SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1. Sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas

1.1. Definiciones

Un sistema de tres ecuaciones lineales de con tres incógnitas, en su forma estándar, es un conjunto de tres igualdades de la forma: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$.

Las letras x_i, a_{ij} y b_i representan, respectivamente, a las incógnitas, a los coeficientes y a los términos independientes. (Se llama lineal porque las incógnitas siempre van afectadas por el exponente 1, que no se indica. Las incógnitas x_1, x_2 y x_3 suelen designarse por las letras x, y, z, respectivamente. Los coeficientes o los términos independientes pueden ser 0).

- La solución del sistema es el conjunto de valores de x_1, x_2 y x_3 que verifican sus ecuaciones.
- Dos sistemas son equivalentes si tienen las mismas soluciones.
- Discutir un sistema es determinar sus posibilidades de solución. Puede ser:
  – **compatible determinado**, cuando el sistema tiene una única solución.
  – **compatible indeterminado**, si tiene infinitas soluciones.
  – **incompatible**, cuando no tiene solución.

Ejemplos:

a) La terna $x = 0$, $y = 5$, $z = 1$ es solución del sistema $\begin{cases} x + y - 3z = 2 \\ -2x - y + 2z = -3 \\ 3x + y - 5z = 0 \end{cases}$. Cumple las tres ecuaciones (Compruébese). En cambio, $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$ no es solución: cumple la primera y segunda ecuaciones; pero no la tercera.

b) Los sistemas $\begin{cases} x + y - 3z = 2 \\ 2x - 2y + z = -1 \\ 3x + y - 2z = 8 \end{cases}$ y $\begin{cases} 3x - y - 2z = 1 \\ 2x - 2y + z = -1 \\ x + 3y - 3z = 9 \end{cases}$ son equivales, pues ambos tienen por solución los valores $x = 2$, $y = 3$, $z = 1$. (Puede comprobarse).

Observación: Una forma sencilla de obtener sistemas equivalentes consiste en sumar o restar las ecuaciones entre sí. Aquí, el segundo sistema se ha obtenido cambiando $E1$ por $E1 + E2$, y $E3$ por $E1 - E2$.

c) Los sistemas $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 5x + 3y + 3z = 0 \\ 6x + 4y + 2z = 2 \end{cases}$ y $\begin{cases} x + 3z = -3 \\ 3x + 2y + z = 1 \end{cases}$ son compatibles indeterminados. Ambos tienen infinitas soluciones. Por ejemplo, las ternas (–3, 5, 0) y (0, 1, –1).

En el primero de ellos puede verse que $E3 = E1 + E2$. En el segundo, falta una ecuación.

d) El sistema $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - 2y + 3z = 0 \\ x - 2y + 3z = -2 \end{cases}$ es incompatible. Puede verse que las ecuaciones segunda y tercera son contradictorias. Una misma cosa, $x - 2y + 3z$, no puede valer, a la vez, 0 y –2.

1.2. Métodos de resolución

- **Método de sustitución**. Es el más elemental de los métodos de resolución. Consiste en despejar una incógnita en alguna de las ecuaciones y llevar su valor a las otras. Se obtiene así un sistema asociado al primero, pero con una ecuación menos. La discusión del sistema inicial coincide con la del sistema final.

Ejemplo:

$$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2x \quad\ -z=1 \\ 3x-y-2z=3 \end{cases} \to z=2x-1 \Rightarrow \begin{cases} x+2y+2x-1=0 \\ 3x-y-2(2x-1)=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+2y=1 \\ -x-y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-4 \\ z=5 \end{cases}$$

- **Método de Gauss**

Consiste en transformar el sistema inicial, $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$, en otro equivalente a

él, de la forma: $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ \qquad a'_{22}x_2+a'_{23}x_3=b'_2 \\ \qquad\qquad a''_{33}x_3=b''_3 \end{cases}$. (Sistema escalonado: "triangular")

El paso de un sistema a otro se consigue mediante las transformaciones de Gauss ya conocidas: sumando o restando ecuaciones hasta eliminar la incógnita x_1 de la ecuación segunda ($E2$) y las incógnitas x_1 y x_2 de la tercera ecuación ($E3$).

Estudiando la tercera ecuación resultante, $a''_{33}x_3=b''_3$, pueden determinarse las posibilidades de solución del sistema, pues:

- Si $a''_{33}\neq 0 \Rightarrow$ el sistema es compatible determinado.

La incógnita x_3 puede despejarse; su valor se lleva a las otras dos ecuaciones y se obtienen los de x_2 y x_1.

- Si $a''_{33}=0$ y $b''_3=0 \Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.

La tercera ecuación queda: $0x_3=0$, que se cumple para cualquier valor de x_3.

- Si $a''_{33}=0$ y $b''_3\neq 0 \Rightarrow$ el sistema es incompatible.

La tercera ecuación quedaría: $0x_3\neq 0$, que es absurdo.

Observación: Como las ecuaciones pueden reordenarse, lo de menos es que el sistema quede triangular; lo importante es dejar una ecuación con una sola incógnita. A partir de esa ecuación se hará la discusión.

Ejemplos:

a) $$\begin{cases} x+y-3z=2 \\ 2x-y+z=-4 \\ 3x+y+5z=10 \end{cases} \begin{matrix} \\ \to E2-2E1 \\ E3-3E1 \end{matrix} \begin{cases} x+y-3z=2 \\ -3y+7z=-8 \\ -2y+14z=4 \end{cases} \begin{matrix} \\ \to \\ 3E3-2E2 \end{matrix} \begin{cases} x+y-3z=2 \\ -3y+7z=-8 \\ 28z=28 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=1 \to \begin{cases} x+y-3=2 \\ -3y+7=-8 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow y=5,\ x=0.$$

El sistema es compatible determinado. Su solución es $x=0$, $y=5$, $z=1$.

b) $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 4y + z = 3 \\ -x + 5y \quad = 3 \end{cases} \xrightarrow{E1-E2} \begin{cases} x - 5y \quad = -3 \\ x + 4y + z = 3 \\ -x + 5y \quad = 3 \end{cases} \xrightarrow{E3+E1} \begin{cases} x - 5y \quad = -3 \\ x + 4y + z = 3 \\ 0 = 0 \end{cases}$

El sistema es compatible indeterminado, equivalente a:

$\begin{cases} x - 5y = -3 \\ x + 4y = 3 - z \end{cases} \xrightarrow{E2-E1} \begin{cases} x - 5y = -3 \\ 9y = 6 - z \end{cases} \to \begin{cases} x - 5y = -3 \\ z = 6 - 9y \end{cases}$

Haciendo $y = t$, se tiene: $\begin{cases} x = -3 + 5t \\ y = \quad t \\ z = 6 - 9t \end{cases}$ $\to$ Para cada valor de t se tiene una solución.

<u>Observación</u>: Que un sistema sea compatible indeterminado significa que una de las ecuaciones es redundante, que depende linealmente de las otras. En este ejemplo, las incógnitas x y z dependen del valor que se quiera dar a y.

c) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - 2y + z = 0 \\ 3x - y \quad = 2 \end{cases} \xrightarrow{\substack{E2-2E1 \\ E3-3E1}} \begin{cases} x + y - z = 1 \\ -4y + 3z = -2 \\ -4y + 3z = -1 \end{cases} \xrightarrow{E3-E2} \begin{cases} x + y - z = 1 \\ -4y + 3z = -2 \\ 0 = 1 \end{cases}$.

Como 0 = 1 es falso, el sistema propuesto es incompatible.

<u>Observación</u>: Que un sistema sea incompatible indica que sus ecuaciones son contradictorias.

- **Regla de Cramer**

Cuando el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero (matriz inversible), es más cómodo aplicar la regla de Cramer (Suiza, 1704–1752), cuya forma genérica, para sistemas 3 × 3, es:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{matrix} & \begin{matrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{matrix} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}; \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

Ejemplo:

Para el sistema anterior: $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x \quad - z = 1 \\ 3x - y - 2z = 3 \end{cases}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-2-1}{-1} = 3; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{1+3}{-1} = -4; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{1-6}{-1} = 5$$

2. Sistemas lineales en general. Teorema de Rouché (Francia, 1832–1910)

Para un sistema más grande, de m ecuaciones con n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \qquad\qquad ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{m1} \end{pmatrix} \cdot x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ ... \\ a_{m2} \end{pmatrix} \cdot x_2 + ... + \begin{pmatrix} a_{1x} \\ a_{2n} \\ ... \\ a_{mn} \end{pmatrix} \cdot x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix} \quad (*)$$

puede generalizarse cualquiera de los métodos estudiados para sistemas de 3 ecuaciones con 3 incógnitas. No obstante, para su discusión es más eficaz aplicar el **teorema de Rouché,** que dice: *la condición necesaria y suficiente para que un sistema de ecuaciones lineales tenga solución es que el rango de la matriz de coeficientes (A) sea igual al rango de la matriz ampliada (M). Esto es: el sistema es compatible ⇔ rango de A = rango de M.*

Las matrices de coeficientes y ampliada son, respectivamente,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad M = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Ambas matrices suelen escribirse juntas. Así: $A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right) = M$

Discusión:

- Si rango de A = rango de M $= n$ = al número de incógnitas, el sistema es compatible determinado: tiene una única solución.
- Si rango de A = rango de $M = r < n$, el sistema es compatible indeterminado: tiene infinitas soluciones, con $n - r$ grados de libertad. Para resolverlo se prescinde de las ecuaciones sobrantes; además, hay que trasponer $n - r$ incógnitas al lado de los términos independientes. Las soluciones se dan en función de esas incógnitas traspuestas.
- Si rango de A < rango de M, el sistema es incompatible.

Observaciones:

1) Recuérdese que el rango de una matriz es igual al número de filas (o de columnas) linealmente independientes de esa matriz.
2) Las matrices A y M tienen las mismas filas; pero M tiene una columna más que A. En consecuencia, siempre se cumple que $r(A) \le r(M)$.
3) Si hay menos ecuaciones que incógnitas ($m < n$), el sistema será compatible indeterminado o incompatible.
4) Si hay más ecuaciones que incógnitas ($m > n$), al menos habrá $m - n$ ecuaciones sobrantes, que serán combinación lineal de las otras.

Ejemplos:

a) Sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas: $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + 2y + 2z = 3 \\ 4x + y + z = -2 \end{cases}$

Las matrices asociadas son: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) = M$.

Como $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 14 \Rightarrow$ r(A) = 3.

La matriz M tiene sólo 3 filas, luego su rango no puede ser mayor que 3. Por tanto, r(M) = 3.
En consecuencia: r(A) = r(M) = 3 $\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado.
(Su solución se halla por cualquiera de los métodos estudiados. Es: $x = -1$, $y = 2$, $z = 0$).

b) Sistema de 3 ecuaciones con 2 incógnitas: $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$.

Las matrices asociadas son: $A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right) = M$. Como r($A$) = 2 y r($M$) = 3, el sistema es incompatible.

3. Sistemas con uno o dos parámetros

Cuando alguno de los números (coeficientes o términos independientes) que figuran en un sistema no está determinado, se sustituye por una letra llamada parámetro. En estos casos hay que discutir para qué valor o valores del parámetro el sistema tiene solución o no. La discusión se realiza estudiando y comparando los rangos de las matrices de coeficientes, A, y ampliada, M. (Teorema de Rouché).

Ejemplos:
a) Clasificación y resolución en función del parámetro $\lambda \in \mathbf{R}$, del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \lambda x + y - z = 2 \\ 5x + 3y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + \lambda z = 1 \end{cases}$$

→ Las matrices A y M, de coeficientes y ampliada, son: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & \lambda & 1 \end{array}\right) = M$

El determinante de A es:

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = 3\lambda^2 - 6\lambda - 5\lambda + 9 - 1 = 3\lambda^2 - 11\lambda + 8 = (\lambda - 1)(3\lambda - 8)$$

Este determinante vale 0 si $\lambda = 1$ o $\lambda = 8/3$.
Con esto:

- Si $\lambda \neq 1$ y $8/3 \Rightarrow$ r(A) = 3 = r(M). El sistema será compatible determinado. Su solución, si se pide, debe darse en función del parámetro.

Por Cramer se obtiene:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2&1&-1\\0&3&3\\1&2&\lambda\end{vmatrix}}{(\lambda-1)(3\lambda-8)}=\frac{6\lambda-12+6}{(\lambda-1)(3\lambda-8)}=\frac{6(\lambda-6)}{(\lambda-1)(3\lambda-8)}=\frac{6}{3\lambda-8};$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}\lambda&2&-1\\5&0&3\\3&1&\lambda\end{vmatrix}}{(\lambda-1)(3\lambda-8)}=\frac{-3\lambda-2(5\lambda-9)-5}{(\lambda-1)(3\lambda-8)}=\frac{-13(\lambda-1)}{(\lambda-1)(3\lambda-8)}=\frac{-13}{3\lambda-8};$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}\lambda&1&2\\5&3&0\\3&2&1\end{vmatrix}}{(\lambda-1)(3\lambda-8)}=\frac{3\lambda-5+2}{(\lambda-1)(3\lambda-8)}=\frac{3(\lambda-1)}{(\lambda-1)(3\lambda-8)}=\frac{3}{3\lambda-8}$$

Observación: La discusión del sistema también podría hacerse a partir de estas soluciones:

$$x=\frac{6(\lambda-6)}{(\lambda-1)(3\lambda-8)}=\frac{6}{3\lambda-8};\ y=\frac{-13(\lambda-1)}{(\lambda-1)(3\lambda-8)}=\frac{-13}{3\lambda-8};\ z=\frac{3(\lambda-1)}{(\lambda-1)(3\lambda-8)}=\frac{3}{3\lambda-8}$$

Como el denominador, que es $|A|=(\lambda-1)(3\lambda-8)$, se anula cuando λ = 1 o λ = 8/3, se concluye:

- Si λ ≠ 1 y 8/3, los valores de *x*, *y*, *z* pueden hallarse y son únicos en cada caso. El sistema es compatible determinado.
- Si λ = 8/3 las soluciones no está definidas: el sistema será incompatible.
- Si λ = 1, aunque tampoco están definidas, al poder simplificar las tres incógnitas por el factor λ – 1, se advierte que para λ = 1 se puede seguir trabajando. En efecto, sustituyendo en las ecuaciones λ por el valor 1 se descubre que las ecuaciones son linealmente dependientes, y el sistema compatible indeterminado. Así se confirmará a continuación.

- Si λ = 1, se tiene $A=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&2\\5&3&3&0\\3&2&1&1\end{array}\right)=M$

El rango de *A* es 2. (Basta con observar que hay un menor de orden 2 distinto de 0.)

Para ver el rango de *M* se calcula: $|M_1|=\begin{vmatrix}1&-1&2\\3&3&0\\2&1&1\end{vmatrix}=0$. Por tanto, el rango de *M* también vale 2.

Observación: No es necesario calcular más menores de *M*, pues si el rango de *A* vale 2 las columnas son dependientes y puede quitarse una de ellas, por ejemplo *C*1; queda así un único menor de *M*: M_1. (Si dos de las columnas fuesen proporcionales, habría que prescindir, necesariamente, de una de ellas para calcular al rango de *M*).

En definitiva, si λ = 1, el sistema es compatible indeterminado.

Sustituyendo ese valor (λ = 1) en el sistema inicial, queda: $\begin{cases} x+y-z=2 \\ 5x+3y+3z=0 \\ 3x+2y+z=1 \end{cases}$.

(Como r(A) = r(M) = 2, sobra cualquiera de las ecuaciones, por ejemplo la tercera, $E3$. Aunque no hace falta comprobar nada más, puede verse que $2E3-E2=E1$, luego podría suprimirse cualquiera de las ecuaciones).

Así pues, el sistema es equivalente a $\begin{cases} x+y-z=2 \\ 5x+3y+3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2+z \\ 5x+3y=-3z \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{matrix} 3E1-E2 \\ \\ \end{matrix} \begin{cases} -2x=6+6z \\ 5x+3y=-3z \end{cases} \to \begin{matrix} x=-3-3z \\ y=5+4z \end{matrix} \quad \text{Haciendo } z=t\text{:} \begin{cases} x=-3-3t \\ y=5+4t \\ z=t \end{cases}$$

- Si λ = 8/3, se tiene $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 8/3 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 8/3 & 1 \end{array}\right)=M$

El rango de A es 2.

Para ver el rango de M se calcula: $|M_2|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 8/3 & 1 \end{vmatrix}=10$.

Por tanto, el rango de M vale 3.
Luego, si λ = 8/3 el sistema es incompatible.

c) <u>Sistema con dos parámetros</u>.
Discusión, en función de los valores de a y b, del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x-3y-4z=3 \\ ax+3y-az=0 \\ x+3ay-10z=b \end{cases}$$

→ Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -4 & 3 \\ a & 3 & -a & 0 \\ 1 & 3a & -10 & b \end{array}\right)=M \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ a & 3 & -a \\ 1 & 3a & -10 \end{vmatrix}=-9(a+1)(a+2)\text{, luego:}$$

- Si $a \neq -1$ y $-2 \Rightarrow$ r(A) = 3 = r(M), independientemente del valor de b. El sistema será compatible determinado.

La solución, que se puede hallar aplicando la regla de Cramer, quedará en función de a y b.

- Si $a=-1$, se tiene $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -10 & b \end{array}\right)=M$.

El rango de A es 2, pues el menor $\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=-3 \neq 0$.

Rango de M: El menor $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -10 & b \end{vmatrix} = 27 - 3b$, que valdrá 0 cuando $b = 9$.

Por tanto:

- si $a = -1$ y $b \neq 9$, el sistema será incompatible: r(A) = 2 y r(M) = 3.
- si $a = -1$ y $b = 9$, el sistema será compatible indeterminado: r(A) = 2 = r(M).

- Si $a = -2$, se tiene $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -4 & 3 \\ -2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & -6 & -10 & b \end{array}\right) = M$.

El rango de A es 2, pues el menor $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$.

Rango de M: El menor $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -10 & b \end{vmatrix} = 54 - 6b$, que valdrá 0 cuando $b = 9$.

Por tanto:

- si $a = -2$ y $b \neq 9$, el sistema será incompatible: r(A) = 2 y r(M) = 3.
- si $a = -2$ y $b = 9$, el sistema será compatible indeterminado: r(A) = 2 = r(M).

<u>Resumiendo:</u>

- Si $a \neq -1$ y $-2 \Rightarrow$ r(A) = 3 = r(M), independientemente del valor de b.
- Si $a = -1$ o $a = -2$ y $b \neq 9$ el sistema será incompatible: r(A) = 2 y r(M) = 3.
- si $a = -1$ o -2 y $b = 9$ el sistema será compatible indeterminado: r(A) = 2 = r(M).

4. Sistemas homogéneos

4.1. Definiciones

Un sistema de ecuaciones lineales se llama homogéneo cuando el término independiente de cada una de las ecuaciones es 0. Por tanto, son de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

- Estos sistemas siempre son compatibles, pues los valores $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ..., $x_n = 0$ son una solución del sistema; esa es la llamada **solución trivial**. También es evidente que la matriz M es la ampliación de A con una columna de ceros, lo cual no afecta al rango; luego r(A) = r(M).
- Si r(A) = n = número de incógnita, el sistema es compatible determinado. Su única solución es la trivial.
- Si r(A) < n, el sistema será compatible indeterminado. El sistema homogéneo tendrá infinitas soluciones. En el caso de que tenga el mismo número de ecuaciones que de incógnitas deberá cumplirse que $|A| = 0$.

Ejemplos:

a) El sistema $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ -3x + y \quad = 0 \end{cases}$ sólo tiene la solución trivial, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, pues el determinante de la matriz de coeficientes, $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$.

b) El sistema $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + 7z = 0 \end{cases}$ es compatible indeterminado, pues el determinante de la matriz de coeficientes, $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ r(A) = 2 < el número de incógnitas.

El sistema es equivalente a $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = z \\ x + y = -2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3t \\ y = -5t \\ z = t \end{cases}$.

Algunas soluciones de este sistema son: (0, 0, 0), (3, −5, 1), (−3, 5, −1), ...; naturalmente siempre está la solución (0, 0, 0).

c) El sistema $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$ es compatible indeterminado.

Compatible porque es homogéneo; indeterminado porque tiene menos ecuaciones que incógnitas. (Su solución es: $x = t$, $y = t$, $z = 0$).

4.2. Discusión de un sistema homogéneo con un parámetro
Como se ha dicho anteriormente, los sistemas homogéneos siempre tienen solución. Por tanto, la discusión de estos sistemas consiste en determinar cuando tienen sólo la solución trivial y cuando tienen infinitas soluciones.

Ejemplos:

a) Discusión, según los valores del parámetro a, del sistema: $\begin{cases} x+2z=0 \\ 3y+z=0 \\ ax+z=0 \end{cases}$

→ Resulta obvio que el sistema es homogéneo. La matriz de coeficientes,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 3(1-2a)=0 \text{ si } a = 1/2$$

Por tanto:

- Si $a \neq 1/2$, $r(A) = 3$, sistema compatible determinado. La única solución es la trivial: $x = 0, y = 0, z = 0$
- Si $a = 1/2$, $r(A) = 2$. El sistema es compatible indeterminado, equivalente a

$$\begin{cases} x+2z=0 \\ 3y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2z \\ z=-3y \end{cases}, \text{ cuya solución puede darse como: } \begin{cases} x=6t \\ y=t \\ z=-3t \end{cases}$$

b) Discusión y resolución, dependiendo de los valores de λ, del sistema $\begin{cases} (2-\lambda)x+y \qquad =0 \\ \quad (-1-\lambda)y+z=0 \\ \quad 4y+(2-\lambda)z=0 \end{cases}$.

→ El determinante de la matriz de coeficientes es:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda+2) \Rightarrow \text{Se anula si } \lambda = -2,\ \lambda = 2 \text{ o } \lambda = 3.$$

Por tanto:

- Si $\lambda \neq -2$, 2 y 3, el rango de A es 3 y el sistema compatible determinado. Su solución es la trivial: $x = 0, y = 0, z = 0$.
- Si $\lambda = -2$, el sistema queda $\begin{cases} -4x+y=0 \\ y+z=0 \\ 4y+4z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x+y=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=4t \\ z=-4t \end{cases}$.
- Si $\lambda = 2$, el sistema queda $\begin{cases} y=0 \\ -3y+z=0 \\ 4z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$.

(Como nada se dice de x, esta queda indeterminada).

- Si $\lambda = 3$, el sistema queda $\begin{cases} -x+y=0 \\ -4y+z=0 \\ 4y-z=0 \end{cases} \Rightarrow$ La solución del sistema es $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=4t \end{cases}$.

5. Problemas de sistemas

Como en cualquier problema, en los que dan lugar a un sistema de ecuaciones, el proceso a seguir puede ser:
1) Leerlo despacio y entenderlo.
2) Definir las incógnitas.
3) Descubrir los datos y las relaciones algebraicas entre las incógnitas y los datos: escribir las ecuaciones.
4) Expresar esas ecuaciones en la forma estándar y discutir y resolver el sistema obtenido.

A continuación se proponen tres problemas aparentemente fáciles (y así son). Se sugiere al lector interesado que los procure resolver por su cuenta, que no se contente con estudiarlos y entenderlos, pues eso resulta demasiado fácil.

Problema 1. Helados. (Propuesto en Selectividad en 2011, Cantabria)
Una heladería vende helados de una, dos y tres bolas a uno, dos y tres euros respectivamente. El viernes ha vendido 157 helados obteniendo 278 euros y sabemos que el número de helados de una bola vendidos es k veces el número de helados de tres bolas.
a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales cuya resolución permita averiguar cuántos helados de cada tipo se han vendido.
b) Estudia para qué valores del parámetro k el sistema tiene solución. ¿Es posible que se hayan vendido el mismo número de helados de una bola que de tres bolas?
c) Para $k = 3$, calcula cuántos helados de cada tipo se han vendido.
Solución:
a) Sean x, y, z el número de helados vendidos de una, dos y tres bolas, respectivamente. De acuerdo con los datos del problema debe cumplirse:

$$\begin{cases} x+y+z=157 & \textit{cantidad} \\ x+2y+3z=278 \to & \textit{ingresos} \\ x=kz & \textit{relación} \end{cases}$$

Por tanto, queda: $\begin{cases} x+y+z=157 \\ x+2y+3z=278 \\ x-kz=0 \end{cases}$.

b) Para que el sistema tenga solución es necesario que el rango de la matriz de coeficientes sea igual al rango de la matriz ampliada, r(A) = r(M), siendo:

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 157 \\ 1 & 2 & 3 & 278 \\ 1 & 0 & -k & 0 \end{array}\right)=M$$ $\to$ El determinante de A vale: $|A| = -2k-k+3-2=-k+1$.

Con esto:
- Si $k \neq 1$, el determinante es distinto de 0 y el rango de A será 3. En este caso, el sistema tendrá solución única; dependiendo en cada caso del valor de k.
- Si $k = 1$, se tendrá: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 157 \\ 1 & 2 & 3 & 278 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)=M$.

En este caso, el rango de A es 2; pero el de M es 3, pues el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 157 \\ 2 & 3 & 278 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -36 \neq 0$. En este caso, el sistema no tendrá solución.
Por tanto, no pueden venderse el mismo número de helados de una y de tres bolas.

c) Para k = 3, el sistema es compatible determinado. Puede resolverse por Gauss.

$$\begin{cases} x+y+z=157 \\ x+2y+3z=278 \\ x-3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} E1-E3 \\ E2-E3 \\ \end{matrix} \begin{cases} y+4z=157 \\ 2y+6z=278 \\ x-3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow E2-2E1 \begin{cases} y+4z=157 \\ -2z=-36 \\ x-3z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=54 \\ y=85 \\ z=18 \end{cases}.$$

Observación:
La solución dada más arriba es correcta y no cabe exigir más en un examen de Selectividad. No obstante, la naturaleza del problema exige que las soluciones sean enteras y positivas: los helados se venden por unidades, por bolas enteras. Esto debería poner en guardia al lector interesado. ¿El sistema tendría solución coherente si k = 0,6, por ejemplo? En concreto, si se resuelve el sistema para k = 0, que teóricamente es compatible, da una solución negativa para z, lo que es absurdo. Una forma de superar esta dificultad sería hallar la solución del sistema en función de k y discutirla exigiendo que todas las sean números naturales.
Se obtiene: $x=\dfrac{36k}{k-1}$; $y=\dfrac{193-121k}{k-1}$; $z=\dfrac{36}{k-1}$.
Para que $z=\dfrac{36}{k-1}$ sea un número natural k sólo puede tomar los valores 2, 3, 4, 5, 7, 10, 13, 19 y 37. (¿Valdrán todos?).

Problema 2. Edades.
Halla las edades actuales de una madre y sus dos hijos sabiendo que hace 9 años la edad de la madre era 4 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento, que dentro de 18 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.
Solución:
En la siguiente tabla se resumen los datos y las relaciones existentes:

Edades	Madre	Hijo 1º	Hijo 2º	Relación de edades
Actualmente	x	y	z	
Hace 9 años	$x-9$	$y-9$	$z-9$	$x-9=4(y-9+z-9)$
Dentro de 18 años	$x+18$	$y+18$	$z+18$	$x+18=y+18+z+18$
Dentro de $x-y$ (*)		x	$z+x-y$	$z+x-y=42$

(*) Puede observarse que el hijo mayor, que tiene y años, tendrá la edad de la madre (x años) dentro de $x-y$ años.
Se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} x-4y-4z=-63 \\ x-y-z=18 \\ x-y+z=42 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E1-E2 \\ \\ E3-E2 \end{matrix} \begin{cases} -3y-3z=-81 \\ x-y-z=18 \\ 2z=24 \end{cases} \Rightarrow E1:(-3) \begin{cases} y+z=27 \to y=15 \\ x-y-z=18 \\ z=12 \end{cases}$$

Luego: z = 12; y = 15; x = 45.
La madre tiene 45 años; los hijos, 15 el mayor y 12 el menor.

Problema 3. Mezclas. (Propuesto en Selectividad en 1998, Canarias)
Se mezclan tres clases de vino de la siguiente manera:
a) 5 litros de Tenerife, 6 de La Palma y 3 de Lanzarote, resultando una mezcla de 120 pesetas/litro.
b) 1 litros de Tenerife, 3 de La Palma y 6 de Lanzarote, dando un vino de 111 pesetas/litro.
c) 3 litros de Tenerife, 6 de La Palma y 6 de Lanzarote, dando un vino de 116 pesetas/litro.
Halla el precio por litro de cada clase de vino.
<u>Solución</u>:
Sean x, y, z el precio del litro de vino de Tenerife, La Palma y Lanzarote, respectivamente.
Con los datos dados, se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} 5x+6y+3z=120\cdot 14 \\ x+3y+6z=111\cdot 10 \\ 3x+6y+6z=116\cdot 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x+6y+3z=1680 \\ x+3y+6z=1110 \\ 3x+6y+6z=1740 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2-2E1 \\ E3-2E1 \end{matrix} \begin{cases} 5x+6y+3z=1680 \\ -9x-9y=-2250 \\ -7x-6y=-1620 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 9E3-7E2 \end{matrix} \begin{cases} 5x+6y+3z=1680 \\ -9x-9y=-2250 \\ 9y=1170 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \to\to z=100 \\ \to x=120 \\ y=130 \end{cases}$$

Los precios de los vinos son: Tenerife, 120 pta/l; La Palma, 130 pta/l; Lanzarote, 100 pta/l.

<u>Observación</u>: Un altísimo porcentaje de estudiantes escribe mal las ecuaciones. Se "olvida" de multiplicar por el número total de litros: por 14, por 10 y por 15, respectivamente.

Problema 4. Números. (Propuesto en Selectividad en 2000, Andalucía)
Dado un número de tres cifras ABC, se sabe que la suma de sus cifras es 16. Por otra parte, si permutamos las centenas con las unidades, obtenemos el número inicial incrementado en 198. Si en el número inicial permutamos decenas con unidades, obtenemos el inicial disminuido en 27. Plantea el sistema de ecuaciones lineales que conduzca a la obtención de las cifras del citado número
<u>Solución</u>:
En número $ABC = A$ centenas + B decenas + C unidades = $100A + 10B + \text{C}$
Se sabe que la suma de sus cifras es 16: $A + B + C = 16$
Si se permutan las centenas con las unidades: $ABC \to CBA$: el número se incrementa el 198.
Se cumple: $CBA = ABC + 198$.
Luego, $100C + 10B + A = 100A + 10B + C + 198 \Rightarrow 99C - 99A = 198 \Leftrightarrow C - A = 2$
Si se permutan las decenas con las unidades: $ABC \to ACB$: el número disminuye en 27.
Se cumple: $ACB = ABC - 27$.
Por tanto, $100A + 10C + B = 100A + 10B + C - 27 \Rightarrow 9C - 9B = -27 \Leftrightarrow C - B = -3$
Se tiene el sistema:

$$\begin{cases} A+B+C=16 \\ 99C-99A=198 \\ 9C-9B=-27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B+C=16 \\ C-A=2 \\ C-B=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B+C=16 \\ A=C-2 \\ B=C+3 \end{cases}$$

Sustituyendo en los valores de A y B en la primera ecuación se tiene:
$C-2+C+3+C=16 \Rightarrow 3C=15 \Rightarrow C=5;\ A=3;\ B=8$
El número dado es el 385.