un accidente de tráfico, no se haya cumplido alguna de las dos normas. *(0.8 puntos)*

   Llamemos C = "*llevar el cinturón*" y V = "*respetar la velocidad*". Sabemos:

   $$P(C^C) = 0.23 \quad P(V^C) = 0.65 \quad P(C \cap V) = 0.3$$

   Nos piden:

   $$\boxed{P(C^C \cup V^C) =} P[(C \cap V)^C] = 1 - P(C \cap V) = 1 - 0.3 = \boxed{0.7}$$

   donde en el primer paso se ha aplicado una de las Leyes de Morgan y, en el segundo, la probabilidad del suceso contrario.

   b) Razone si son independientes los sucesos "*llevar puesto el cinturón*" y "*respetar los límites de velocidad*". *(0.8 puntos)*

   $$P(C/V) = \frac{P(C \cap V)}{P(V)} = \frac{0.3}{1 - 0.65} = \frac{6}{7} \approx 0.8571$$

   $$P(C) = 1 - P(C^C) = 1 - 0.23 = 0.77$$

   Como no coinciden, $\boxed{\text{no son independientes}}$.

   c) Calcule la probabilidad de llevar puesto el cinturón pero no respetar los límites de velocidad. *(0.9 puntos)*

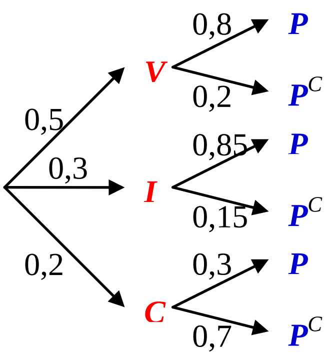
   $$\boxed{P(C - V) = P(C \cap V^C) =} P(C) - P(C \cap V) = 0.77 - 0.3 = \boxed{0.47}$$

2) El 50% de los préstamos que concede un banco son para vivienda, el 30%, para industria y el 20%, para consumo. No se pagan el 20% de los préstamos para vivienda, el 15% de los préstamos para industria y el 70% de los préstamos para consumo.

   a) Si se elige al azar un préstamo, calcule la probabilidad de que se pague. *(1 punto)*

   Representamos en un diagrama de árbol los datos. Por el *Teorema de la Probabilidad Total*:

   $$\boxed{P(P) =} 0.5 \cdot 0.8 + 0.3 \cdot 0.85 + 0.2 \cdot 0.3 = \boxed{0.715}$$



   b) Se elige un préstamo al azar que resulta impagado. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un préstamo para consumo? *(0.8 puntos)*

   Por el *axioma de la probabilidad condicionada*:

   $$\boxed{P(C/P^C) =} \frac{P(C \cap P^C)}{P(P^C)} = \frac{0.2 \cdot 0.7}{1 - 0.715} = \boxed{\frac{28}{57} = 0.4912}$$

   c) Ante un préstamo impagado, el director del banco afirma que es más probable que sea para vivienda que para consumo. ¿Lleva razón el director? *(0.7 puntos)*

   Aplicando, igualmente, el *axioma de la probabilidad condicionada*:

   $$P(V/P^C) = \frac{P(V \cap P^C)}{P(P^C)} = \frac{0.5 \cdot 0.2}{1 - 0.715} = \frac{20}{57} = 0.3509$$

   Por tanto, ante un préstamo impagado, es mayor la probabilidad de que sea para consumo que para vivienda. De modo que $\boxed{\text{no tiene razón el director}}$.

3) La longitud de la ballena azul se distribuye según una ley Normal con desviación típica 7.5 m. en un estudio estadístico realizado a 25 ejemplares se ha obtenido el intervalo de confianza (21.06, 26.04) para la longitud media.

   a) Calcule la longitud media de los 25 ejemplares de la muestra. *(0.5 puntos)*

   El intervalo de confianza se puede construir porque los datos proceden de una población con distribución Normal. El centro del intervalo de confianza para la media poblacional, que es lo que nos dan, es la media de la muestra. Por tanto:

$$\boxed{\bar{x} =} \frac{21.06+26.04}{2} = \boxed{23.55}$$

   b) Calcule el nivel de confianza con el que se ha construido dicho intervalo.*(1.5 ptos)*

   El *error* es la mitad de la amplitud del intervalo:

$$E = \frac{26.04-21.06}{2} = 2.49$$

   Como $E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{E\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{2.49\sqrt{25}}{7.5} = 1.66.$

   Recurriendo a las tablas de la N(0;1) $\Rightarrow P(Z \le 1.66) = 0.9515 = 1-\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2}$ $= 1 - 0.9515 \Rightarrow \alpha = 2(1 - 0.9515) = 0.097 \Rightarrow 1 - \alpha = 1 - 0.097 = 0.903$, Por tanto, $\boxed{\text{el nivel de confianza es del 90.3\%}}$.

   c) ¿Qué tamaño muestral sería necesario para garantizar una amplitud máxima de 4 m con un nivel de confianza del 97%? *(0.5 puntos)*

   El error es la mitad de la amplitud. Por tanto, $E \le 2 \Rightarrow z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le 2 \Rightarrow$

$$\sqrt{n} \ge \frac{z_{\alpha/2}\sigma}{2} \Rightarrow n \ge \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{2}\right)^2.$$

   Si $1 - \alpha = 0.97 \Rightarrow \alpha = 0.03 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 1 - 0.015 = 0.985 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17$

   Por tanto: $n \ge \left(\frac{2.17\cdot 7.5}{2}\right)^2 = 66.22 \Rightarrow \boxed{n = 67}$.

4) Un informe de un Ayuntamiento afirma que al menos el 26% de los usuarios del carril bici habrían utilizado el coche particular para sus desplazamientos de no haber existido dicho carril. Sin embargo, un periódico local anuncia la falsedad del dato, informando que una encuesta propia indica que sólo 240 de los 1000 usuarios encuestados afirman que habrían utilizado el coche particular.

   a) Establezca un contraste, con hipótesis nula H_0: $p \ge 0.26$, para verificar la afirmación del Ayuntamiento e indique la región crítica de dicho contraste para un nivel de significación del 5%. *(1.5 puntos)*

   Las hipótesis nula y alternativa son las siguientes (recordar que en la *nula* siempre tiene que haber un *igual*, estricto o con un *menor* o *mayor*:

$$\begin{cases} H_0 : p \ge 0.26 \\ H_1 : p < 0.26 \end{cases}$$

Sabemos que $n = 1000$, con lo que se puede realizar el contraste, ya que $n \geq 30$. Como el contraste es unilateral, y siendo H_0: $p \geq 0.26$, la región de aceptación será $(-z_\alpha, +\infty)$. Ya que $\alpha = 0.05 \Rightarrow P(Z \leq z_\alpha) = 1 - \alpha = 0.95$ nos lleva a que $z_\alpha = 1.645$. Por todo ello, la *región de aceptación* a este nivel de significación será $RA_{0.05} = (-1.645, +\infty)$. Pero nos piden la crítica. De modo que:

$$\boxed{RC_{0.05} = (-\infty, -1.645)}.$$

b) Con este nivel de significación, ¿podría aceptarse el informe del Ayuntamiento? *(1 punto)*

Calculamos el valor del estadístico del contraste:

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} = \frac{\frac{240}{1000} - 0.26}{\sqrt{\frac{0.26 \cdot 0.74}{1000}}} = -1.44 \in RA_{0.05}$$

Por tanto, aceptamos la hipótesis nula, es decir, el informe del Ayuntamiento, con un nivel de significación del 0.05.

NOMBRE: ____

Instrucciones: 1) Todos los folios deben tener el nombre y estar numerados en la parte superior. 2) Todas las respuestas deben estar justificadas y simplificadas. 3) No se puede usar corrector ni lápiz. Se aconseja no usar borrador. 4) Se puede alterar el orden de las respuestas, pero no se puede intercalar la respuesta a una pregunta con las de otras. 5) Hay que obtener, al menos, 0.6 puntos en el ejercicio 1 para aprobar el examen.

ALUMNOS CON LA 1ª Y 2ª EVALUACIÓN SUSPENDIDA

1) Calcule las derivadas de las siguientes funciones:
   a) $f(x) = \dfrac{1-3x}{x} + (5x-2)^3$ *(0.3 puntos)*
   b) $g(x) = (x^2 + 2)\cdot\ln(x^2 + 2)$ *(0.3 puntos)*
   c) $h(x) = 3^{5x} + e^x$ *(0.4 puntos)*
2) Un nutricionista receta a una de sus pacientes una dieta semanal especial basada en lácteos y pescado. Cada kg de lácteos cuesta 6€ y proporciona 3 unidades de proteínas y 1 de calorías; cada kg de pescado cuesta 12€, aportando 1 unidad de proteínas y 2 de calorías. La dieta le exige no tomar más de 4 kg, conjuntamente, de lácteos y pescado, y un aporte mínimo de 4 unidades de proteínas y 3 de calorías.
   a) Plantee el problema para obtener la combinación de ambos alimentos que tenga el coste mínimo. *(0.5 puntos)*
   b) Dibuje la región factible y determine la solución óptima del problema. *(1.5 puntos)*
3) Sea la función $f(x) = \begin{cases} -bx^2 - bx + a & \text{si} \quad x \le 2 \\ \dfrac{60}{x} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$.
   a) Obtenga los valores de a y b para que la función sea continua y derivable. *(1 pto)*
   b) Para $a = 48$ y $b = 3$, estudie al monotonía de $f(x)$ y calcule sus extremos relativos y absolutos. *(1 punto)*
4) El 50% de los préstamos que concede un banco son para vivienda, el 30%, para industria y el 20%, para consumo. No se pagan el 20% de los préstamos para vivienda, el 15% de los préstamos para industria y el 70% de los préstamos para consumo.
   a) Si se elige al azar un préstamo, calcule la probabilidad de que se pague. *(1 punto)*
   b) Se elige un préstamo al azar que resulta impagado. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un préstamo para consumo? *(0.8 puntos)*
   c) Ante un préstamo impagado, el director del banco afirma que es más probable que sea para vivienda que para consumo. ¿Lleva razón el director? *(0.7 puntos)*
5) La longitud de la ballena azul se distribuye según una ley Normal con desviación típica 7.5 m. en un estudio estadístico realizado a 25 ejemplares se ha obtenido el intervalo de confianza (21.06, 26.04) para la longitud media.
   a) Calcule la longitud media de los 25 ejemplares de la muestra. *(0.5 puntos)*
   b) Calcule el nivel de confianza con el que se ha construido dicho intervalo. *(1.5 ptos)*
   c) ¿Qué tamaño muestral sería necesario para garantizar una amplitud máxima de 4 m con un nivel de confianza del 97%? *(0.5 puntos)*

SOLUCIONES

1) Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{1-3x}{x} + (5x-2)^3$ *(0.3 puntos)*

$$f'(x) = \frac{-3x-(1-3x)}{x^2} + 3(5x-2)^2 5 = \frac{-3x-1+3x}{x^2} + 15(5x-2)^2 =$$
$$= \boxed{-\frac{1}{x^2} + 15(5x-2)^2}$$

b) $g(x) = (x^2 + 2)\cdot\ln(x^2 + 2)$ *(0.3 puntos)*

$$g'(x) = 2x\ln(x^2+2) + (x^2+2)\frac{2x}{x^2+2} = \boxed{2x\ln(x^2+2) + 2x = 2x[1+\ln(x^2+2)]}$$

c) $h(x) = 3^{5x} + e^x$ *(0.4 puntos)*

$$h'(x) = \boxed{5\cdot 3^{5x}\ln(3) + e^x}$$

2) Un nutricionista receta a una de sus pacientes una dieta semanal especial basada en lácteos y pescado. Cada kg de lácteos cuesta 6€ y proporciona 3 unidades de proteínas y 1 de calorías; cada kg de pescado cuesta 12€, aportando 1 unidad de proteínas y 2 de calorías. La dieta le exige no tomar más de 4 kg, conjuntamente, de lácteos y pescado, y un aporte mínimo de 4 unidades de proteínas y 3 de calorías.

a) Plantee el problema para obtener la combinación de ambos alimentos que tenga el coste mínimo. *(0.5 puntos)*

Alimento	Nº de kg a comprar	Proteínas	Calorías
Lácteos	x	$3x$	x
Pescado	y	y	$2y$
Restricciones:	$x \ge 0;\ y \ge 0$ $x + y \le 4$	$3x + y \ge 4$	$x + 2y \ge 3$

Luego el problema consiste en:

Minimizar el coste: $f(x, y) = 6x + 12y$
Sometido a que: $x \ge 0;\ y \ge 0;\ x + y \le 4;\ 3x + y \ge 4;\ x + 2y \ge 3$

b) Dibuje la región factible y determine la solución óptima del problema. *(1.5 puntos)*

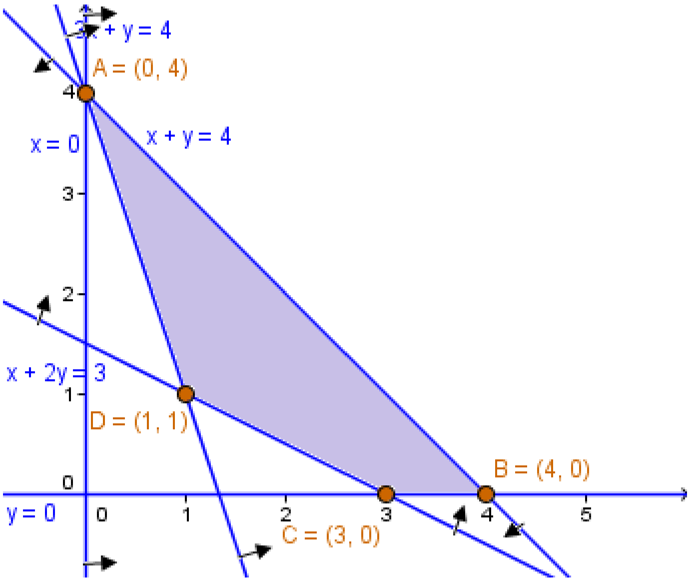
Cambiando en cada una de las inecuaciones de las restricciones el signo de desigualdad por un igual, se obtiene la ecuación de una recta, que pasamos a dibujar mediante una tabla de valores. Despejando y en la inecuación correspondiente, tendremos que $y \le$ (ecuación de la recta) o que $y \ge$ (ec. de la recta), con lo que los puntos que resuelven la inecuación serán los que quedan debajo o encima (respectivamente) de la recta. Dibujaremos la recta y señalaremos con flechitas el semiplano que nos interesa. La excepción es $x \ge 0$, que es la zona que queda a la derecha del eje OY, ya que $x = 0$ es la ecuación de la recta vertical que, precisamente, coincide con OY. Así:

- $x \ge 0$: A la derecha del eje OY.
- $y \ge 0$: Por encima del eje OX.
- $x + y = 4$: $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 4 \\ \hline y & 4 & 0 \end{array}$ $x + y \le 4 \Rightarrow y \le 4 - x$ Semiplano inferior
- $3x + y = 4$: $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 4/3 \\ \hline y & 4 & 0 \end{array}$ $3x + y \ge 4 \Rightarrow y \ge 4 - 3x$ Semiplano superior

- $x + 2y = 3$:

x	0	3
y	3/2	0

$x + 2y \geq 3 \Rightarrow y \geq (3 - x)/2$: Semipl. superior



El recinto resultante figura en el gráfico adjunto, donde ya hemos detallado las coordenadas de los vértices. Nunca se pueden realizar cálculos a partir de un gráfico, que sólo nos sirve para deducir qué cálculos hemos de realizar.
De las tablas de valores, sabemos que $\boxed{A(0, 4), B(4, 0) \text{ y } C(3, 0)}$. El vértice restante es:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + y = 4 \\ x + 2y = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 3x + y = 4 \\ -3x - 6y = -9 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$-5y = -5 \Rightarrow y = 1$$

$$x + 2 = 3 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \boxed{D(1, 1)}$$

Por último, evaluamos la función objetivo en cada vértice:
- $f(A) = f(0, 4) = 6\cdot 0 + 12\cdot 4 = 48$
- $f(B) = f(4, 0) = 6\cdot 4 + 12\cdot 0 = 24$
- $f(C) = f(3, 0) = 6\cdot 3 + 12\cdot 0 = 18$
- $f(D) = f(1, 1) = 6\cdot 1 + 12\cdot 1 = 18$

Por tanto:

El coste mínimo es de 18€, y se obtiene en el punto $C(3, 0)$, en $D(1, 1)$ y en todos los puntos del segmento que los une, que es la recta $x + 2y = 3$, con $1 \leq x \leq 3$. Así, hay infinitas posibilidades, por ejemplo, 3 kg de lácteos sin pescado, o 1 kg de lácteos y 1 kg de pescado.

3) Sea la función $f(x) = \begin{cases} -bx^2 - bx + a & \text{si } x \leq 2 \\ \dfrac{60}{x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

a) Obtenga los valores de a y b para que la función sea continua y derivable. *(1 pto)*

Continuidad

- $(-\infty, 2)$: f es continua, pues su expresión es polinómica.
- $(2, +\infty)$: f está definida por la función $y = 60/x$, quien presenta una discontinuidad en $x = 0$. Pero como este punto no está en $(2, +\infty)$, no es una discontinuidad de f. Luego f es continua en este intervalo.
- $x = 2$: $f(2) = -4b - 2b + a = a - 6b$;

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(-bx^2 - bx + a) = a - 6b; \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{60}{x} = \frac{60}{2} = 30.$$

Para ser continua en $x = 2$, estos tres resultados deben coincidir, por lo que exigimos que $\boxed{a - 6b = 30}$.

Derivabilidad

Con la condición anterior, será continua en todo R, por lo que podría ser derivable. Aplicando directamente las fórmulas de derivación en intervalos abiertos:

$$f'(x) = \begin{cases} -2bx - b & \text{si} \quad x < 2 \\ -\dfrac{60}{x^2} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Las expresiones resultantes dan resultados siempre, porque aunque $-60/x^2$ no existe si $x = 0$, dicho valor está fuera de la zona de validez de dicha fórmula. Y para que exista la derivada en $x = 2$, único punto que falta, tienen que coincidir las derivadas laterales, que valdrán:

$$f'(2^-) = -4b - b = -5b; \quad f'(2^+) = -60/4 = -15 \Rightarrow -5b = -15 \Rightarrow b = 3$$

Sustituyendo en la condición que obtuvimos para que fuese continua:

$$a - 6\cdot 3 = 30 \Rightarrow a = 48$$

Así, $\boxed{\text{si } a = 48 \text{ y } b = 3, f \text{ es continua y derivable en todo R}}$.

b) Para $a = 48$ y $b = 3$, estudie al monotonía de $f(x)$ y calcule sus extremos relativos y absolutos. *(1 punto)*

Sustituyendo dichos valores, y teniendo en cuenta que $f'(2)$ existe, tenemos que:

$$f(x) = \begin{cases} -3x^2 - 3x + 48 & \text{si} \quad x \le 2 \\ \dfrac{60}{x} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}; \quad f'(x) = \begin{cases} -6x - 3 & \text{si} \quad x \le 2 \\ -\dfrac{60}{x^2} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

- Discontinuidades de f ó de f': No tiene, según el resultado del apartado anterior.
- $f'(x) = 0$:
  - Si $x \le 2$: $-6x - 3 = 0 \Rightarrow x = -½$, que es válido, porque es menor o igual que 2, zona donde es válida la fórmula usada.
  - Si $x > 2$: $-60/x^2 = 0$ no es posible, pues debería anularse el numerador (a la vez que no el denominador), lo que no ocurre para ningún valor de x.

Así, dividimos el dominio por el único punto encontrado:

	$(-\infty, -1/2)$	$-1/2$	$(-1/2, +\infty)$
f'	+	0	–
f	↗	Mx	↘

La función es monótona creciente en $(-\infty, -1/2)$, monótona decreciente en $(-1/2, +\infty)$ y tiene un máximo relativo en $(-1/2, 195/4) = (-1/2, 48.75)$.

Por otro lado, por la forma que tiene la función, según el resultado del estudio de la monotonía, la función presenta un máximo absoluto coincidente con el relativo. Veamos que sucede en el infinito (comienzo y fin del dominio):

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (-3x^2 - 3x + 48) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{60}{x} = 0$$

Como las imágenes tienden a $-\infty$ si $x \to -\infty \Rightarrow$ No tiene mínimo absoluto.

En resumen, tiene un máximo absoluto en $(-1/2, 195/4) = (-1/2, 48.75)$ y no tiene mínimo absoluto.

4) El 50% de los préstamos que concede un banco son para vivienda, el 30%, para industria y el 20%, para consumo. No se pagan el 20% de los préstamos para vivienda, el 15% de los préstamos para industria y el 70% de los préstamos para consumo.
   a) Si se elige al azar un préstamo, calcule la probabilidad de que se pague. *(1 punto)*
   b) Se elige un préstamo al azar que resulta impagado. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un préstamo para consumo? *(0.8 puntos)*
   c) Ante un préstamo impagado, el director del banco afirma que es más probable que sea para vivienda que para consumo. ¿Lleva razón el director? *(0.7 puntos)*

   Este problema está resuelto en el examen anterior (1ª y 2ª evaluaciones aprobadas).

5) La longitud de la ballena azul se distribuye según una ley Normal con desviación típica 7.5 m. en un estudio estadístico realizado a 25 ejemplares se ha obtenido el intervalo de confianza (21.06, 26.04) para la longitud media.
   a) Calcule la longitud media de los 25 ejemplares de la muestra. *(0.5 puntos)*
   b) Calcule el nivel de confianza con el que se ha construido dicho intervalo. *(1.5 ptos)*
   c) ¿Qué tamaño muestral sería necesario para garantizar una amplitud máxima de 4 m con un nivel de confianza del 97%? *(0.5 puntos)*

   Este problema está resuelto en el examen anterior (1ª y 2ª evaluaciones aprobadas).

NOMBRE: ____

Instrucciones: 1) Todos los folios deben tener el nombre y estar numerados en la parte superior. 2) Todas las respuestas deben estar justificadas y simplificadas. 3) No se puede usar corrector ni lápiz. Se aconseja no usar borrador. 4) Se puede alterar el orden de las respuestas, pero no se puede intercalar la respuesta a una pregunta con las de otras.

ALUMNOS CON LA 1ª Y 2ª EVALUACIÓN APROBADA

1) En un espacio muestral se sabe que para dos sucesos A y B se verifica:

$$P(A\cap B) = 0.1 \qquad P(A^C\cap B^C) = 0.6 \qquad P(A/B) = 0.5$$

   a) Calcule $P(B)$. *(0.6 puntos)*
   b) Calcule $P(A\cup B)$ *(0.6 puntos)*
   c) ¿Son A y B independientes? *(0.6 puntos)*
   d) Calcule la probabilidad de que suceda A pero no B *(0.7 puntos)*

2) A la Junta General de Accionistas de una empresa asisten 105 accionistas, de los cuales 45 tienen menos de 40 años y 18 más de 60 años. Sometida a votación una propuesta, es rechazada por la tercera parte de los menores de 40 años, por la tercera parte de los que están entre 40 y 60 y por 4 personas mayores de 60 años; los demás la aceptan.
   a) Calcule la probabilidad de que, elegida una persona al azar, tenga menos de 40 años y haya aceptado la propuesta. *(0.8 puntos)*
   b) La prensa afirmó que la propuesta había sido aceptada por el 80% de los asistentes. ¿Es correcta la afirmación? *(0.7 puntos)*
   c) Si una persona, escogida al azar, ha rechazado la propuesta, ¿qué probabilidad hay de que tenga más de 60 años? *(1 punto)*

3) En un hospital se ha tomado la temperatura a una muestra de 64 pacientes para estimar la temperatura media de sus enfermos. La media de la muestra ha sido 37.1º C y se sabe que la desviación típica de toda la población es 1.04º C.
   a) Obtenga un intervalo de confianza, al 90%, para la media poblacional. *(1 punto)*
   b) ¿Con qué nivel de confianza podemos afirmar que la media de la población está comprendida entre 36.8º C y 37.4ºC? *(1 punto)*
   c) ¿Qué tamaño muestral sería necesario para garantizar una amplitud de 0.4º C con un nivel de confianza del 97%? *(0.5 puntos)*

4) Se cree que al menos el 25% de los usuarios de teléfonos móviles son de contrato. De una encuesta realizada a 950 personas, elegidas al azar, 200 de ellas manifestaron que tenían teléfono móvil de contrato. A la vista de estos resultados y con un nivel de significación del 5%, se pide:
   a) Establezca un contraste, con hipótesis nula "la proporción p es mayor o igual que 0.25" e indique la región crítica de dicho contraste. *(1.5 puntos)*
   b) ¿Puede admitirse que la proporción de personas con contrato en su teléfono móvil ha disminuido? *(1 punto)*

SOLUCIONES

1) En un espacio muestral se sabe que para dos sucesos A y B se verifica:

$$P(A \cap B) = 0.1 \qquad P(A^C \cap B^C) = 0.6 \qquad P(A/B) = 0.5$$

a) Calcule $P(B)$. *(0.6 puntos)*

Lo que nos piden junto a dos de los datos que nos dan se relacionan por la fórmula de la *probabilidad condicionada*:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A/B)} = \frac{0.1}{0.5} = \frac{1}{5} = \boxed{0.2}$$

b) Calcule $P(A \cup B)$ *(0.6 puntos)*

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Nos falta conocer $P(A)$, por lo que no podemos emplear, de momento, esta fórmula. El dato del enunciado que no hemos utilizado parece estar relacionado con una Ley de Morgan. Busquemos por ese camino:

$$0.6 = P(A^C \cap B^C) = P[(A \cup B)^C] = 1 - P(A \cup B) \Rightarrow P(A \cup B) = 1 - 0.6 = \boxed{0.4}$$

c) ¿Son A y B independientes? *(0.6 puntos)*

Ahora sí podemos usar la fórmula anterior para calcular $P(A)$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0.4 = P(A) + 0.2 - 0.1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(A) = 0.4 - 0.2 + 0.1 = 0.3$$

Y como $P(A/B) = 0.5 \Rightarrow P(A/B) \neq P(A) \Rightarrow$ $\boxed{\text{No son independientes}}$.

d) Calcule la probabilidad de que suceda A pero no B *(0.7 puntos)*

$$P(A - B) = P(A \cap B^C) = P(A) - P(A \cap B) = 0.3 - 0.1 = \boxed{0.2}$$

2) A la Junta General de Accionistas de una empresa asisten 105 accionistas, de los cuales 45 tienen menos de 40 años y 18 más de 60 años. Sometida a votación una propuesta, es rechazada por la tercera parte de los menores de 40 años, por la tercera parte de los que están entre 40 y 60 y por 4 personas mayores de 60 años; los demás la aceptan.

a) Calcule la probabilidad de que, elegida una persona al azar, tenga menos de 40 años y haya aceptado la propuesta. *(0.8 puntos)*

Los datos pueden llevarse a un diagrama de árbol y resolver el problema, así. Pero también pueden distribuirse en una *tabla de contingencia*. Para ello, tenemos en cuenta que, según lo que nos dicen, entre 40 y 60 tiene que haber 105 – (45 + 18) = 42. Rechazan la propuesta la tercera parte de los menores de 40 años, es decir, 45/3 = 15 y la tercera de la edad intermedia: 42/3 = 14. Con restas, completamos las celdas que faltan:

	Edad < 40	40 ≤ Edad ≤ 60	Edad > 60	TOTAL
Aceptan	30	28	14	72
Rechazan	15	14	4	33
TOTAL	45	42	18	105

Ahora, calculamos las probabilidades pedidas por la Regla de Laplace:

$$P(\text{ Edad} < 40 \cap \text{Acepta}) = \boxed{\frac{30}{105} = \frac{2}{7} \approx 0.2857}$$

b) La prensa afirmó que la propuesta había sido aceptada por el 80% de los asistentes. ¿Es correcta la afirmación? *(0.7 puntos)*

Elegido un asistente al azar:

$$P(\text{Acepta}) = \frac{72}{105} = \frac{24}{35} \approx 0.6857$$

Luego $\boxed{\text{aceptan el 68.57\% de los asistentes, por lo que no es cierto lo publicado}}$.

c) Si una persona, escogida al azar, ha rechazado la propuesta, ¿qué probabilidad hay de que tenga más de 60 años? *(1 punto)*

$$P(\ \text{Edad} > 60 \,/\, \text{Rechaza}) = \boxed{\frac{4}{33} \approx 0.1212}$$

3) En un hospital se ha tomado la temperatura a una muestra de 64 pacientes para estimar la temperatura media de sus enfermos. La media de la muestra ha sido 37.1º C y se sabe que la desviación típica de toda la población es 1.04º C.

a) Obtenga un intervalo de confianza, al 90%, para la media poblacional. *(1 punto)*

El intervalo se puede calcular porque $n \geq 30$, dando por buena la aproximación que se deduce del *Teorema Central del Límite*.

Sabemos: $\sigma = 1.04$; $n = 64$; $\bar{x} = 37.1$

$1 - \alpha = 0.9 \Rightarrow \alpha = 0.1 \Rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.95$. Luego $P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 0.95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.645$.

De este modo, el intervalo al 90% de confianza para la media poblacional μ es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(37.1 - 1.645\frac{1.04}{\sqrt{64}}, 37.1 + 1.645\frac{1.04}{\sqrt{64}}\right) =$$

$$= \boxed{(36.88615,\ 37.31385)}$$

b) ¿Con qué nivel de confianza podemos afirmar que la media de la población está comprendida entre 36.8º C y 37.4ºC? *(1 punto)*

El *error* es la mitad de la amplitud del intervalo:

$$E = \frac{37.4 - 36.8}{2} = 0.3$$

Como $E = z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow z_{\alpha/2} = \dfrac{E\sqrt{n}}{\sigma} = \dfrac{0.3\sqrt{64}}{1.04} = 2.31$.

Recurriendo a las tablas de la N(0;1) $\Rightarrow P(Z \leq 2.31) = 0.9896 = 1 - \dfrac{\alpha}{2} \Rightarrow \dfrac{\alpha}{2}$ $= 1 - 0.9896 \Rightarrow \alpha = 2(1 - 0.9896) = 0.0208 \Rightarrow 1 - \alpha = 1 - 0.0208 = 0.9792$,

Por tanto, $\boxed{\text{el nivel de confianza es del 97.92\%}}$.

c) ¿Qué tamaño muestral sería necesario para garantizar una amplitud de 0.4º C con un nivel de confianza del 97%? *(0.5 puntos)*

El error es la mitad de la amplitud. Por tanto, $E \leq 0.2 \Rightarrow z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 0.2 \Rightarrow$

$$\sqrt{n} \geq \frac{z_{\alpha/2}\sigma}{0.2} \Rightarrow n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{0.2}\right)^2.$$

Si $1 - \alpha = 0.97 \Rightarrow \alpha = 0.03 \Rightarrow 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0.015 = 0.985 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17$

Por tanto: $n \geq \left(\dfrac{2.17 \cdot 1.04}{0.2}\right)^2 = 127.33 \Rightarrow \boxed{n = 128}$.

4) Se cree que al menos el 25% de los usuarios de teléfonos móviles son de contrato. De una encuesta realizada a 950 personas, elegidas al azar, 200 de ellas manifestaron que tenían teléfono móvil de contrato. A la vista de estos resultados y con un nivel de significación del 5%, se pide:

a) Establezca un contraste, con hipótesis nula "la proporción p es mayor o igual que 0.25" e indique la región crítica de dicho contraste. *(1.5 puntos)*

El contraste se puede hacer porque $n \geq 30$. Las hipótesis nula y alternativa son:

$$\begin{cases} H_0 : p \geq 0.25 \\ H_1 : p < 0.25 \end{cases}$$

Así que estamos ante un contraste unilateral. Como $\alpha = 0.05 \Rightarrow 1 - \alpha = 0.95$ $\Rightarrow$ De $P(Z \leq z_\alpha) = 0.95$ se llega a que $z_\alpha = 1.645$. Por consiguiente:

$$RA_{0.05} = (-1.645, +\infty) \Rightarrow \boxed{RC_{0.05} = (-\infty, -1.645)}.$$

b) ¿Puede admitirse que la proporción de personas con contrato en su teléfono móvil ha disminuido? *(1 punto)*

$$n = 950; \quad \hat{p} = \frac{200}{950} \Rightarrow Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0 q_0}{n}}} = \frac{\dfrac{200}{950} - 0.25}{\sqrt{\dfrac{0.25 \cdot 0.75}{950}}} = -2.8098$$

Como $Z \in RC_{0.05}$ $\Rightarrow$ Rechazamos la hipótesis nula y concluimos que la proporción estudiada es menor que 0.25, es decir, que ha disminuido, si partimos de la creencia inicial. Y la conclusión tiene un margen de error de tipo I del 5%.

Realmente, el enunciado es confuso, por cuanto se habla, inicialmente, de *creencia* y no de que fuera un dato constatado con anterioridad. Lo que se supone que piden es la conclusión del contraste de hipótesis.

IES Fernando de Herrera **Curso 2014 / 15**

Tercer trimestre – Examen Global – 2º Bach CCSS B

NOMBRE: ____

Instrucciones: 1) Todos los folios deben tener el nombre y estar numerados en la parte superior. 2) Todas las respuestas deben estar justificadas y simplificadas. 3) No se puede usar corrector ni lápiz. Se aconseja no usar borrador. 4) Se puede alterar el orden de las respuestas, pero no se puede intercalar la respuesta a una pregunta con las de otras. 5) Hay que obtener, al menos, 0.6 puntos en el ejercicio 1 para aprobar el examen.

ALUMNOS CON LA 1ª Y 2ª EVALUACIÓN SUSPENDIDA

1) Halle $f'(2)$, $g'(4)$ y $h'(0)$ para las funciones definidas de la siguiente forma:

$$f(x) = x^2 + \frac{16}{x^2}; \quad g(x) = (x^2+9)^3; \quad h(x) = \ln(x^2+1)$$ *(0.3+0.3+0.4 ptos)*

2) Dadas las inecuaciones:

$$y \le x + 5; \quad 2x + y \ge -4; \quad 4x \le 10 - y; \quad y \ge 0$$

a) Calcule el máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = x + \frac{1}{2}y$ sometida a las restricciones definidas por las inecuaciones anteriores, así como los puntos donde se alcanzan. *(1.5 puntos)*

b) ¿Es el punto (4, –12) solución para el mínimo de f en el recinto definido por las inecuaciones? *(0.5 puntos)*

3) Sea la función $f(x) = -2x^3 + a\cdot e^{-x} + b\cdot x - 1$.

a) Halle los valores de a y b sabiendo que la función tiene un mínimo en $x = 0$ y que la gráfica de la función pasa por el punto (0, 0). *(1 punto)*

b) Para $a = 0$ y $b = 1$, determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = -1$. *(1 punto)*

4) En un espacio muestral se sabe que para dos sucesos A y B se verifica:

$$P(A\cap B) = 0.1 \quad P(A^C\cap B^C) = 0.6 \quad P(A/B) = 0.5$$

a) Calcule $P(B)$. *(0.6 puntos)*

b) Calcule $P(A\cup B)$ *(0.6 puntos)*

c) ¿Son A y B independientes? *(0.6 puntos)*

d) Calcule la probabilidad de que suceda A pero no B *(0.7 puntos)*

5) Se cree que al menos el 25% de los usuarios de teléfonos móviles son de contrato. De una encuesta realizada a 950 personas, elegidas al azar, 200 de ellas manifestaron que tenían teléfono móvil de contrato. A la vista de estos resultados y con un nivel de significación del 5%, se pide:

a) Establezca un contraste, con hipótesis nula “la proporción p es mayor o igual que 0.25” e indique la región crítica de dicho contraste. *(1.5 puntos)*

b) ¿Puede admitirse que la proporción de personas con contrato en su teléfono móvil ha disminuido? *(1 punto)*

SOLUCIONES

1) Halle $f'(2)$, $g'(4)$ y $h'(0)$ para las funciones definidas de la siguiente forma:

$$f(x) = x^2 + \frac{16}{x^2}; \quad g(x) = (x^2+9)^3; \quad h(x) = \ln(x^2+1) \qquad \textit{(0.3+0.3+0.4 ptos)}$$

$$f'(x) = 2x - \frac{16\cdot 2x}{x^4} = \boxed{2x - \frac{32}{x^3}} \Rightarrow \boxed{f'(2) = 0}$$

$$g'(x) = 3(x^2+9)^2 2x = \boxed{6x(x^2+9)^2} \Rightarrow \boxed{g'(4) = 15000}$$

$$h'(x) = \boxed{\frac{2x}{x^2+1}} \Rightarrow \boxed{h'(0) = 0}$$

2) Dadas las inecuaciones:

$$y \le x + 5; \quad 2x + y \ge -4; \quad 4x \le 10 - y; \quad y \ge 0$$

a) Calcule el máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = x + \frac{1}{2}y$ sometida a las restricciones definidas por las inecuaciones anteriores, así como los puntos donde se alcanzan. *(1.5 puntos)*

Cambiando en cada una de las inecuaciones de las restricciones el signo de desigualdad por un igual, se obtiene la ecuación de una recta, que pasamos a dibujar mediante una tabla de valores. Despejando y en la inecuación correspondiente, tendremos que $y \le$ (ecuación de la recta) o que $y \ge$ (ec. de la recta), con lo que los puntos que resuelven la inecuación serán los que quedan debajo o encima (respectivamente) de la recta. Dibujaremos la recta y señalaremos con flechitas el semiplano que nos interesa. Así:

- $y \ge 0$: Por encima del eje OX.
- $y = x + 5$:

x	0	–5
y	5	0

$y \le x + 5 \Rightarrow$ Semiplano inferior

- $2x + y = -4$:

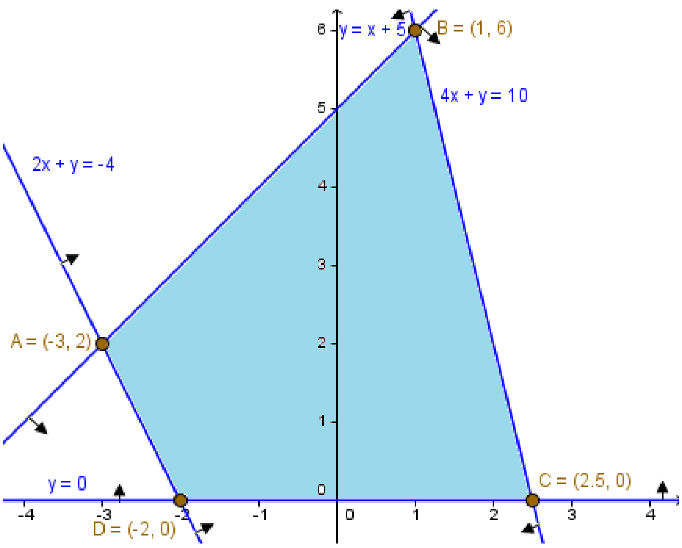
x	0	–2
y	–4	0

$2x + y \ge -4 \Rightarrow y \ge -4 - 2x$: Semipl. superior

- $4x = 10 - y$:

x	0	5/2
y	10	0

$4x \le 10 - y \Rightarrow y \ge 10 - 4x$: Semipl. superior



El recinto resultante figura en el gráfico adjunto, donde ya hemos detallado las coordenadas de los vértices. Nunca se pueden realizar cálculos a partir de un gráfico, que sólo nos sirve para deducir qué cálculos hemos de realizar.
De las tablas de valores, sabemos que $\boxed{C(2.5, 0) \text{ y } D(-2, 0)}$. Los vértices restantes son:

- $\left.\begin{array}{l} 2x + y = -4 \\ x - y = -5 \end{array}\right\} \Rightarrow$
  $3x \quad = -9 \Rightarrow x = -3$

$2(-3) + y = -4 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow \boxed{A(-3, 2)}$

- $\left.\begin{array}{r} 4x + y = 10 \\ x - y = -5 \end{array}\right\}$ $\Rightarrow 4 + y = 10 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow \boxed{B(1, 6)}$.
  $5x \quad = 5 \Rightarrow x = 1$

Por último, evaluamos la función objetivo en cada vértice:

- $f(A) = f(-3, 2) = -3 + 0.5\cdot 2 = -2$
- $f(B) = f(1, 6) = 1 + 0.5\cdot 6 = 4$
- $f(C) = f(2.5, 0) = 2.5 + 0.5\cdot 0 = 2.5$
- $f(D) = f(-2, 0) = -2 + 0.5\cdot 0 = -2$

Por tanto:

El máximo vale 4 y se alcanza en (1, 6). El mínimo es –2 y se alcanza en (–3, 2) y en (–2, 0), así como en todos los puntos del segmento que los une, que son los puntos de la recta $2x + y = -4$, con $-3 \le x \le -2$.

b) ¿Es el punto (4, –12) solución para el mínimo de f en el recinto definido por las inecuaciones? *(0.5 puntos)*

No es solución, porque aunque $f(4, -12) = 4 + 0.5(-12) = -2$, no es un punto de dicho segmento, ya que $x = 4$ no está comprendido entre –3 y –2, aunque sí está en la recta $2x + y = -4$.

3) Sea la función $f(x) = -2x^3 + a\cdot e^{-x} + b\cdot x - 1$.

a) Halle los valores de a y b sabiendo que la función tiene un mínimo en $x = 0$ y que la gráfica de la función pasa por el punto (0, 0). *(1 punto)*

$f(x)$ es una función continua en todo R, pues es elemental y su dominio es R. También es derivable, pues su derivada existe para todo x:

$$f'(x) = -6x^2 - a\cdot e^{-x} + b$$

Por tanto, para que tenga un mínimo en $x = 0$ debe ser $f'(0) = 0$ y $f''(0) > 0$. La primera de estas condiciones se traduce en que:

$$0 - a\cdot 1 + b = 0 \Rightarrow \boxed{a = b}.$$

Por otra parte, $f(0) = 0$, pues pasa por (0, 0). Es decir:

$$0 + a\cdot 1 + 0 - 1 = 0 \Rightarrow a = 1.$$

De donde, según lo anterior, $b = 1$.

Como $f''(x) = -12x + a\cdot e^{-x} = -12x + e^{-x} \Rightarrow f''(0) = 1 > 0 \Rightarrow$ En efecto, se trata de un mínimo relativo. Hemos de realizar esta comprobación porque, si se verificase lo contrario, se trataría de un máximo relativo y el problema no tendría solución.

La solución es, entonces: $\boxed{a = 1 \text{ con } b = 1}$.

b) Para $a = 0$ y $b = 1$, determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = -1$. *(1 punto)*

La función es: $f(x) = -2x^3 + x - 1 \Rightarrow f'(x) = -6x^2 + 1$.

- Punto de tangencia: $f(-1) = 0$.
- Pendiente de la tangente: $m = f'(-1) = -6 + 1 = -5$.
- Recta tangente: $y - 0 = -5(x + 1) \Rightarrow \boxed{y = -5x - 5}$.

4) En un espacio muestral se sabe que para dos sucesos A y B se verifica:

$$P(A \cap B) = 0.1 \quad P(A^C \cap B^C) = 0.6 \quad P(A/B) = 0.5$$

a) Calcule $P(B)$. *(0.6 puntos)*
b) Calcule $P(A \cup B)$ *(0.6 puntos)*
c) ¿Son A y B independientes? *(0.6 puntos)*
d) Calcule la probabilidad de que suceda A pero no B *(0.7 puntos)*

Este ejercicio está resuelto en el examen anterior.

5) Se cree que al menos el 25% de los usuarios de teléfonos móviles son de contrato. De una encuesta realizada a 950 personas, elegidas al azar, 200 de ellas manifestaron que tenían teléfono móvil de contrato. A la vista de estos resultados y con un nivel de significación del 5%, se pide:
a) Establezca un contraste, con hipótesis nula "la proporción p es mayor o igual que 0.25" e indique la región crítica de dicho contraste. *(1.5 puntos)*
b) ¿Puede admitirse que la proporción de personas con contrato en su teléfono móvil ha disminuido? *(1 punto)*

Este ejercicio está resuelto en el examen anterior.

NOMBRE: ____

Instrucciones: 1) Todos los folios deben tener el nombre y estar numerados en la parte superior. 2) Todas las respuestas deben estar justificadas y simplificadas. 3) No se puede usar corrector ni lápiz. Se aconseja no usar borrador. 4) Se puede alterar el orden de las respuestas, pero no se puede intercalar la respuesta a una pregunta con las de otras. 5) Hay que obtener, al menos, 0.6 puntos en el ejercicio 1 para aprobar el examen.

1) Halle $f'(2)$, $g'(4)$ y $h'(0)$ para las funciones definidas de la siguiente forma:

$$f(x) = x^2 + \frac{16}{x^2}; \quad g(x) = (x^2+9)^3; \quad h(x) = \ln(x^2+1)$$ *(0.3+0.3+0.4 ptos)*

2) Dadas las inecuaciones:

$$y \le x + 5; \quad 2x + y \ge -4; \quad 4x \le 10 - y; \quad y \ge 0$$

a) Calcule el máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = x + \frac{1}{2}y$ sometida a las restricciones definidas por las inecuaciones anteriores, así como los puntos donde se alcanzan. *(1.5 puntos)*

b) ¿Es el punto $(4, -12)$ solución para el mínimo de f en el recinto definido por las inecuaciones? *(0.5 puntos)*

3) Sea la función $f(x) = -2x^3 + a \cdot e^{-x} + b \cdot x - 1$.

a) Halle los valores de a y b sabiendo que la función tiene un mínimo en $x = 0$ y que la gráfica de la función pasa por el punto $(0, 0)$. *(1 punto)*

b) Para $a = 0$ y $b = 1$, determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = -1$. *(1 punto)*

4) En un espacio muestral se sabe que para dos sucesos A y B se verifica:

$$P(A \cap B) = 0.1 \quad P(A^C \cap B^C) = 0.6 \quad P(A/B) = 0.5$$

a) Calcule $P(B)$. *(0.6 puntos)*

b) Calcule $P(A \cup B)$ *(0.6 puntos)*

c) ¿Son A y B independientes? *(0.6 puntos)*

d) Calcule la probabilidad de que suceda A pero no B *(0.7 puntos)*

5) Se cree que al menos el 25% de los usuarios de teléfonos móviles son de contrato. De una encuesta realizada a 950 personas, elegidas al azar, 200 de ellas manifestaron que tenían teléfono móvil de contrato. A la vista de estos resultados y con un nivel de significación del 5%, se pide:

a) Establezca un contraste, con hipótesis nula "la proporción p es mayor o igual que 0.25" e indique la región crítica de dicho contraste. *(1.5 puntos)*

b) ¿Puede admitirse que la proporción de personas con contrato en su teléfono móvil ha disminuido? *(1 punto)*

SOLUCIONES

1) Halle $f'(2)$, $g'(4)$ y $h'(0)$ para las funciones definidas de la siguiente forma:

$$f(x) = x^2 + \frac{16}{x^2}; \quad g(x) = (x^2+9)^3; \quad h(x) = \ln(x^2+1) \qquad \textit{(0.3+0.3+0.4 ptos)}$$

$$f'(x) = 2x - \frac{16\cdot 2x}{x^4} = \boxed{2x - \frac{32}{x^3}} \Rightarrow \boxed{f'(2) = 0}$$

$$g'(x) = 3(x^2+9)^2 2x = \boxed{6x(x^2+9)^2} \Rightarrow \boxed{g'(4) = 15000}$$

$$h'(x) = \boxed{\frac{2x}{x^2+1}} \Rightarrow \boxed{h'(0) = 0}$$

2) Dadas las inecuaciones:

$$y \le x + 5; \quad 2x + y \ge -4; \quad 4x \le 10 - y; \quad y \ge 0$$

a) Calcule el máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = x + \frac{1}{2}y$ sometida a las restricciones definidas por las inecuaciones anteriores, así como los puntos donde se alcanzan. *(1.5 puntos)*

Cambiando en cada una de las inecuaciones de las restricciones el signo de desigualdad por un igual, se obtiene la ecuación de una recta, que pasamos a dibujar mediante una tabla de valores. Despejando y en la inecuación correspondiente, tendremos que $y \le$ (ecuación de la recta) o que $y \ge$ (ec. de la recta), con lo que los puntos que resuelven la inecuación serán los que quedan debajo o encima (respectivamente) de la recta. Dibujaremos la recta y señalaremos con flechitas el semiplano que nos interesa. Así:

- $y \ge 0$: Por encima del eje OX.
- $y = x + 5$:

x	0	–5
y	5	0

$y \le x + 5 \Rightarrow$ Semiplano inferior

- $2x + y = -4$:

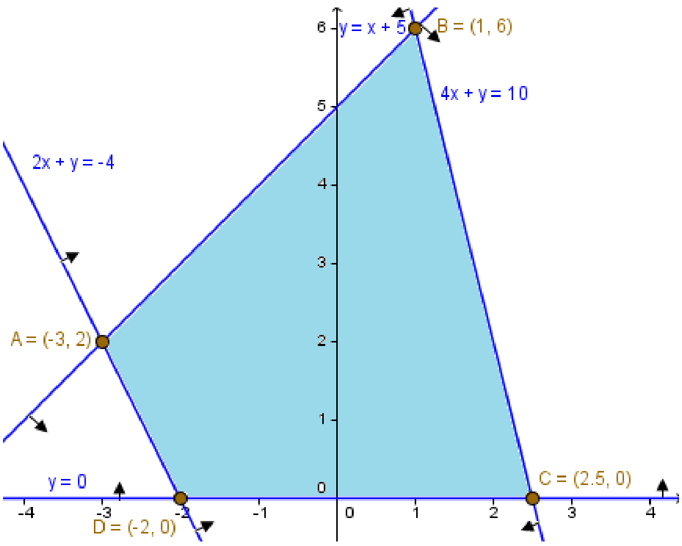
x	0	–2
y	–4	0

$2x + y \ge -4 \Rightarrow y \ge -4 - 2x$: Semipl. superior

- $4x = 10 - y$:

x	0	5/2
y	10	0

$4x \le 10 - y \Rightarrow y \ge 10 - 4x$: Semipl. superior



El recinto resultante figura en el gráfico adjunto, donde ya hemos detallado las coordenadas de los vértices. Nunca se pueden realizar cálculos a partir de un gráfico, que sólo nos sirve para deducir qué cálculos hemos de realizar.
De las tablas de valores, sabemos que $\boxed{C(2.5, 0) \text{ y } D(-2, 0)}$. Los vértices restantes son:

- $$\left.\begin{array}{r} 2x + y = -4 \\ x - y = -5 \end{array}\right\} \Rightarrow$$
  $$3x \quad = -9 \Rightarrow x = -3$$

$2(-3) + y = -4 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow \boxed{A(-3, 2)}$

- $\left.\begin{array}{r} 4x + y = 10 \\ x - y = -5 \end{array}\right\}$ $\Rightarrow 4 + y = 10 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow \boxed{B(1, 6)}$.

  $5x \quad = 5 \Rightarrow x = 1$

Por último, evaluamos la función objetivo en cada vértice:

- $f(A) = f(-3, 2) = -3 + 0.5 \cdot 2 = -2$
- $f(B) = f(1, 6) = 1 + 0.5 \cdot 6 = 4$
- $f(C) = f(2.5, 0) = 2.5 + 0.5 \cdot 0 = 2.5$
- $f(D) = f(-2, 0) = -2 + 0.5 \cdot 0 = -2$

Por tanto:

> El máximo vale 4 y se alcanza en (1, 6). El mínimo es –2 y se alcanza en (–3, 2) y en (–2, 0), así como en todos los puntos del segmento que los une, que son los puntos de la recta $2x + y = -4$, con $-3 \leq x \leq -2$.

b) ¿Es el punto (4, –12) solución para el mínimo de f en el recinto definido por las inecuaciones? *(0.5 puntos)*

No es solución, porque aunque $f(4, -12) = 4 + 0.5(-12) = -2$, no es un punto de dicho segmento, ya que $x = 4$ no está comprendido entre -3 y -2, aunque sí está en la recta $2x + y = -4$.

3) Sea la función $f(x) = -2x^3 + a \cdot e^{-x} + b \cdot x - 1$.

a) Halle los valores de a y b sabiendo que la función tiene un mínimo en $x = 0$ y que la gráfica de la función pasa por el punto $(0, 0)$. *(1 punto)*

$f(x)$ es una función continua en todo R, pues es elemental y su dominio es R. También es derivable, pues su derivada existe para todo x:

$$f'(x) = -6x^2 - a \cdot e^{-x} + b$$

Por tanto, para que tenga un mínimo en $x = 0$ debe ser $f'(0) = 0$ y $f''(0) > 0$. La primera de estas condiciones se traduce en que:

$$0 - a \cdot 1 + b = 0 \Rightarrow \boxed{a = b}.$$

Por otra parte, $f(0) = 0$, pues pasa por $(0, 0)$. Es decir:

$$0 + a \cdot 1 + 0 - 1 = 0 \Rightarrow a = 1.$$

De donde, según lo anterior, $b = 1$.

Como $f''(x) = -12x + a \cdot e^{-x} = -12x + e^{-x} \Rightarrow f''(0) = 1 > 0 \Rightarrow$ En efecto, se trata de un mínimo relativo. Hemos de realizar esta comprobación porque, si se verificase lo contrario, se trataría de un máximo relativo y el problema no tendría solución.

La solución es, entonces: $\boxed{a = 1 \text{ con } b = 1}$.

b) Para $a = 0$ y $b = 1$, determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = -1$. *(1 punto)*

La función es: $f(x) = -2x^3 + x - 1 \Rightarrow f'(x) = -6x^2 + 1$.

- Punto de tangencia: $f(-1) = 0$.
- Pendiente de la tangente: $m = f'(-1) = -6 + 1 = -5$.
- Recta tangente: $y - 0 = -5(x + 1) \Rightarrow \boxed{y = -5x - 5}$.

4) En un espacio muestral se sabe que para dos sucesos A y B se verifica:

$$P(A \cap B) = 0.1 \qquad P(A^C \cap B^C) = 0.6 \qquad P(A/B) = 0.5$$

c) Calcule $P(B)$. *(0.6 puntos)*
Lo que nos piden junto a dos de los datos que nos dan se relacionan por la fórmula de la *probabilidad condicionada*:

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A/B)} = \frac{0.1}{0.5} = \frac{1}{5} = \boxed{0.2}$$

d) Calcule $P(A\cup B)$ *(0.6 puntos)*
$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$. Nos falta conocer $P(A)$, por lo que no podemos emplear, de momento, esta fórmula. El dato del enunciado que no hemos utilizado parece estar relacionado con una Ley de Morgan. Busquemos por ese camino:

$$0.6 = P(A^C\cap B^C) = P[(A\cup B)^C] = 1 - P(A\cup B) \Rightarrow P(A\cup B) = 1 - 0.6 = \boxed{0.4}$$

e) ¿Son A y B independientes? *(0.6 puntos)*
Ahora sí podemos usar la fórmula anterior para calcular $P(A)$:

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) \Rightarrow 0.4 = P(A) + 0.2 - 0.1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(A) = 0.4 - 0.2 + 0.1 = 0.3$$

Y como $P(A/B) = 0.5 \Rightarrow P(A/B) \neq P(A) \Rightarrow$ $\boxed{\text{No son independientes}}$.

f) Calcule la probabilidad de que suceda A pero no B *(0.7 puntos)*

$$P(A - B) = P(A\cap B^C) = P(A) - P(A\cap B) = 0.3 - 0.1 = \boxed{0.2}$$

5) Se cree que al menos el 25% de los usuarios de teléfonos móviles son de contrato. De una encuesta realizada a 950 personas, elegidas al azar, 200 de ellas manifestaron que tenían teléfono móvil de contrato. A la vista de estos resultados y con un nivel de significación del 5%, se pide:

a) Establezca un contraste, con hipótesis nula "la proporción p es mayor o igual que 0.25" e indique la región crítica de dicho contraste. *(1.5 puntos)*
El contraste se puede hacer porque $n \geq 30$. Las hipótesis nula y alternativa son:

$$\begin{cases} H_0 : p \geq 0.25 \\ H_1 : p < 0.25 \end{cases}$$

Así que estamos ante un contraste unilateral. Como $\alpha = 0.05 \Rightarrow 1 - \alpha = 0.95$ $\Rightarrow$ De $P(Z \leq z_\alpha) = 0.95$ se llega a que $z_\alpha = 1.645$. Por consiguiente:

$$RA_{0.05} = (-1.645, +\infty) \Rightarrow \boxed{RC_{0.05} = (-\infty, -1.645)}.$$

b) ¿Puede admitirse que la proporción de personas con contrato en su teléfono móvil ha disminuido? *(1 punto)*

$$n = 950; \quad \hat{p} = \frac{200}{950} \Rightarrow Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0 q_0}{n}}} = \frac{\dfrac{200}{950} - 0.25}{\sqrt{\dfrac{0.25\cdot 0.75}{950}}} = -2.8098$$

Como $Z \in RC_{0.05} \Rightarrow$ Rechazamos la hipótesis nula y concluimos que la proporción estudiada es menor que 0.25, es decir, que ha disminuido, si partimos de la creencia inicial. Y la conclusión tiene un margen de error de tipo I del 5%.

Realmente, el enunciado es confuso, por cuanto se habla, inicialmente, de *creencia* y no de que fuera un dato constatado con anterioridad. Lo que se supone que piden es la conclusión del contraste de hipótesis.

IES Fernando de Herrera **Curso 2014 / 15**

Tercer trimestre – Recuperación – 2º Bach CCSS B (1ª parte)

NOMBRE: ____

Instrucciones: 1) Todos los folios deben tener el nombre y estar numerados en la parte superior. 2) Todas las respuestas deben estar justificadas y simplificadas. 3) No se puede usar corrector ni lápiz. Se aconseja no usar borrador. 4) Se puede alterar el orden de las respuestas, pero no se puede intercalar la respuesta a una pregunta con las de otras. 5) Hay que obtener, al menos, 0.6 puntos en el ejercicio 1 para aprobar el examen.

4) El 50% de los préstamos que concede un banco son para vivienda, el 30%, para industria y el 20%, para consumo. No se pagan el 20% de los préstamos para vivienda, el 15% de los préstamos para industria y el 70% de los préstamos para consumo.
   a) Si se elige al azar un préstamo, calcule la probabilidad de que se pague. *(1 punto)*
   b) Se elige un préstamo al azar que resulta impagado. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un préstamo para consumo? *(0.8 puntos)*
   c) Ante un préstamo impagado, el director del banco afirma que es más probable que sea para vivienda que para consumo. ¿Lleva razón el director? *(0.7 puntos)*

5) La longitud de la ballena azul se distribuye según una ley Normal con desviación típica 7.5 m. en un estudio estadístico realizado a 25 ejemplares se ha obtenido el intervalo de confianza (21.06, 26.04) para la longitud media.
   a) Calcule la longitud media de los 25 ejemplares de la muestra. *(0.5 puntos)*
   b) Calcule el nivel de confianza con el que se ha construido dicho intervalo. *(1.5 ptos)*
   c) ¿Qué tamaño muestral sería necesario para garantizar una amplitud máxima de 4 m con un nivel de confianza del 97%? *(0.5 puntos)*

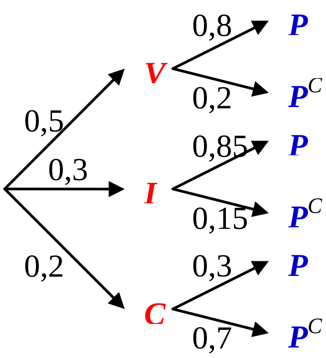
SOLUCIONES

4) El 50% de los préstamos que concede un banco son para vivienda, el 30%, para industria y el 20%, para consumo. No se pagan el 20% de los préstamos para vivienda, el 15% de los préstamos para industria y el 70% de los préstamos para consumo.

a) Si se elige al azar un préstamo, calcule la probabilidad de que se pague. *(1 punto)*

Representamos en un diagrama de árbol los datos. Por el *Teorema de la Probabilidad Total*:

$$\boxed{P(P) =}\ 0.5\cdot0.8 + 0.3\cdot0.85 + 0.2\cdot0.3 = \boxed{0.715}$$



b) Se elige un préstamo al azar que resulta impagado. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un préstamo para consumo? *(0.8 puntos)*

Por el *axioma de la probabilidad condicionada*:

$$\boxed{P(C/P^C) =}\ \frac{P(C\cap P^C)}{P(P^C)} = \frac{0.2\cdot0.7}{1-0.715} = \boxed{\frac{28}{57} = 0.4912}$$

c) Ante un préstamo impagado, el director del banco afirma que es más probable que sea para vivienda que para consumo. ¿Lleva razón el director? *(0.7 puntos)*

Aplicando, igualmente, el *axioma de la probabilidad condicionada*:

$$P(V/P^C) = \frac{P(V\cap P^C)}{P(P^C)} = \frac{0.5\cdot0.2}{1-0.715} = \frac{20}{57} = 0.3509$$

Por tanto, ante un préstamo impagado, es mayor la probabilidad de que sea para consumo que para vivienda. De modo que $\boxed{\text{no tiene razón el director}}$.

5) La longitud de la ballena azul se distribuye según una ley Normal con desviación típica 7.5 m. en un estudio estadístico realizado a 25 ejemplares se ha obtenido el intervalo de confianza (21.06, 26.04) para la longitud media.

a) Calcule la longitud media de los 25 ejemplares de la muestra. *(0.5 puntos)*

El intervalo de confianza se puede construir porque los datos proceden de una población con distribución Normal. El centro del intervalo de confianza para la media poblacional, que es lo que nos dan, es la media de la muestra. Por tanto:

$$\boxed{\bar{x} =}\ \frac{21.06+26.04}{2} = \boxed{23.55}$$

b) Calcule el nivel de confianza con el que se ha construido dicho intervalo. *(1.5 ptos)*

El *error* es la mitad de la amplitud del intervalo:

$$E = \frac{26.04-21.06}{2} = 2.49$$

Como $E = z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow z_{\alpha/2} = \dfrac{E\sqrt{n}}{\sigma} = \dfrac{2.49\sqrt{25}}{7.5} = 1.66.$

Recurriendo a las tablas de la N(0;1) $\Rightarrow P(Z \le 1.66) = 0.9515 = 1-\dfrac{\alpha}{2} \Rightarrow \dfrac{\alpha}{2}$ $= 1 - 0.9515 \Rightarrow \alpha = 2(1 - 0.9515) = 0.097 \Rightarrow 1 - \alpha = 1 - 0.097 = 0.903$, Por tanto, $\boxed{\text{el nivel de confianza es del } 90.3\%}$.

c) ¿Qué tamaño muestral sería necesario para garantizar una amplitud máxima de 4 m con un nivel de confianza del 97%? *(0.5 puntos)*

El error es la mitad de la amplitud. Por tanto, $E \leq 2 \Rightarrow z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 2 \Rightarrow$

$\sqrt{n} \geq \frac{z_{\alpha/2}\sigma}{2} \Rightarrow n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{2}\right)^2$.

Si $1-\alpha = 0.97 \Rightarrow \alpha = 0.03 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 1-0.015 = 0.985 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17$

Por tanto: $n \geq \left(\frac{2.17 \cdot 7.5}{2}\right)^2 = 66.22 \Rightarrow \boxed{n = 67}$.

NOMBRE: ____

Instrucciones: 1) Todos los folios deben tener el nombre y estar numerados en la parte superior. 2) Todas las respuestas deben estar justificadas y simplificadas. 3) No se puede usar corrector ni lápiz. Se aconseja no usar borrador. 4) Se puede alterar el orden de las respuestas, pero no se puede intercalar la respuesta a una pregunta con las de otras. 5) Hay que obtener, al menos, 0.6 puntos en el ejercicio 1 para aprobar el examen.

1) Calcule las derivadas de las siguientes funciones: *(0,3+0,3+0,4 puntos)*

a) $f(x) = e^{3x}\cdot\ln(2x-5)$ b) $g(x) = \dfrac{3^{2x}}{x^2-1}$ c) $h(x) = (3x^2+5x-1)^6 + x^2 - \ln x$

2) a) Dibuje el recinto definido por el siguiente sistema de inecuaciones y determine sus vértices: *(1 punto)*

$$y \geq 200 - 2x, \quad x - 100 \leq 3y, \quad x + 2y \leq 600, \; x \geq 0.$$

b) Sabiendo que $A(0, 2)$, $B(1, 4)$, $C(3, 4)$, $D(4, 2)$ y $E(2, 1)$ son los vértices de una región factible, determine en ella el mínimo y el máximo de la función $F(x, y) = 10x + 5y + 21$, e indique los puntos donde se alcanzan. *(1 punto)*

3) Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2-x} & si \quad x \leq 1 \\ x^2 - 6x + 6 & si \quad x > 1 \end{cases}$$

se pide:

a) Estudiar la continuidad y derivabilidad. *(1 punto)*

b) Estudiar la monotonía y calcular los extremos locales. *(1 punto)*

SOLUCIONES

1) Calcule las derivadas de las siguientes funciones: *(0,3+0,3+0,4 puntos)*

a) $f(x) = e^{3x}\cdot\ln(2x-5)$ b) $g(x) = \dfrac{3^{2x}}{x^2-1}$ c) $h(x) = (3x^2+5x-1)^6 + x^2 - \ln x$

a) $f(x) = e^{3x}\cdot\ln(2x-5)$

$$f'(x) = 3e^{3x}\ln(2x-5) + e^{3x}\frac{2}{2x-5} = \boxed{e^{3x}\left(3\ln(2x-5)+\frac{2}{2x-5}\right)}$$

b) $g(x) = \dfrac{3^{2x}}{x^2-1}$

$$g'(x) = \boxed{\frac{2\cdot 3^{2x}(\ln 3)(x^2-1)-2x\cdot 3^{2x}}{(x^2-1)^2}}$$

c) $h(x) = (3x^2+5x-1)^6 + x^2 - \ln x$

$$h'(x) = \boxed{6(3x^2+5x-1)^5(6x+5)+2x-\frac{1}{x}}$$

2) a) Dibuje el recinto definido por el siguiente sistema de inecuaciones y determine sus vértices: *(1 punto)*

$$y \geq 200-2x,\quad x-100 \leq 3y,\quad x+2y \leq 600,\quad x \geq 0.$$

Dibujamos las rectas que resultan al sustituir las desigualdades por iguales. Para ello, consideramos las tablas de valores siguientes ($x = 0$ es el eje OY):

- $y = 200 - 2x$

x	0	100
y	200	0

- $x - 100 = 3y$

x	0	100
y	–33.3	0

- $x + 2y = 600$

x	0	600
y	300	0

Estas tablas nos ayudan a decidir qué dimensiones consideraremos para los ejes al dibujar el gráfico.

Al despejar y en la primera inecuación, resulta $y \geq 200 - 2x$, es decir, $y \geq$ (recta), dado que la recta es $y = 200 - 2x$. Por tanto, de las dos regiones en las que el plano queda dividido por la recta, el semiplano que nos interesa es el superior. Lo señalamos con unas flechitas.

En la segunda, por idéntica razón, es el semiplano superior, pues quedaría $y \geq \dfrac{x-100}{3}$, o sea, $y \geq$ (recta), porque la recta es $y = \dfrac{x-100}{3}$.

Análogamente, es el inferior en la tercera, y el semiplano que queda a la derecha del eje OY, por ser $x \geq 0$ la cuarta.

Calculemos sus vértices. Hay tres que tenemos de las tablas de valores anteriores:

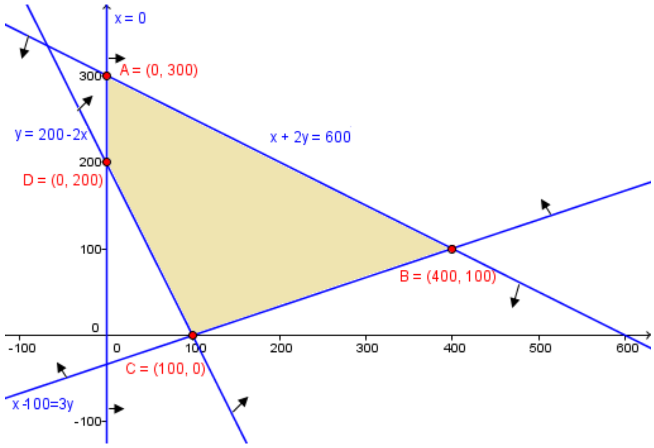
$$\boxed{A(0,\ 300)}\quad \boxed{C(100,\ 0)}\quad \boxed{D(0,\ 200)}$$

El que falta es la intersección de las rectas que observamos en el gráfico,

$$\left.\begin{array}{r} x+2y=600 \\ x-100=3y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y=600 \\ -x+3y=-100 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\text{Sustituyendo en la 2ª:} \\ x=3y+100=300+100=400\end{array}$$
$$5y=500 \Rightarrow y=100$$

Luego $\boxed{B(400,\ 100)}$.

Todo lo hemos reflejado en el gráfico.



b) Sabiendo que A(0, 2), B(1, 4), C(3, 4), D(4, 2) y E(2, 1) son los vértices de una región factible, determine en ella el mínimo y el máximo de la función $F(x, y) = 10x + 5y + 21$, e indique los puntos donde se alcanzan. *(1 punto)*

Este apartado no tiene nada que ver con el anterior.

$F(A) = F(0, 2) = 10·0 + 5·2 + 21 = 31$
$F(B) = F(1, 4) = 10·1 + 5·4 + 21 = 51$
$F(C) = F(3, 4) = 10·3 + 5·4 + 21 = 71$
$F(D) = F(4, 2) = 10·4 + 5·2 + 21 = 71$
$F(E) = F(2, 1) = 10·2 + 5·1 + 21 = 46$

De donde:

El *máximo* vale 71 y se alcanza en los vértices $C(3, 4)$, $D(4, 2)$ y todos y cada uno de los infinitos puntos del segmento que los une.
El *mínimo* vale 31 y se alcanza en $A(0, 2)$.

3) Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2-x} & si \quad x \le 1 \\ x^2 - 6x + 6 & si \quad x > 1 \end{cases}$$

se pide:

a) Estudiar la continuidad y derivabilidad. *(1 punto)*

Aunque no nos pidieran la continuidad, para estudiar la derivabilidad tenemos que hacerla, porque donde no sea continua no puede ser derivable.

Continuidad

- Zona $(-\infty, 1)$: f coincide con $y = \dfrac{1}{2-x}$ que, al ser elemental, es continua en su dominio. Éste lo constituyen los puntos que no anulen el denominador, o sea todo R salvo 2. Pero $2 \notin (-\infty, 1)$, por lo que no nos importa: en todos los puntos de la zona, la función $y = \dfrac{1}{2-x}$ (y, por coincidir con ella, f), es continua.
- Zona $(1, +\infty)$: f coincide con $y = x^2 - 6x + 6$, que es continua, por ser polinómica, en todo R, en particular, en nuestra zona. O sea, f es continua en todo el intervalo.

- <u>$x = 1$</u>: Los puntos que conectan una zona con otra tienen que estudiarse siempre por separado.

  1) $\exists\, f(1) = \dfrac{1}{2-1} = 1$

  2) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{2-x} = 1;\quad \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(x^2-6x+6) = 1$

  Como los dos límites laterales coinciden y existen, el límite completo toma el valor coincidente. A su vez, es igual a la imagen del punto, por lo que se cumplen las tres condiciones de continuidad: f es continua en $x = 1$.

Por tanto, $\boxed{f \text{ es continua en todo } \mathbb{R}}$.

<u>Derivabilidad</u>

Las fórmulas de la *tabla de derivadas* son aplicable en intervalos abiertos, por lo que obtenemos, directamente, que:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(2-x)^2} & si \quad x<1 \\ 2x-6 & si \quad x>1 \end{cases}$$

Falta ver si existe f' en $x = 1$. Como:

$$f'(1^-) = \frac{1}{(2-1)^2} = 1 \quad y \quad f'(1^+) = 2\cdot 1 - 6 = -4 \ \Rightarrow\ \nexists\, f'(1)$$

por tanto, la expresión definitiva de f es la que ya teníamos, lo que implica que f' es discontinua en $x = 1$, porque no tiene imagen en dicho punto, es decir, por fallar la primera condición para que sea continua. Así:

$$\boxed{f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(2-x)^2} & si \quad x<1 \\ 2x-6 & si \quad x>1 \end{cases}}$$

b) Estudiar la monotonía y calcular los extremos locales. *(1 punto)*

- <u>Discontinuidades de f</u>: No tiene.
- <u>Discontinuidades de f'</u>: $x = 1$.
- <u>$f'(x) = 0$</u>: Si estamos en $(-\infty, 1)$: $\dfrac{1}{(2-x)^2} = 0 \Rightarrow 1 = 0$, lo que no es posible. Y si estamos en $(1, +\infty)$: $2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$, que sí hay que considerarlo, porque es un punto de nuestra zona $(1, +\infty)$.

Dividimos el dominio en intervalos por los puntos obtenidos:

	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
f'	+	$\nexists$	–	0	+
f	↗	Mx	↘	mín	↗

- <u>Máximo relativo</u>: $(1, 1)$ (sustituyendo $x = 1$ en f).
- <u>Mínimo relativo</u>: $(3, -3)$

NOMBRE: ____

Instrucciones: 1) Todos los folios deben tener el nombre y estar numerados en la parte superior. 2) Todas las respuestas deben estar justificadas y simplificadas. 3) No se puede usar corrector ni lápiz. Se aconseja no usar borrador. 4) Se puede alterar el orden de las respuestas, pero no se puede intercalar la respuesta a una pregunta con las de otras. 5) Hay que obtener, al menos, 0.6 puntos en el ejercicio 1 para aprobar el examen, salvo quienes tienen que hacer examen de derivadas aparte. Sin embargo, estos últimos estarán exentos de dicho examen si cumplen este requisito.

1) Calcule las derivadas simplificadas de las siguientes funciones: *(0,3+0,3+0,4 ptos)*

   a) $y = \ln^3 x$ b) $y = e^x(1 - x^2)$ c) $y = 7^{2\sqrt{x}}$

2) a) Represente la región del plano determinada por las siguientes inecuaciones, y halle sus vértices: $2x + 5y \le 15$, $x + y \le 6$, $5x - 7y \le 42$, $x \ge 0$. *(1,2 puntos)*

   b) En esa región, halle el valor mínimo de la función $F(x, y) = -2x - 2y + 3$ y dónde lo alcanza. *(0,8 puntos)*

3) El beneficio, en miles de euros, alcanzado en una tienda de ropa el pasado año, viene dado por la función $B(t)$ expresada a continuación (t es el tiempo transcurrido en meses):

$$B(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{8}t^2 - t + 5 & \text{si} \quad 0 \le t \le 6 \\ \dfrac{t+1}{2} & \text{si} \quad 6 < t \le 12 \end{cases}$$

   a) Estudie la derivabilidad de la función, en particular al cabo de 6 meses. *(1 punto)*

   b) ¿Cuándo fueron el máximo y mínimo beneficio, y a cuánto ascendieron? *(1 pto)*

   c) Represente gráficamente la función. *(0,5 puntos)*

4) En una ciudad, el 55% de la población consume aceite de oliva, el 30% de girasol, y el 20% ambos tipos de aceite. Se escoge una persona al azar:

   a) Si consume aceite de oliva, ¿cuál es la probabilidad de que consuma también aceite de girasol? *(0.5 puntos)*

   b) Si consume aceite de girasol, ¿cuál es la probabilidad de que no consuma aceite de oliva? *(1 punto)*

   c) ¿Cuál es la probabilidad de que no consuma ninguno de los dos tipos de aceite? *(0,5 puntos)*

5) El peso de los adultos de una determinada población sigue una distribución Normal de media 70 kg y desviación típica 16 kg. Si elegimos, al azar, muestras de tamaño 4,

   a) ¿Cuál es la distribución de la media muestral? *(0,5 puntos)*

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que el peso medio de una de esas muestras esté comprendido entre 65 y 72 kg? *(1 punto)*

   c) ¿Cuál es la probabilidad de que ese peso medio sea menor que 70kg? *(1 punto)*

SOLUCIONES

1) Calcule las derivadas simplificadas de las siguientes funciones: *(0,3+0,3+0,4 ptos)*

a) $y = \ln^3 x$ b) $y = e^x(1-x^2)$ c) $y = 7^{2\sqrt{x}}$

a) $y = \ln^3 x = (\ln x)^3 \Rightarrow \boxed{y' =} (3\ln^2 x)\dfrac{1}{x} = \boxed{\dfrac{3\ln^2 x}{x}}$

b) $y = e^x(1-x^2) \Rightarrow \boxed{y' =} e^x(1-x^2) + e^x(-2x) = \boxed{e^x(-x^2-2x+1)}$

c) $y = 7^{2\sqrt{x}} \Rightarrow \boxed{y' =} 2\dfrac{1}{2\sqrt{x}}7^{2\sqrt{x}}\ln 7 = \boxed{\dfrac{7^{2\sqrt{x}}\ln 7}{\sqrt{x}}}$

2) a) Represente la región del plano determinada por las siguientes inecuaciones, y halle sus vértices: $2x + 5y \le 15$, $x + y \le 6$, $5x - 7y \le 42$, $x \ge 0$. *(1,2 puntos)*

Cambiando en cada una de las inecuaciones de las restricciones el signo de desigualdad por un igual, se obtiene la ecuación de una recta, que pasamos a dibujar mediante una tabla de valores. Despejando y en la inecuación correspondiente, tendremos que $y \le$ (ecuación de la recta) o que $y \ge$ (ec. de la recta), con lo que los puntos que resuelven la inecuación serán los que quedan debajo o encima (respectivamente) de la recta. Dibujaremos la recta y señalaremos con flechitas el semiplano que nos interesa. Así:

- $x \ge 0$: A la derecha del eje OY.
- $2x + 5y = 15$:

x	0	15/2
y	3	0

$y \le (15-2x)/5 \Rightarrow$ Semiplano inferior

- $x + y = 6$:

x	0	6
y	6	0

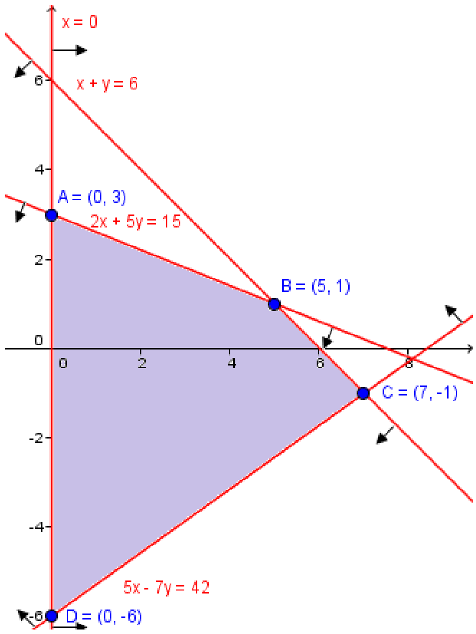
$y \le 6 - x \Rightarrow$ Semiplano inferior

- $5x - 7y \le 42$:

x	0	42/5
y	–6	0

$y \ge (5x-42)/7 \Rightarrow$ Semiplano superior

Llevamos los resultados a un gráfico y calculamos los ejes (nunca se puede deducir un resultado numérico de un gráfico: éstos sirven sólo para razonar y decidir las estrategias de resolución). De las tablas que hemos usado, tenemos ya que $\boxed{A(0,\ 3)}$, $\boxed{D(0,\ -6)}$.



- $\left.\begin{array}{r} x + y = 6 \\ 2x + 5y = 15 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{r} -2x - 2y = -12 \\ 2x + 5y = 15 \end{array}\right\}$$
$$3y = 3 \Rightarrow y = 1$$

Sustit. en la 1ª: $x = 6 - y = 6 - 1 = 5$

Luego $\boxed{B(5,\ 1)}$.

- $\left.\begin{array}{r} x + y = 6 \\ 5x - 7y = 42 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{r} -5x-5y=-30 \\ 5x-7y=42 \end{array}\right\} \qquad \text{Sustit. en la } 1^{a}: \; x = 6-y = 6+1 = 7$$
$$-12y = 12 \Rightarrow y = -1$$

Luego $\boxed{C(7, -1)}$.

b) En esa región, halle el valor mínimo de la función $F(x, y) = -2x - 2y + 3$ y dónde lo alcanza. *(0,8 puntos)*

$F(A) = F(0, 3) = -2\cdot 0 - 2\cdot 3 + 3 = -3$
$F(B) = F(5, 1) = -2\cdot 5 - 2\cdot 1 + 3 = -9$
$F(C) = F(7, -1) = -2\cdot 7 - 2(-1) + 3 = -9$
$F(D) = F(0, -6) = -2\cdot 0 - 2(-6) + 3 = 15$

Luego el mínimo vale –9 y se alcanza en $B(5, 1)$, en $C(7, -1)$ y en los infinitos puntos del segmento que los une, que es (según vemos en el gráfico) $x + y = 6$, con $5 \le x \le 7$.

3) El beneficio, en miles de euros, alcanzado en una tienda de ropa el pasado año, viene dado por la función $B(t)$ expresada a continuación (t es el tiempo transcurrido en meses):

$$B(t) = \begin{cases} \frac{1}{8}t^2 - t + 5 & \text{si} \quad 0 \le t \le 6 \\ \frac{t+1}{2} & \text{si} \quad 6 < t \le 12 \end{cases}$$

a) Estudie la derivabilidad de la función, en particular al cabo de 6 meses. *(1 punto)*

Para derivar una función definida a trozos, hay que estudiar primero su continuidad:

- En $[0, 6) \cup (6, 12]$ es continua, por estar definida mediante funciones polinómicas.
- En $t = 6$ hay que realizar el estudio por separado, porque conecta las dos fórmulas que definen $B(t)$. 1) $B(6) = 36/8 - 6 + 5 = 7/2$;
  2) $\lim\limits_{t\to 6^-}\left(\frac{1}{8}t^2 - t + 5\right) = 7/2$; $\lim\limits_{t\to 6^+}\frac{t+1}{2} = 7/2$. Como los tres valores coinciden, es continua.

Por tanto, B es continua en su dominio: [0, 12]. Podemos abordar su derivada (si en algún punto no fuese continua, en él no podría ser derivable). Las fórmulas de las tablas de derivadas pueden usarse directamente en intervalos abiertos:

$$B'(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}t - 1 & \text{si} \quad 0 < t < 6 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad 6 < t < 12 \end{cases}$$

$B'(6^-) = \frac{1}{4}6 - 1 = \frac{1}{2}$; $B'(6^+) = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $\exists \boxed{B'(6) = \frac{1}{2}}$. Por tanto:

$$\boxed{B'(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}t - 1 & \text{si} \quad 0 < t \le 6 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad 6 < t < 12 \end{cases}}$$

b) ¿Cuándo fueron el máximo y mínimo beneficio, y a cuánto ascendieron? *(1 pto)*
Como ni B ni B' tienen discontinuidades, los extremos relativos de B, si los tiene, los encontraremos entre los puntos que anulen su derivada, que son:

- En (0, 6]: $\frac{t}{4} - 1 = 0 \Rightarrow t = 4 \in (0, 6]$.
- En (6, 12): $\frac{1}{2} = 0$, que no se consigue para ningún valor de t.

Por otra parte, los extremos del dominio son 0 y 12. Luego los extremos absolutos estarán entre estos tres puntos. Comparamos sus imágenes para detectarlos:

- $t = 0$: $B(0) = 5$
- $t = 4$: $B(4) = 3$
- $t = 12$: $B(12) = 13/2$

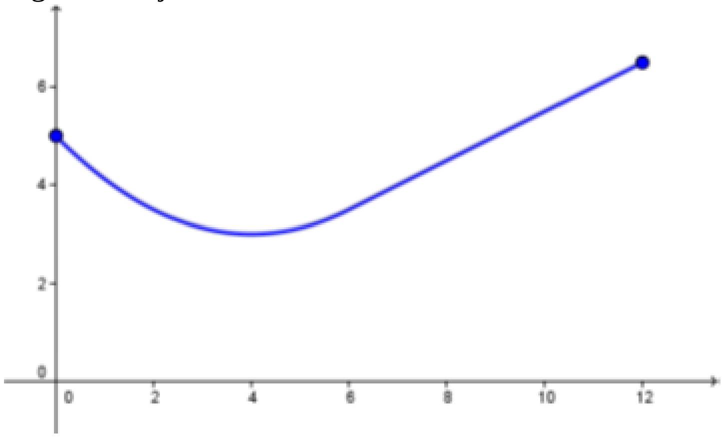
De modo que el máximo absoluto vale 13/2 (6500 €) y se alcanza en $t = 12$ (en el mes 12), y el mínimo absoluto es 3 (3000 €) en $t = 4$ (en el mes 4).

c) Represente gráficamente la función. *(0,5 puntos)*
En (6, 12], B está definida por una recta: basta una simple tabla de valores para trazar su gráfica. En [0, 6], se trata de una parábola:

- Es convexa, porque el coeficiente de t^2 es positivo.
- Su eje es la recta vertical $t = -b/2a$: $t = \frac{1}{2 \cdot 1/8} = 4$
- Su vértice es: (4, 3).
- Si $t = 0 \Rightarrow B(0) = 5$.
- Si $y = 0 \Rightarrow t^2 - 8t + 40 = 0 \Rightarrow t = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 160}}{2}$ No corta a OX.
-

t	3	5	2	6	1
y	3.125	3.125	3.5	3.5	4.125

Obtenemos el gráfico adjunto.



4) En una ciudad, el 55% de la población consume aceite de oliva, el 30% de girasol, y el 20% ambos tipos de aceite. Se escoge una persona al azar:

a) Si consume aceite de oliva, ¿cuál es la probabilidad de que consuma también aceite de girasol? *(0.5 puntos)*
$P(O) = 0.55$, $P(G) = 0.3$, $P(O \cap G) = 0.2$, según el enunciado. Nos piden:

$$\boxed{P(G/O) =} \frac{P(G \cap O)}{P(O)} = \frac{0.2}{0.55} = \boxed{\frac{4}{11} \approx 0.3636}$$

b) Si consume aceite de girasol, ¿cuál es la probabilidad de que no consuma aceite de oliva? *(1 punto)*

$$\boxed{P(O^C/G) =} \frac{P(O^C \cap G)}{P(G)} = \frac{P(G-O)}{P(G)} = \frac{P(G)-P(G\cap O)}{P(G)} =$$

$$= \frac{0.3-0.2}{0.3} = \boxed{\frac{1}{3} \approx 0.33}$$

c) ¿Cuál es la probabilidad de que no consuma ninguno de los dos tipos de aceite? *(0,5 puntos)*

Por una de las Leyes de Morgan:

$$\boxed{P(O^C \cap G^C) =} P[(O\cup G)^C] = 1 - P(O\cup G) = 1 - [P(O) + P(G) - P(O\cap G)] =$$

$$= 1 - (0.55 + 0.3 - 0.2) = \boxed{0.35 = \frac{7}{20}}$$

5) El peso de los adultos de una determinada población sigue una distribución Normal de media 70 kg y desviación típica 16 kg. Si elegimos, al azar, muestras de tamaño 4,

a) ¿Cuál es la distribución de la media muestral? *(0,5 puntos)*

Como los datos proceden de una Normal:

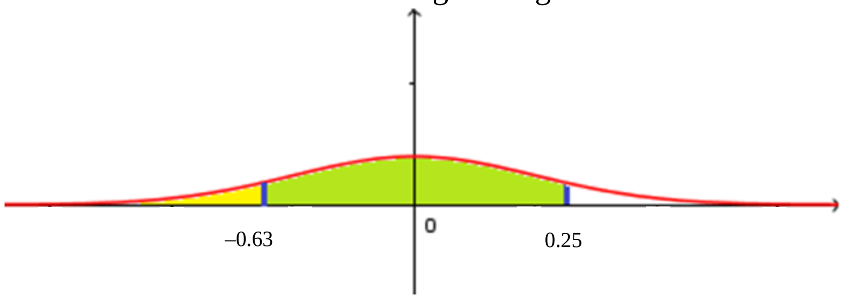
$$\bar{x} \in N\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(70; \frac{16}{\sqrt{4}}\right) = \boxed{N(70; 8)}$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el peso medio de una de esas muestras esté comprendido entre 65 y 72 kg? *(1 punto)*

Tipificando:

$$\boxed{P(65 \le \bar{x} \le 72) =} P\left(\frac{65-70}{8} \le \frac{\bar{x}-70}{8} \le \frac{72-70}{8}\right) = P(-0.63 \le Z \le 0.25) =$$

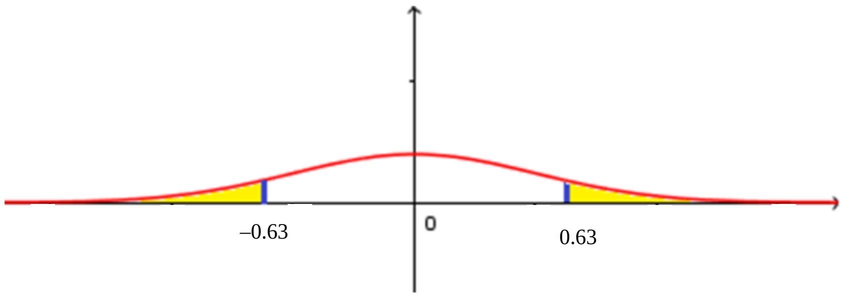
Esta probabilidad es el área verde en el siguiente gráfico:



Como $P(Z \le 0.25)$ es el área amarilla más la verde (desde $-\infty$ hasta 0.25), y $P(Z < -0.63)$ el área amarilla, el área buscada será igual a:

$$= P(Z \le 0.25) - P(Z < -0.63) =$$

Por la simetría de la función de densidad de la N(0; 1):



Lo anterior será igual a:

$$= P(Z \le 0.25) - P(Z > 0.63) =$$

Y por el suceso contrario:

$$= P(Z \le 0.25) - (1 - P(Z \le 0.63)) =$$

Buscando en las tablas de la N(0; 1):

$$= 0.5987 - 1 + 0.7357 = \boxed{0.3344}$$

c) ¿Cuál es la probabilidad de que ese peso medio sea menor que 70kg? *(1 punto)*

$$\boxed{P(\bar{x} < 70) =} \; P\left(\frac{\bar{x}-70}{8} \le \frac{70-70}{8}\right) = P(Z \le 0) = \boxed{0.5}$$