APLICACIONES DE LA DERIVADA

1.- Extremos de una función.

1.1 DEFINICIÓN:

Sea f una función y A un subconjunto del dominio de f. Si existe un número c en A tal que $f(x) \leq f(c), \quad \forall x \in A$*, se dice que* ***f tiene en c el máximo absoluto sobre A.***

Análogamente, si existe un número b en A tal que $f(x) \geq f(b), \quad \forall x \in A$*, se dice que* ***f tiene en b el mínimo absoluto sobre A.***

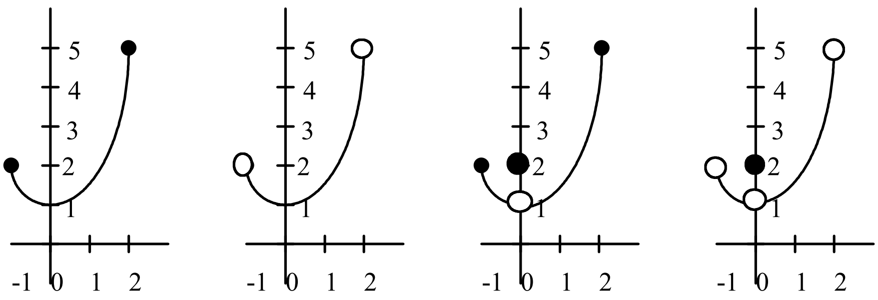
EJEMPLOS:

1. Si consideramos la función $f(x) = x^2 + 1$ en el conjunto A = [-1,2], se observa por su gráfica que presenta un máximo absoluto en $x = 2$, y, un mínimo absoluto en $x = 0$. *(gráfica 1)*

2. La función $f(x) = x^2 + 1$ en el conjunto A = (-1,2) tiene un mínimo absoluto en $x = 0$, pero no posee máximo absoluto. *(gráfica 2)*

3. La función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & si \quad x \neq 0 \\ 2, & si \quad x = 0 \end{cases}$ en el conjunto A = [-1,2] posee un máximo absoluto en $x = 2$ y no tiene mínimo absoluto. *(gráfica 3)*

4. La función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & si \quad x \neq 0 \\ 2, & si \quad x = 0 \end{cases}$ en el conjunto A = (-1,2) no tiene máximo ni mínimo absoluto. *(gráfica 4)*



Gráfica 1 ***Gráfica 2*** ***Gráfica 3*** ***Gráfica 4***

1.2 TEOREMA:

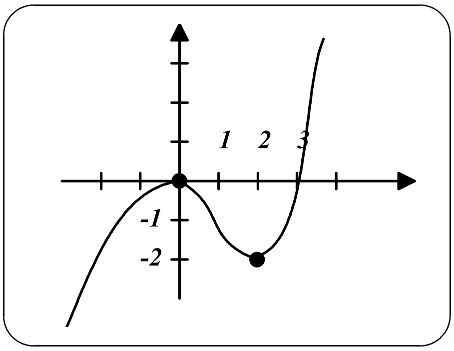
Sea f una función definida sobre (a,b). Si x_o *es un máximo absoluto (o mínimo absoluto) para f sobre (a,b), y f es derivable en* x_o*, entonces* $f'(x_o) = 0$.

☐ *1.3 DEFINICIÓN:*

*Sea f una función, y A un conjunto de números contenido en el dominio de f. Un punto a de A es un **máximo relativo** de f sobre A si existe algún* $\delta > 0$ *tal que a es un máximo absoluto de f sobre* $A \cap (a-\delta, a+\delta)$, *es decir,* $f(a) \geq f(x) \quad \forall x \in A \cap (a-\delta, a+\delta)$.

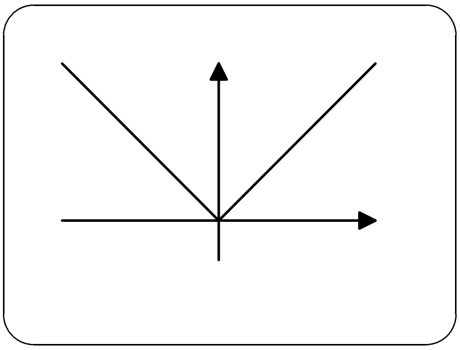
*Análogamente, diremos que un punto b de A es un **mínimo relativo** de f sobre A si existe algún* $\delta>0$ *tal que b es un mínimo absoluto de f sobre* $A \cap (b-\delta, b+\delta)$, *es decir,* $f(b) \leq f(x) \quad \forall x \in A \cap (b-\delta, b+\delta)$.

☐ *EJEMPLOS:*



1. La función $f(x) = \frac{1}{2}(x^3 - 3x^2)$, representada en la figura de la izquierda, presenta en (0,0) un máximo relativo y en (2,-2) un mínimo relativo. Observa que al estar la función definida en el conjunto de los números reales, no alcanza el máximo absoluto ni el mínimo absoluto.

Calculando la función derivada de f(x) obtenemos $f'(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 6x)$, por lo que $f'(0) = 0$ *y* $f'(2) = 0$. Esto significa que las rectas tangentes a la gráfica de f(x) en (2,-2) y (0,0) tienen pendiente 0 y por lo tanto son paralelas al eje de abscisas.



2. La función $f(x) = |x|$ presenta un mínimo relativo en (0,0). En este caso la función no es derivable en x = 0 puesto que los límites laterales siguientes

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = -1$$ y

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = 1$$ son distintos.

☐ *1.4 TEOREMA:*

Si f está definida en (a,b) y tiene un máximo (o mínimo) relativo en $x_o \in (a,b)$, *y f es derivable en* x_o, *entonces* $f'(x_o) = 0$.

Observación: El recíproco del teorema anterior *no* es cierto; la condición $f'(x) = 0$ *no* implica que *x* sea un punto máximo o mínimo relativo de *f*. Precisamente por esta razón, se ha adoptado una terminología especial para describir números *x* que satisfacen la condición $f'(x) = 0$.

☐ *1.5 DEFINICIÓN:*

Si f está definida en c, se dirá que c es un ***punto crítico*** *de f si f'(c) = 0 o si f' no está definida en c.*

☐ *EJEMPLO:*

1. La función $f(x) = x^3$, ¿posee extremos relativos?

Sabemos que f es derivable en su dominio, es decir, R, y su función derivada es $f'(x) = 3x^2$. Determinamos los puntos críticos resolviendo la ecuación: $f'(x) = 3x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$ Para saber si el punto de abscisa $x=0$ es un extremo relativo, estudiaremos la función en un entorno de ese punto: $I = (0-\delta, 0+\delta) = (-\delta, +\delta)$, siendo $\delta > 0$.

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ Si \quad x \in (-\delta, 0) \quad \Rightarrow \quad x < 0 \quad y \quad f(x) = x^3 < 0 \\ Si \quad x \in (0, +\delta) \quad \Rightarrow \quad x > 0 \quad y \quad f(x) = x^3 > 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, $f(0) \not\geq f(x) \quad \forall x \in I \quad y \quad f(0) \not\leq f(x) \quad \forall x \in I \quad \Rightarrow \quad x=0$ no es extremo relativo.

2.- Monotonía de una función.

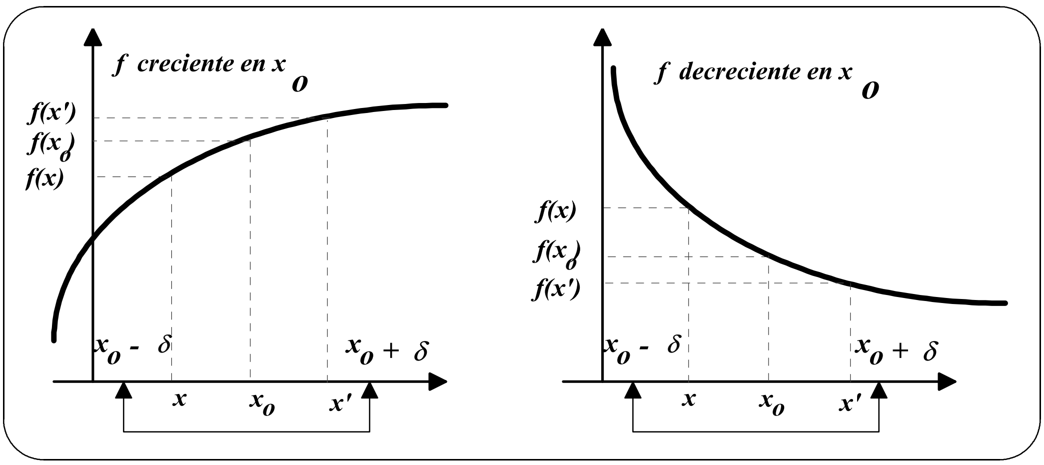
☐ *2.1 DEFINICIÓN:*

1. *Sea f(x) una función definida en (a,b) y* $x_o \in (a,b)$. *Diremos que* ***f es creciente en*** $\boldsymbol{x_o}$ *si existe un entorno de xo,* $I = (x_o - \delta, x_o + \delta) \subset (a,b)$ *tal que:*

$$\begin{gathered} Si \quad x_o - \delta < x < x_o, \quad entonces \quad f(x) < f(x_o) \quad y \\ si \quad x_o < x < x_o + \delta, \quad entonces \quad f(x_o) < f(x) \end{gathered}$$

2. *De forma análoga se dice que* ***f es decreciente en*** $\boldsymbol{x_0}$ *si existe un entorno de xo, I, tal que:*

$$\begin{gathered} Si \quad x_o - \delta < x < x_o, \quad entonces \quad f(x) > f(x_o) \quad y \\ si \quad x_o < x < x_o + \delta, \quad entonces \quad f(x_o) > f(x) \end{gathered}$$



☐ *2.2 DEFINICIÓN:*

Se dice que una función es ***creciente*** *(o* ***decreciente****) sobre un intervalo I si lo es en cada uno de los puntos de dicho intervalo, es decir,* $\forall a, b \in I$ *con* $a < b$ *entonces* $f(a) < f(b)$ $\quad (o \quad f(a) > f(b))$.

☐ *2.3 TEOREMA:*

Sea f una función derivable en el intervalo (a,b).

1. *Si f'(x) > 0 para todo x de (a,b), entonces f es creciente en (a,b).*

2. *Si f'(x) < 0 para todo x de (a,b), entonces f es decreciente en (a,b).*

3. *Si f'(x) = 0 para todo x de (a,b), entonces f es constante en (a,b).*

➢ 2.4 Determinación de los intervalos de monotonía de una función.

Para ver como aplicar el teorema anterior, notemos que para *f* continuas, *f'(x)* sólo cambia de signo en los puntos críticos, luego para determinar los intervalos en que *f* es creciente o decreciente, sugerimos los siguientes pasos:

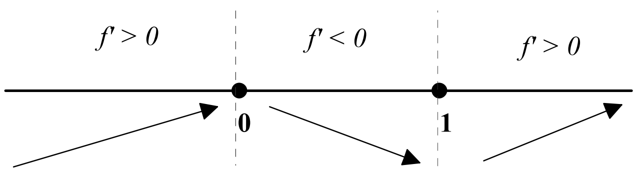
1. Localizar los puntos críticos de *f.*
2. Determinar el signo de *f'(x)* en un punto de cada intervalo determinado por dos puntos críticos consecutivos.
3. Decidir, mediante el *Teorema 2.3*, si *f* es creciente o decreciente en cada uno de esos intervalos.

☐ *EJEMPLOS:*

1. Determinaremos los intervalos en que $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$ es creciente o decreciente. Comenzaremos igualando *f'(x)* a cero. $f'(x) = 3x^2 - 3x = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x(x-1) = 0$, de dónde se deduce que dos puntos críticos son: $x = 0, \quad x = 1$.

Como *f'* está definida en todos los números reales, pasamos a estudiar el signo de *f'* en los intervalos determinados por x = 0 y x = 1.

Intervalo	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < \infty$
Valor prueba	$x = -1$	$x = 1/2$	$x = 2$
Signo de *f'(x)*	$f'(-1) = 6 > 0$	$f'(1/2) = -3/4 < 0$	$f'(2) = 6 > 0$
Conclusión	*f* creciente	*f* decreciente	*f* creciente



2. Hallaremos los intervalos de monotonía de la función $f(x) = (x^2 - 4)^{\frac{2}{3}}$.

Para ello determinamos $f'(x) = \frac{4x}{3(x^2-4)^{\frac{1}{3}}}$. Como *f'(x)* es cero en *x = 0* y *f'* no está definida en *x=2* y, en *x = -2,* los intervalos en los que estudiaremos el signo de la derivada están determinados por ellos.

Intervalo	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x < \infty$
Valor prueba	$x = -3$	$x = -1$	$x = 1$	$x = 3$
Signo de *f'(x)*	$f'(-3) < 0$	$f'(-1) > 0$	$f'(1) < 0$	$f'(3) > 0$
Conclusión	*f* decreciente	*f* creciente	*f* decreciente	*f* creciente

3. Hallaremos los intervalos de monotonía de la función $f(x) = \frac{x^4+1}{x^2}$.

$f'(x) = \frac{4x^3.x^2-2x.(x^4+1)}{x^4} = \frac{2x^5-2x}{x^4} = \frac{2(x^4-1)}{x^3}$. La función derivada es cero en los puntos que anulen el numerador, por tanto, resolviendo la ecuación:

$$2.(x^4-1)=0 \quad \Rightarrow \quad 2.(x^2-1).(x^2+1)=0 \quad \Rightarrow \quad x=\pm 1.$$

Además, la función *f(x)* presenta un punto de discontinuidad en $x = 0$ y por lo tanto no será derivable en dicho punto.

Utilizamos los puntos $\pm 1 \quad y \quad 0$ para determinar los intervalos prueba:

Intervalo	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < \infty$
Valor prueba	$x = -2$	$x = -1/2$	$x = 1/2$	$x = 2$
Signo de *f'(x)*	$f'(-2) < 0$	$f'(-1/2) > 0$	$f'(1/2) < 0$	$f'(2) > 0$
Conclusión	*f* decreciente	*f* creciente	*f* decreciente	*f* creciente

4. Hallaremos los intervalos de monotonía de la función: $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2; \quad luego \quad f'(x) = 0 = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad x = 0$ es un punto crítico. La función derivada está definida en el conjunto de los números reales.

Aunque *f'* es cero en *x = 0*, es positiva en todos los demás *x*:

$$f'(x) = 3x^2 > 0, \quad \forall x \neq 0$$

Luego *f* es creciente en su dominio.

3.- Criterio de la primera derivada para la determinación de los extremos relativos de una función.

Una vez determinados los intervalos en que *f* es creciente o decreciente, es fácil localizar sus extremos relativos. El procedimiento se explica a continuación.

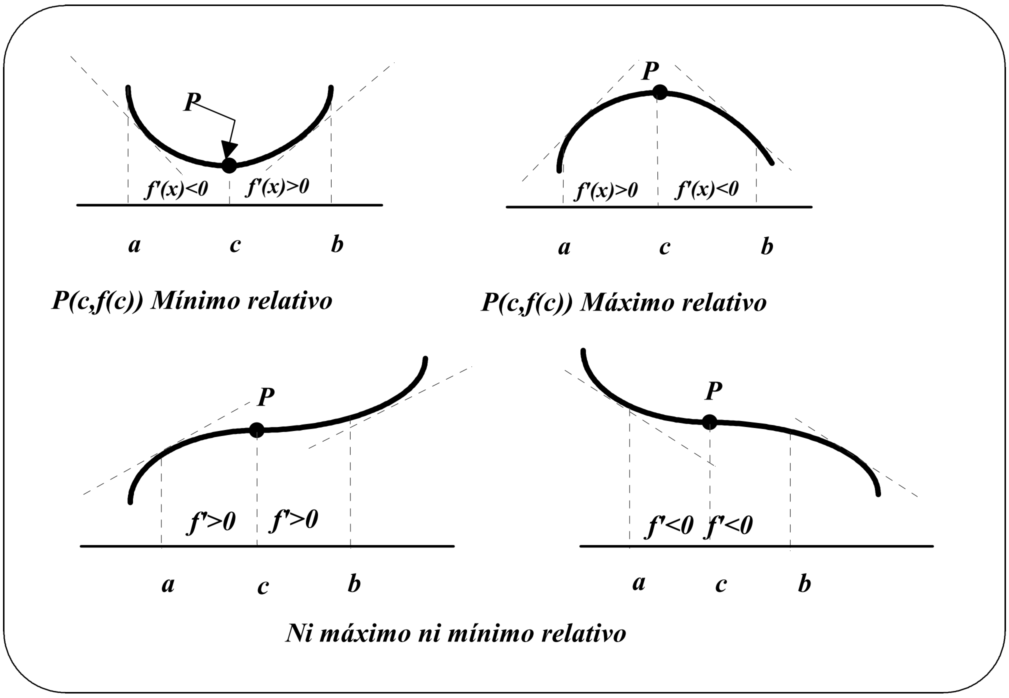
☐ *3.1 TEOREMA: CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA*

Sea c un punto crítico de una función f continua en un intervalo abierto I que contiene a c. Si f es, derivable en I, excepto a lo sumo en c, el punto (c, f(c)) puede clasificarse como sigue:

1. *S f' cambia de negativa a positiva en c, (c,f(c)) es un* ***mínimo relativo*** *de f.*

2. *Si f' cambia de positiva a negativa en c, (c,f(c)) es un* ***máximo relativo*** *de f.*

3. *Si f' no cambia su signo en c, (c,f(c)) no es extremo relativo de f.*



Ejercicios

En los ejercicios siguientes, identificar los intervalos en los que cada función es creciente o decreciente, y localizar los extremos relativos.

$$(1)\quad f(x)=x^2-6x+8;\quad (2)\quad f(x)=\tfrac{1}{x^2};\quad (3)\quad f(x)=\tfrac{x^2}{x+1}$$

$$(4)\quad f(x)=x^2-6x;\quad (5)\quad f(x)=2x^3+3x^2-12x;\quad (6)\quad f(x)=x^4-2x^3$$

$$(7)\quad f(x)=x^{\frac{1}{3}}+1;\quad (8)\quad f(x)=x+\tfrac{1}{x};\quad (9)\quad f(x)=\tfrac{x^2}{x^2-9}$$

$$(10)\quad f(x)=(x-1)^2.(x+2);\quad (11)\quad f(x)=(x-1)^{\frac{2}{3}};\quad (12)\quad f(x)=\tfrac{x}{x+1}$$

13. *La concentración C de un fármaco en la sangre t horas después de ser inyectado por vía muscular viene dada por* $C=\frac{3t}{27+t^3}$ *. ¿Cuándo es máxima?*

14. *Un autoservicio vende x hamburguesas con un beneficio P dado por*

$$P = 2'44x - \tfrac{x^2}{20.000} - 5.000, \quad 0 \le x \le 35.000$$

Hallar los intervalos en que P crece o decrece.

En muchos problemas prácticos *se busca determinar cuándo el ritmo de cambio de una cantidad dada es máximo o mínimo*. Por ejemplo, el propietario de una fábrica puede querer determinar cuándo un empleado está trabajando con máxima eficiencia, esto es, cuándo el ritmo de producción del empleado es máximo. Un ingeniero de tráfico puede querer encontrar cuándo se mueve más lentamente el tráfico en una carretera de varios carriles. Un economista puede querer predecir cuándo crecerá el ritmo de inflación.

Para hallar cuando es máximo o mínimo el ritmo de cambio de una función, tomaremos en primer lugar la derivada de la función para obtener una expresión de su ritmo de cambio. Entonces calcularemos su máximo o mínimo relativo por el criterio 3.1, anteriormente señalado. Para hacer esto, debemos derivar de nuevo y trabajar con la derivada de la derivada de la función original. Esta derivada de la derivada se conoce como **segunda derivada** de la función.

□ ***3.2 DEFINICIÓN:***

La segunda derivada de f es la derivada de su derivada f' y se representa por f''.

□ ***EJEMPLOS:***

1. Calcula la segunda derivada de la función $f(x) = 5x^4 - 3x^2 - 3x + 7$.

Determinamos primero $f'(x) = 20x^3 - 6x - 3$ y derivando de nuevo obtenemos:

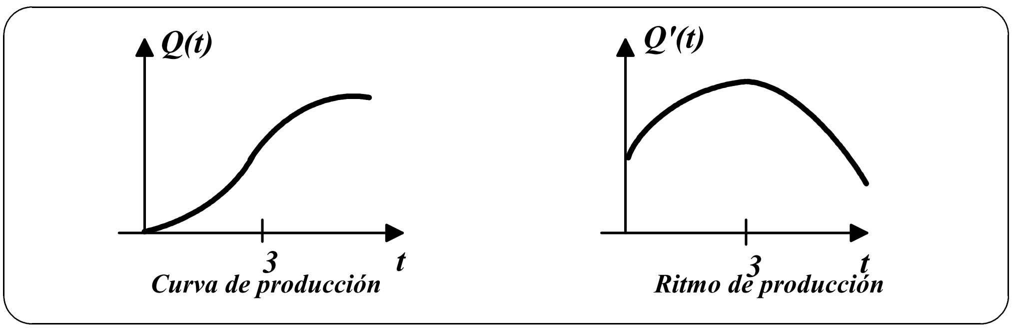
$$f''(x) = 60x^2 - 6.$$

2. Un estudio de productividad del turno matinal en una fábrica indica que un trabajador medio que llega al trabajo a las 8:00 A.M. habrá producido $Q(t) = -t^3 + 9t^2 + 12t$ unidades *t* horas después. ¿En qué momento de la mañana el trabajador está operando más eficientemente?

SOLUCIÓN: El ritmo de producción del trabajador es la derivada

$$Q'(t) = -3t^2 + 18t + 12$$

Suponiendo que el turno matinal va de 8:00 A.M. hasta mediodía, el objetivo es maximizar la función $Q'(t)$ en el intervalo $0 \le t \le 4$.



La derivada de *Q'(t)* es $Q''(t) = -6t + 18$ que es 0 cuando $t = 3$. Al ser *Q'(t)* una función cuadrática con el coeficiente de mayor grado negativo, sabemos que su gráfica es una parábola que presenta en el vértice un máximo relativo. La abscisa del vértice es, precisamente, $t = 3$.

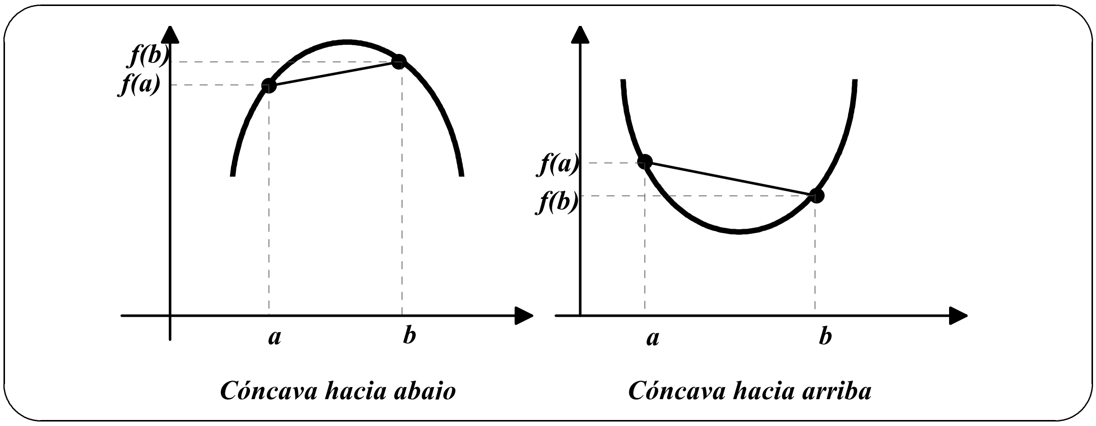
Podemos concluir que el ritmo de producción será el mayor y el trabajador estará operando con mayor eficiencia cuando han transcurrido 3 horas desde la 8:00 A.M., es decir, a las 11:00 A.M.

4.- Intervalos de concavidad.

Ya hemos visto que la localización de los intervalos en que *f* crece o decrece es útil para hallar su gráfica. Veremos a continuación que, localizando los intervalos en que *f'* crece o decrece, podemos determinar dónde *se curva hacia arriba o hacia abajo* la gráfica de *f*. La noción en juego es la **concavidad.**

□ *4.1 DEFINICIÓN:*

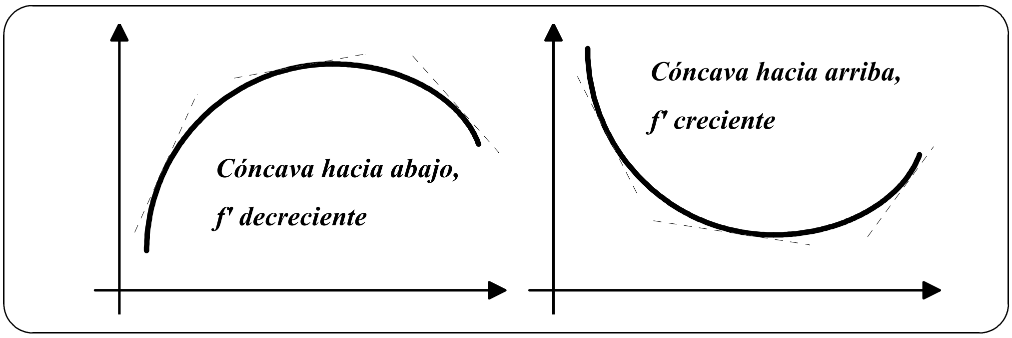
Se dice que la gráfica de una función f es ***cóncava hacia arriba*** *en un intervalo, si para todo a y b de ese intervalo, el segmento rectilíneo que une (a,f(a)) con (b,f(b)) queda por encima de la gráfica y* ***cóncava hacia abajo*** *si el segmento queda por debajo.*



Una definición equivalente a la anterior para funciones derivables es la siguiente:

□ *4.2 DEFINICIÓN:*

Sea f derivable en un intervalo abierto. Diremos que la gráfica de f es ***cóncava hacia arriba*** *si f' es creciente en ese intervalo y* ***cóncava hacia abajo*** *si f' es decreciente en el intervalo.*



De la figura anterior podemos obtener la siguiente interpretación gráfica de la concavidad.

1. Si una curva está *por encima* de sus rectas tangentes, es cóncava hacia arriba.
2. Si una curva está *por debajo* de sus rectas tangentes, es cóncava hacia abajo.

Para determinar la concavidad sin ver la gráfica de *f*, podemos usar la segunda derivada para saber dónde crece o decrece *f'* (igual que usábamos la primera derivada para saber dónde crecía o decrecía *f*).

□ ***4.3 TEOREMA:***

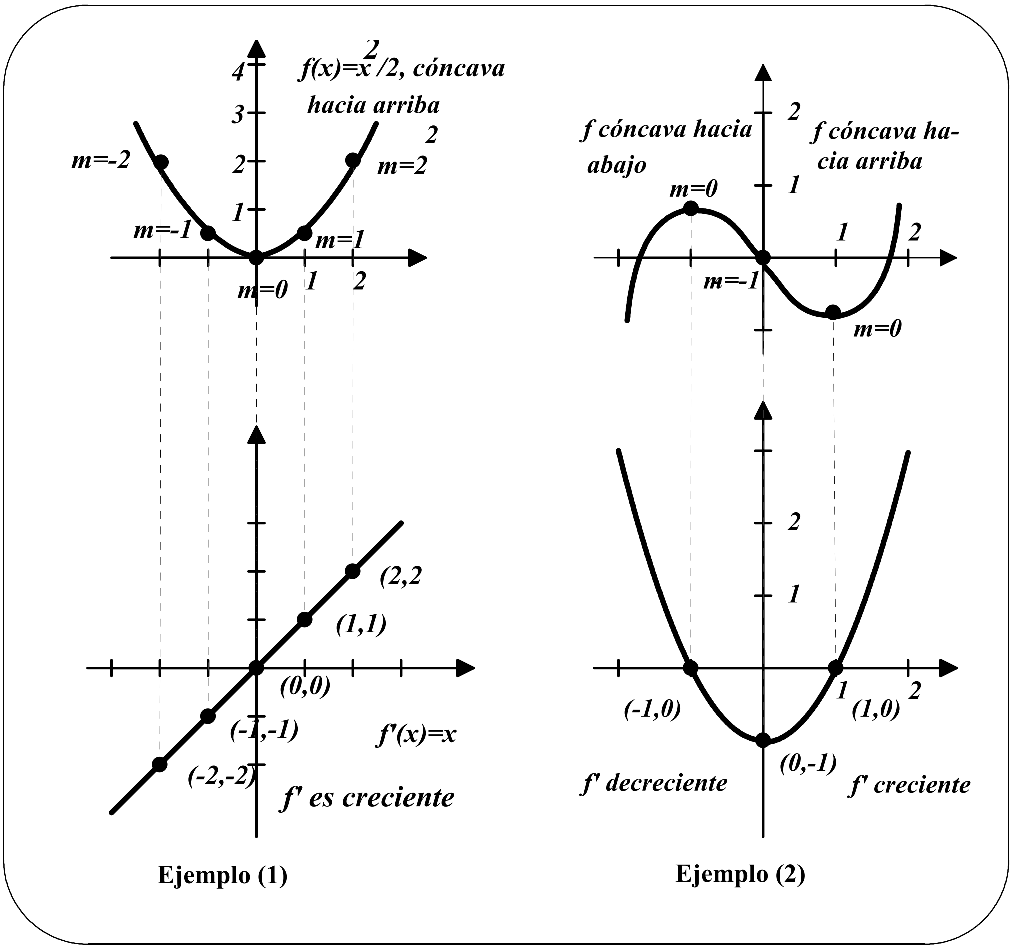
Sea f una función cuya segunda derivada existe en un intervalo abierto I.

1. *Si $f''(x)>0$ para todo x en I, la gráfica de f es cóncava hacia arriba.*

2. *Si $f''(x)<0$ para todo x en I, la gráfica de f es cóncava hacia abajo.*

□ ***EJEMPLOS:***

1. Dibujaremos las gráficas de las funciones $f(x)=\frac{x^2}{2}$ y $f'(x)=x$ para mostrar que *f'* es creciente en los intervalos en que la gráfica de *f* es cóncava hacia arriba y que *f'* es decreciente en los intervalos en que la gráfica de *f* es cóncava hacia abajo.



2. En la figura anterior se presentan las gráficas de $f(x) = \frac{x^3-3x}{3}$ y $f'(x) = x^2 - 1$.

Para una *f continua*, podemos hallar los intervalos de concavidad hacia arriba o hacia abajo así:

1. Localizar los valores en que *f''(x)* = 0 o *f''* no está definida.
2. Usarlos para delimitar los intervalos prueba.
3. Hallar el signo de *f''(x)* en esos intervalos.

Ilustraremos este proceso en el *Ejemplo 1*. Para funciones *discontinuas*, los intervalos prueba han de formarse usando los puntos de discontinuidad junto a los puntos en que *f''* es cero o indefinida. Esto se hará en el *Ejemplo 2.*

❑ *EJEMPLOS:*

1. Hallaremos los intervalos de concavidad hacia arriba o hacia abajo de la gráfica de la función:

$$f(x) = \frac{6}{x^2+3}$$

SOLUCIÓN: Comenzamos calculando la segunda derivada:

$$f(x) = 6.(x^2+3)^{-1}$$

$$f(x) = (-6).(x^2+3)^{-2}.2x = \frac{-12x}{(x^2+3)^2}$$

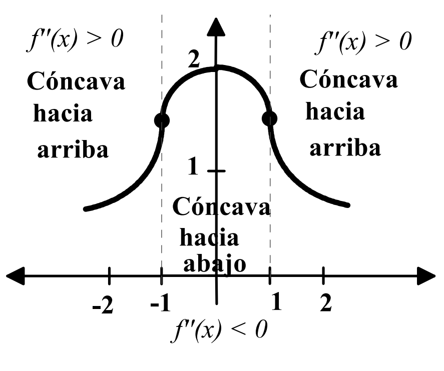
$$f''(x) = \frac{(x^2+3)^2.(-12)-(-12x).2.2x.(x^2+3)}{(x^2+3)^4} = \frac{36.(x^2-1)}{(x^2+3)^3}$$

Como *f''(x) = 0* cuando $x = \pm 1$ y *f''* está definida en toda la recta real, determinamos el signo de *f''* en los intervalos $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$ y $(1,+\infty)$. Los resultados se recogen en la siguiente tabla:

Intervalo	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 1$	$1 < x < \infty$
Valor prueba	$x = -2$	$x = 0$	$x = 2$
Signo de *f''(x)*	$f''(-2) > 0$	$f''(0) < 0$	$f''(2) > 0$
Conclusión	*Cóncava hacia arriba*	*Cóncava hacia abajo*	*Cóncava hacia arriba*

2. Hallaremos los intervalos de concavidad hacia arriba o hacia abajo de la gráfica de la función:

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-4}$$



Gráfica de la función

$$f(x) = \frac{6}{x^2+3}$$

SOLUCIÓN:

$$f'(x) = \frac{(x^2-4).2x-(x^2+1).2x}{(x^2-4)^2} = \frac{-10x}{(x^2-4)^2}$$

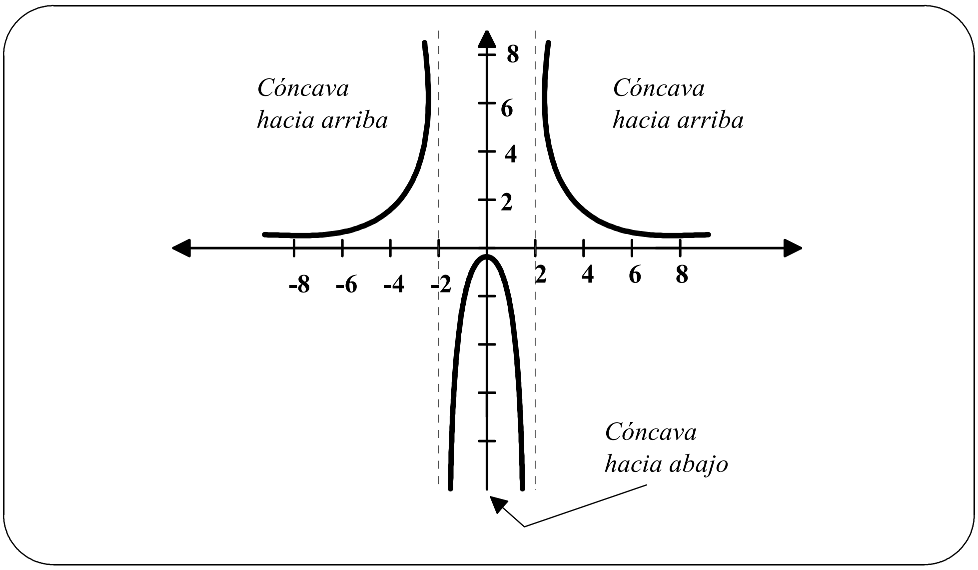
$$f''(x) = \frac{-10.(x^2-4)^2-(-10x).2.(x^2-4).2x}{(x^2-4)^4} = \frac{10.(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}$$

No hay puntos donde f'' sea cero, pero en $x = \pm 2$ la función f es discontinua así que tomamos como intervalos prueba $(-\infty,-2)$, $(-2,2)$ y $(2,\infty)$ como muestra la siguiente tabla:

Intervalo	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 2$	$2 < x < \infty$
Valor prueba	$x = -3$	$x = 0$	$x = 3$
Signo de *f''(x)*	$f''(-3) > 0$	$f''(0) < 0$	$f''(3) > 0$
Conclusión	*Cóncava hacia arriba*	*Cóncava hacia abajo*	*Cóncava hacia arriba*

➢ 4.4 Puntos de inflexión.

La *figura 1* muestra puntos en los que la concavidad cambia de sentido. Si en tales

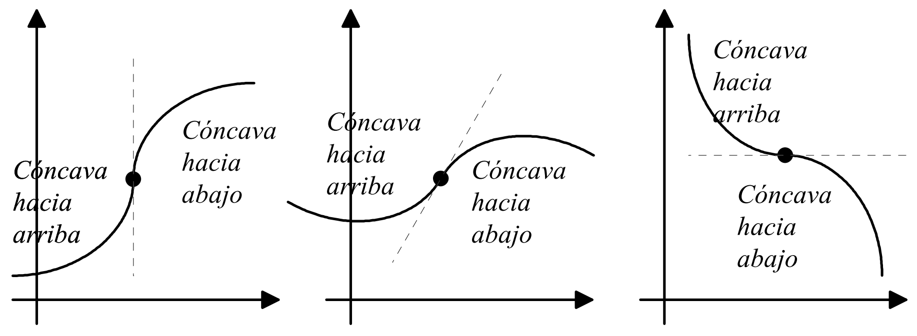


puntos existe tangente, los llamamos **puntos de inflexión.**

☐ ***DEFINICIÓN:***

*Si la gráfica de una función continua posee recta tangente en un punto donde la concavidad cambia de sentido, llamamos a ese punto un **punto de inflexión.***

Como los puntos de inflexión ocurren donde la concavidad cambia de sentido, debe suceder que en ellos f'' cambia de signo. Así que para localizar posibles puntos de inflexión, necesitamos sólo determinar los x en que $f''(x) = 0$ o en los que f'' no está definida. Esto es análogo al procedimiento de localización de extremos relativos de f.



La gráfica cruza a su recta tangente en un punto de inflexión

☐ *TEOREMA:*

Si (c,f(c)) es un punto de inflexión de la gráfica de f, entonces o es f''(c) = 0 o f'' no está definida en x = c.

☐ *EJEMPLOS:*

1. Hallar los puntos de inflexión y discutir la concavidad de la gráfica de

$$f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + 1$$

SOLUCIÓN: Derivando dos veces, tenemos

$$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x$$

$$f''(x) = 12x^2 + 6x - 6 = 6.(2x-1).(x+1)$$

Los posibles puntos de inflexión son x = -1 y x = 1/2. Estudiando el signo de f'' en los intervalos que estos puntos determinan, concluimos que ambos son de inflexión, como se pone de manifiesto en la siguiente tabla:

Intervalo	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 1/2$	$1/2 < x < \infty$
Valor prueba	$x = -2$	$x = 0$	$x = 1$
Signo de *f''(x)*	$f''(-2) > 0$	$f''(0) < 0$	$f''(1) > 0$
Conclusión	*Cóncava hacia arriba*	*Cóncava hacia abajo*	*Cóncava hacia arriba*

2. Hallar los puntos de inflexión y discutir la concavidad de la gráfica de

$$f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}$$

SOLUCIÓN: Derivando dos veces, tenemos

$$f'(x) = 2.(x+1).(x^2+2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(x) = \frac{-2.(2x-1).(x+2)}{(x^2+2)^{\frac{5}{2}}}$$

Los posibles puntos de inflexión son x = -2 y x = 1/2. Estudiando el signo de f'' en los intervalos que estos puntos determinan, concluimos que ambos son de inflexión, como se pone de manifiesto en la siguiente tabla:

Intervalo	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 1/2$	$1/2 < x < \infty$
Valor prueba	$x = -3$	$x = 0$	$x = 1$
Signo de *f''(x)*	$f''(-3) < 0$	$f''(0) > 0$	$f''(1) < 0$
Conclusión	*Cóncava hacia abajo*	*Cóncava hacia arriba*	*Cóncava hacia abajo*

Obsérvese que es posible que f'' sea cero en un punto que *no* es de inflexión. Por ejemplo, la derivada segunda de la función $f(x) = x^4$ se anula en $x = 0$, pero el punto (0,0) no es de inflexión.

➢ 4.5 El criterio de la segunda derivada.

Si existe la segunda derivada, sirve como criterio sencillo de extremos relativos. El criterio se basa en que si *(c,f(c))* es máximo relativo de una *f derivable*, su gráfica es cóncava hacia abajo en algún intervalo que contiene a *c*. Análogamente, si *(c,f(c))* es mínimo relativo, la gráfica de *f* es cóncava hacia arriba en un intervalo que contiene a *c*.

□ ***TEOREMA:***

Sea f una función tal que f'(c) = 0 y tal que la segunda derivada de f existe en un intervalo abierto que contiene a c.

1. *Si f''(c) > 0, entonces (c,f(c)) es un mínimo relativo.*

2. *Si f''(c) < 0, entonces (c,f(c)) es un máximo relativo.*

3. *Si f''(c) = 0, entonces el criterio no decide.*

Ejercicios

15. Determina los extremos relativos de las siguiente funciones:

$$(a)\quad f(x) = -3x^5 + 5x^3 \quad (b)\quad f(x) = -\tfrac{1}{3}x^3 + x^2 \quad (c)\quad f(x) = \tfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$$

$$(d)\quad f(x) = x + \tfrac{4}{x} \quad (e)\quad f(x) = \sqrt{x^2+1} \quad (f)\quad f(x) = \tfrac{x}{x+1}$$

16. Esbozar la gráfica de una función *f* tal que:

1. *f(2) = f(4) = 0.* **2.** *f'(x) < 0 si x < 3.* **3.** *f'(3) no está definida*

4. *f'(x) > 0 si x > 3.* **5.** *f''(x) < 0*

17. Esbozar la gráfica de una función f tal que:

1. *f(2) = f(4) = 0.***2.** *f'(x) > 0 si x < 3.* **3.** *f´(3) no está definida*

4. *f'(x) < 0 si x > 3.* **5.** *f''(x) > 0.*

5.- Representación gráfica de funciones.

Hasta ahora hemos discutido en este tema y en el anterior varios conceptos útiles a la hora de dibujar la gráfica de una función.

1. *Dominio y puntos de discontinuidad.*
2. *Intersecciones con los ejes y regiones.*
3. *Simetrías.*
4. *Monotonía y extremos relativos.*
5. *Concavidad y puntos de inflexión.*
6. *Asíntotas.*

Veremos algunos ejemplos que incorporan estas nociones en un método eficaz para dibujar curvas.

❑ ***EJEMPLO 1:***

Gráfica de la función $f(x) = \frac{2(x^2-9)}{x^2-4}$

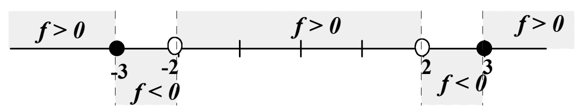
SOLUCIÓN: Determinaremos f' y f'' en primer lugar:

$$f'(x) = \frac{20x}{(x^2-4)^2} \qquad f''(x) = \frac{20(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}$$

(1) $Domf = R - \{-2,+2\}$; La función presenta en x = 2 y en x = -2 discontinuidad.

(2) $\left\{ \begin{array}{l} Si \quad f(x) = 0 \Rightarrow \quad 2(x^2-9) = 0 \Rightarrow \quad x = \pm 3 \\ \qquad Si \quad x = 0 \Rightarrow \quad f(0) = \frac{9}{2} \end{array} \right\}$ Los puntos de corte con los ejes son $(-3,0), \quad (3,0) \quad y \quad (0,\frac{9}{2})$.

Regiones: Para determinar las regiones del plano en las que puede estar la gráfica de la función, debemos estudiar el signo de f en los intervalos determinados por los puntos que no están en el dominio y las abscisas de los puntos de corte con el eje OS.

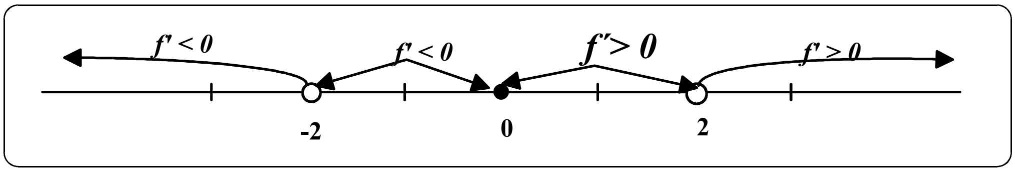


(3) $f(-x) = f(x) \Rightarrow \quad La \quad función \quad es \quad par.$

Esto significa que la gráfica es simétrica con respecto al eje YO.

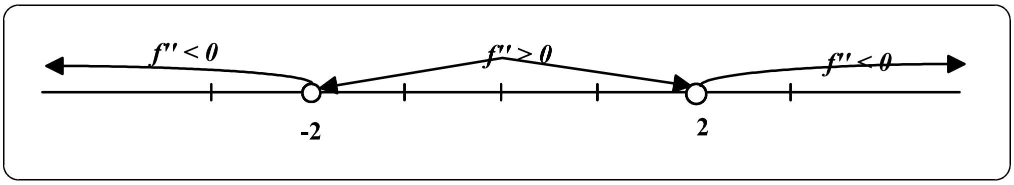
(4) $f'(x) = 0 \Rightarrow \quad x = 0; \quad f' \quad no \quad está \quad definida \quad en \quad x = \pm 2$

De lo que deducimos que la función f es **creciente** en $(0,2)\cup(2,+\infty)$, f es **decreciente** en $(-\infty,-2)\cup(-2,0)$, y el punto $(0,\frac{9}{2})$es un **mínimo relativo.**



(5) $f''(x)\neq 0 \quad \forall x\in Domf; \quad f'' \quad no \quad está \quad definida \quad en \quad x=\pm 2$

De lo que deducimos que la función es **cóncava hacia arriba** en $(-2,2)$, y **cóncava hacia abajo** en $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$. Además, no tiene puntos de inflexión.



(6) Asíntotas verticales: Las asíntotas verticales son las rectas x = 2 y x = -2, pues

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty \quad y \quad \lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty \Rightarrow \quad x=2 \quad A.V.$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = +\infty \quad y \quad \lim_{x\to -2^-} f(x) = -\infty \Rightarrow \quad x=-2 \quad A.V.$$

Asíntotas horizontales: La recta y = 2 es una asíntota horizontal pues:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 2 = \lim_{x\to -\infty} f(x)$$

Asíntotas oblícuas: No hay asíntotas oblícuas pues $\lim_{x\to \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

Con la información obtenida en los apartados anteriores podemos dibujar la gráfica que aparece en la *figura 1.*

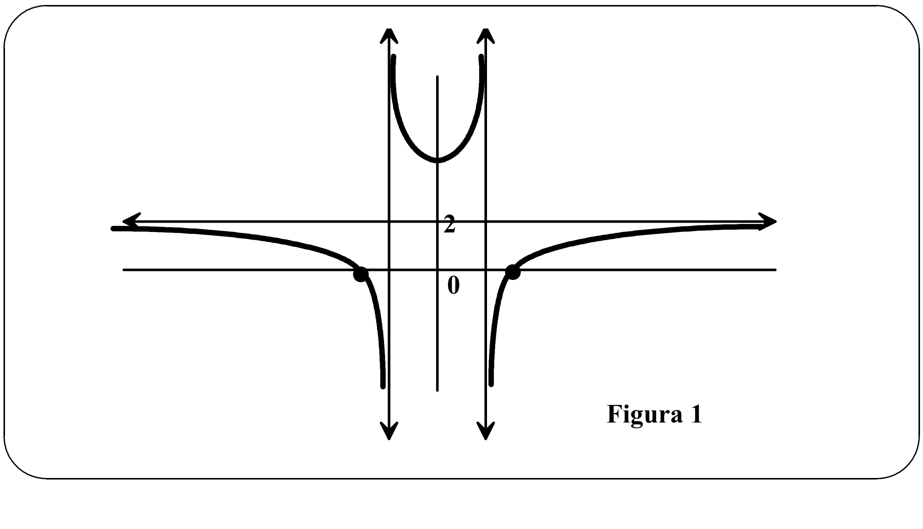


Figura 1

❑ *EJEMPLO 2:*

Gráfica de la función $f(x) = x^4 - 2x^2$

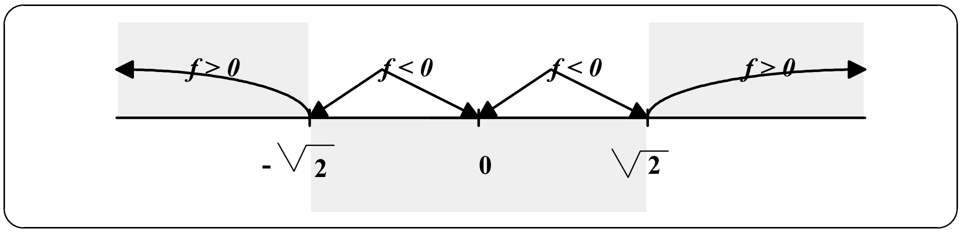
SOLUCIÓN: Determinaremos en primer lugar f' y f''

$$f'(x) = 4x^3 - 4x \quad y \quad f''(x) = 12x^2 - 4$$

(1) El **dominio** de la función es el conjunto de los números reales y además es **continua** en R.

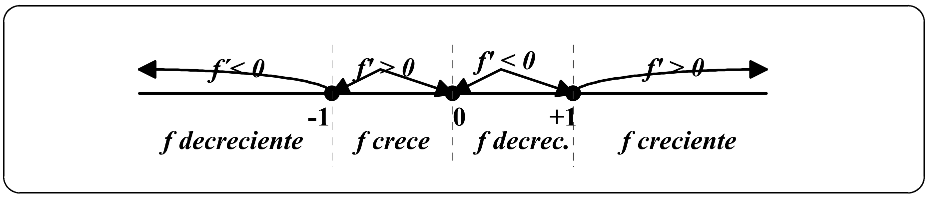
(2) $\begin{cases} Si \quad f(x) = 0 \Rightarrow \quad x^2(x^2-2) = 0 \Rightarrow \quad x = 0 \quad y \quad x = \pm\sqrt{2} \\ \qquad\qquad\qquad Si \quad x = 0 \Rightarrow \quad f(0) = 0 \end{cases}$ Los puntos de corte con el eje OX son $(0,0)$, $(\sqrt{2},0)$ y $(-\sqrt{2},0)$. El punto de corte con el eje OY es $(0,0)$.

Regiones: Estudiamos el signo de la función en los intervalos determinados por los puntos de corte con el eje de abscisas:



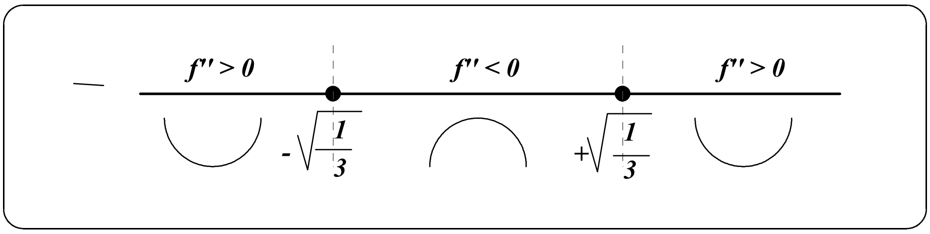
(3) Simetrías: Como $f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 = x^4 - 2x^2 = f(x)$, la función es par, es decir, su gráfica simétrica respecto al eje OY.

(4) $f'(x) = 4x^3 - 4x = 0 = 4x(x^2-1) \Rightarrow \quad x = 0 \quad y \quad x = \pm 1$



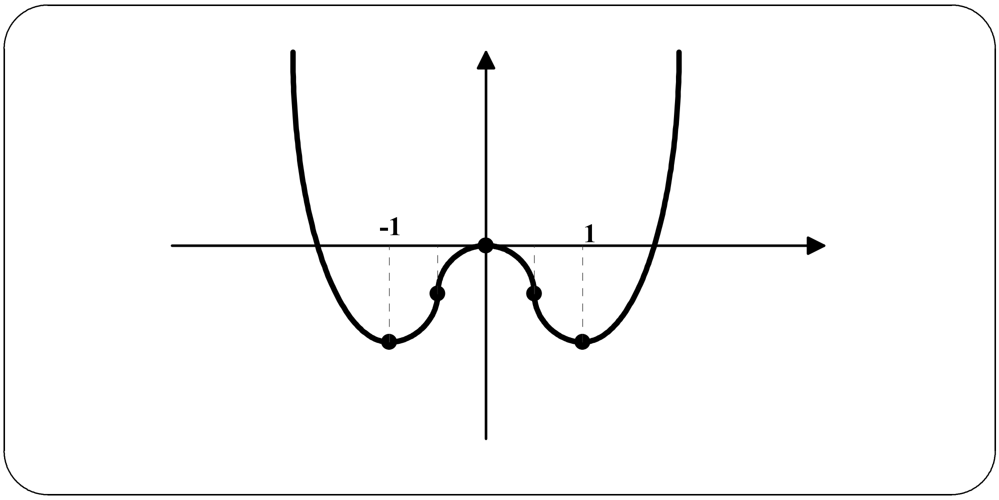
La función es **creciente** en $(-1,0)$ y $(1,\infty)$ y **decreciente** en $(-\infty,0)$ y $(0,1)$. Posee un **máximo** en el punto $(0,0)$ y **mínimos** en los puntos $(-1,-1)$ y $(1,-1)$.

(5) $f''(x) = 12x^2 - 4 = 0 \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$.



La función es **cóncava hacia arriba** en $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ y $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, +\infty\right)$ y **cóncava hacia abajo** en $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, +\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$. Los puntos de **inflexión** son $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, -\frac{5}{9}\right)$ y $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, -\frac{5}{9}\right)$.

(6) No tiene **asíntotas.**



☐ *EJEMPLO 3 :*

Gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

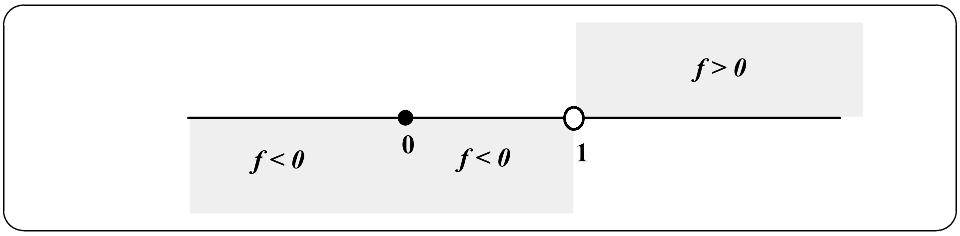
SOLUCIÓN: Determinaremos f' y f''

$$f'(x) = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} \quad y \quad f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$$

(1) $Domf = Domf' = Domf'' = R - \{1\}$. La función tiene una **discontinuidad** en $x = 1$.

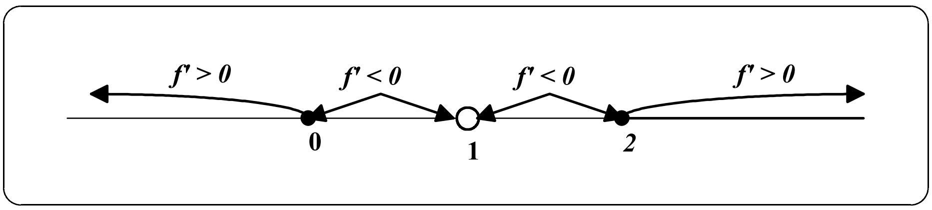
(2) $\left\{ \begin{array}{ll} Si & f(x) = 0 \Rightarrow \quad x = 0 \\ Si & x = 0 \Rightarrow \quad f(0) = 0 \end{array} \right\}$ El punto de corte con los ejes es el (0,0).

Regiones:



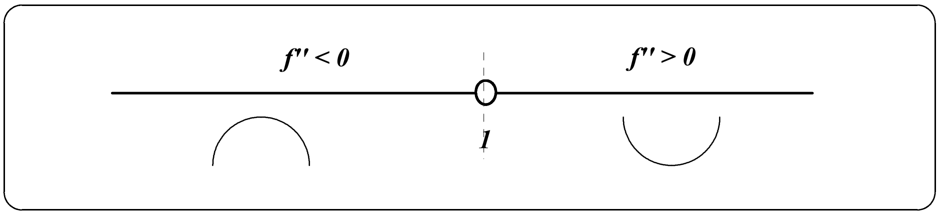
(3) No hay **simetrías.**

(4) $f'(x) = 0 \Rightarrow \quad x^2 - 2x = x(x-2) = 0 \Rightarrow \quad x = 0 \quad y \quad x = 2$. Además la función no es derivable en $x = 1$.



La función es **creciente** en $(-\infty, 0)$ y $(2, \infty)$ y **decreciente** en $(0, 2) - \{1\}$. Posee un **máximo** en $(0, 0)$ y un **mínimo** en $(2, 4)$.

(5) $f''(x) \neq 0 \quad \forall x \in Domf$; La f'' no está definida en $x = 1$.



La función es **cóncava hacia arriba** en $(1, +\infty)$ y **cóncava hacia abajo** en $(-\infty, 1)$. No tiene puntos de inflexión.

(6) Asíntotas: Como $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ la recta $x = 1$ es una **asíntota vertical.**

Como $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ no hay **asíntotas horizontales.**

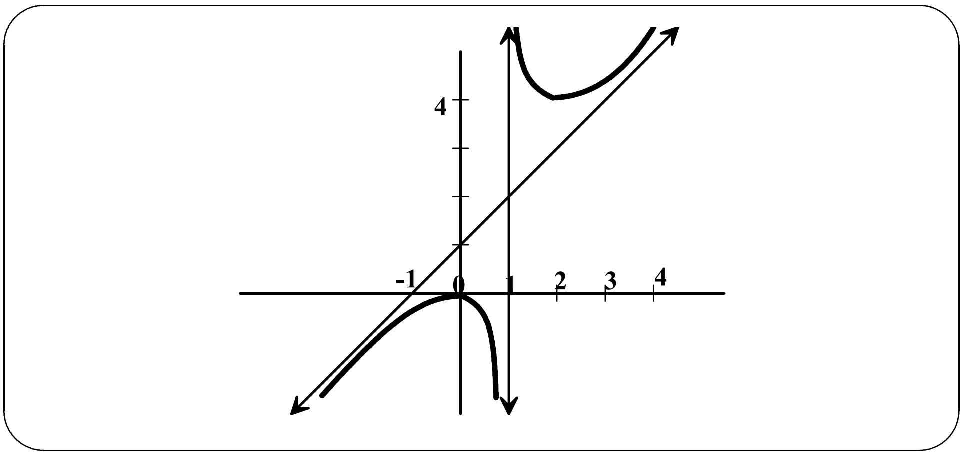
Como $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ hay una **asíntota oblícua** cuya pendiente es 1 y que tiene por ecuación

$$y = x + b$$

Para determinar el término independiente de la ecuación hallamos:

$\lim_{x \to \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x-1} = 1$. Por lo tanto, la ecuación de la asíntota oblícua es

$$y = x + 1$$



6.- Optimización de funciones.

Una de las aplicaciones más comunes del calculo consiste en hallar máximos y mínimos. Piénsese cuán a menudo oímos o leemos términos como máximo beneficio, mínimo coste, mínimo tiempo, voltaje máximo, tamaño óptimo, área mínima, máxima intensidad o distancia máxima. A continuación se presenta un procedimiento para resolver problemas aplicados de máximos y mínimos:

1. *Asignar símbolos a todas las cantidades dadas y a las cantidades a determinar. Si es posible, hágase un dibujo esquemático.*
2. *Escribir una* ***ecuación primaria*** *para la magnitud que se desea hacer máxima o mínima.*
3. *Reducir la ecuación primaria a otra que tenga una sola variable independiente. Esto puede exigir el uso de* ***ecuaciones secundarias*** *que relacionen las variables independientes de la ecuación primaria.*
4. *Determinar el dominio de la ecuación primaria. Esto es, aquellos valores para los que el problema propuesto tenga sentido.*
5. *Hallar el máximo o el mínimo por medio de las técnicas ya conocidas en apartados anteriores.*

❑ ***EJEMPLO 1:***

Se quiere construir una caja abierta con base cuadrada, empleando 108 dm² de material. ¿Qué dimensiones producirán una caja de volumen máximo?

❑ ***SOLUCIÓN:***

Como la caja tiene base cuadrada (Figura 1), su volumen es:

$$V = x^2.h \ (\textit{Ecuación primaria})$$

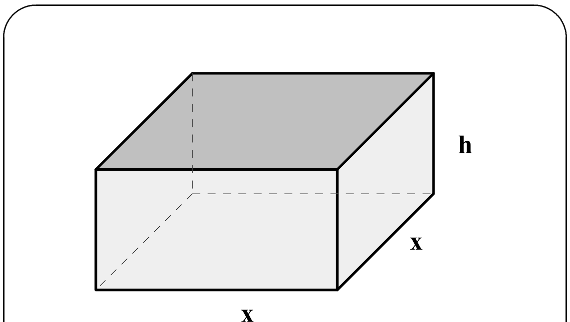


Figura 1

Además, como está abierta por su parte superior, su área es:

S = área de la base + área de los cuatro laterales

S = 108 = $x^2 + 4xh$ *(Ecuación secundaria)*

Ya que deseamos maximizar el volumen V, lo expresaremos en función de una sola variable. Para ello, despejamos h en $108 = x^2 + 4xh$ *en términos de x, es decir*

$$h = \frac{108 - x^2}{4x}$$

Sustituyendo en la ecuación del volumen, obtenemos:

$$V = x^2 h = x^2 . \frac{108 - x^2}{4x} = 27x - \frac{x^3}{4} \quad \textit{Función de una variable}$$

Antes de hallar el valor de x que produce máximo volumen, hemos de determinar el dominio admisible. Esto es, ¿qué valores de x tienen sentido en este problema? Sabemos que x ha de ser no negativo y que el área de la base ($A = x^2$*) es a lo sumo 108. Así pues,*

$$0 \le x \le \sqrt{108} \text{ Dominio admisible}$$

Ahora bien, para maximizar V hallemos los números críticos, como sigue:

$$V' = 27 - \tfrac{3}{4}x^2 \quad \Rightarrow \quad V = 0 = 27 - \tfrac{3x^2}{4} \Rightarrow \quad x = \pm 6 \text{ Números críticos.}$$

$$V'' = -\tfrac{3x}{2} \Rightarrow \quad V''(+6) = -9 < 0 \Rightarrow \quad x = 6 \quad es \quad máximo$$

Concluimos que V es máximo cuando x = 6, es decir para una caja de dimensiones **6 x 6 x 3.**

Ejercicios

18. Hallar los números positivos que minimicen la suma del doble del primero más el segundo, si el producto de dichos números es 288.

19. Una página rectangular ha de contener 24 pulgadas cuadradas de texto. Los márgenes superior e inferior tienen 1'5 pulgadas de anchura y los laterales 1 pulgada. ¿Qué dimensiones de la página minimizan la cantidad de papel requerida?

20. Dos postes, de 12 y 28 pies de altura, distan 30 pies entre sí. Desea tenderse un cable, fijado en un único punto del suelo, entre las puntas de ambos postes. ¿En qué punto del suelo hay que fijar el cable para usar el mínimo cable posible?

21. Con cuatro pies de cable se forman un cuadrado y un círculo. ¿Cuánto cable debe emplearse en cada figura para que encierren la máxima área total posible?

22. Una agencia inmobiliaria maneja 50 apartamentos. Cuando el alquiler es de 270 dólares mensuales, todos están ocupados, mientras que por cada 15 dólares de aumento se produce, en término medio, una vacante. Cada apartamento ocupado requiere un promedio de 18 dólares mensuales de conservación y servicios. ¿Qué alquiles debe cobrarse para obtener el beneficio máximo?

23. Una plataforma petrolífera está a 1 milla de la costa y la refinería está a 2 millas tierra adentro. Si el coste de tender el oleoducto en el océano es el doble que en tierra, ¿qué trayecto debe escogerse para minimizar el coste?

24. Un cultivador de agrios de Valencia estima que si se plantan 60 naranjos, la producción media por árbol será de 400 naranjas. La producción media decrecerá en 4 naranjas por árbol adicional plantado en la misma extensión. ¿Cuántos árboles deberá plantar el cultivador para maximizar la producción total?

25. Representa gráficamente las siguientes funciones:

$$(a) \quad f(x) = \tfrac{x^2-2x+4}{x-2} \quad (b) \quad f(x) = \tfrac{x}{\sqrt{x^2+2}} \quad (c) \quad f(x) = \tfrac{x+2}{x}$$

$$(d) \quad f(x) = x\sqrt{4-x} \quad (e) \quad f(x) = \tfrac{x^2+1}{x} \quad (f) \quad f(x) = \tfrac{1}{x^2+1}$$

$$(g)\, f(x) = x^2 \cdot e^x \quad (h)\, f(x) = \ln(4x-8) \quad (i)\, f(x) = x \cdot \ln x$$

$$(j)\ f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (k)\ f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad (l)\ f(x) = \frac{8}{x\sqrt{x^2-4}}$$

26. Sea *f(x)* una función cuya primera derivada es $f'(x) = 2x - x^2$. Se pide:

(a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, de concavidad y convexidad de la función *f(x)*.

(b) Razonar si existen máximos, mínimos y puntos de inflexión. En caso de que existan, calcularlos.

(c) Representar la gráfica de la función *f(x)* cuya primera derivada es $f'(x) = 2x - x^2$.

(d) La gráfica representada en el apartado anterior , ¿es la única que se podía pintar?. ¿Por qué?

27. Dada la función $f(x) = \frac{x^2+4}{x}$, se pide:

(a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Razonar si existen máximos y mínimos, en caso de que existan calcularlos.

(b) Estudiar la existencia de asíntotas. En caso de que existan calcularlas..

28. Sea $f : R \to R$ una función que cumple las siguientes condiciones:

$$1)\ \lim_{x\to +\infty} f(x) = 1; \quad 2)\ \lim_{x\to -\infty} f(x) = 1; \quad 3)\ \lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty;$$

$$4)\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty; \quad 5)\ f(0) = 0.$$ Se pide:

(a) Dibujar la gráfica de una función *f(x)* que verifique las cinco condiciones anteriores. Razonar la gráfica dibujada.

(b) Dar la ecuación de la función representada en el apartado anterior. Razonar la respuesta.

(c) Representar la gráfica de la función $g(x) = \frac{x}{x-2}$ haciendo un estudio de su crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad.

29. Dada la función $f(x) = x^3 + x - 2$ se pide:

(a) Dar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. Razonar si existen máximos y mínimos, y en caso de que existan calcularlos.

(b) Dar los intervalos de concavidad y convexidad de la función. Razonar si existen puntos de inflexión, y en caso de que existan calcularlos.

(c) Representar la gráfica de la función.

(d) Dar la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 0$.

30. En cierto colectivo de familias, el gasto mensual en ocio, *G(x)* en miles de pta., está relacionado con sus ingresos mensuales - *x* en miles de pta. - a través de la siguiente expresión:

$$G(x) = \begin{cases} 0'02 \cdot x - 1, & si \quad 0 \le x \le 100 \\ \frac{30x}{2x+2300}, & si \quad x > 100 \end{cases}$$

(a) Estudiar la discontinuidad del gasto. ¿El gasto en ocio es sensiblemente distinto si sus ingresos son "ligeramente" inferiores o superiores a las 100.000 pta.?

(b) Justificar que el gasto en ocio es siempre creciente con los ingresos.

(c) Justificar que ninguna familia realiza un gasto en ocio superior a las 15.000 pta.

31. Cierta entidad financiera lanza al mercado un plan de inversión cuya rentabilidad, *R(x)* en miles de pesetas, viene dada en función de la cantidad que invierta, *x* en miles de pesetas, por medio de la expresión siguiente: $R(x) = -0'001 \cdot x^2 + 0'5x + 2'5$

(a) Deducir razonadamente que cantidad de dinero le conviene invertir a un cliente en dicho plan.

(b) ¿Qué rentabilidad obtendría?.

32. Hallar las dimensiones de un ventanal de forma rectangular de 12 m de perímetro para conseguir la máxima luminosidad.

33. Aprovechando como hipotenusa una pared de 15 metros, un pastor desea acotar una superficie triangular. ¿Qué medidas deberán tener los otros dos lados del triángulo rectángulo con objeto de obtener una superficie máxima?

34. El coste de la producción de *x* unidades diarias de un determinado producto es $C(x) = \frac{1}{4}x^2 + 35x + 25$ y el precio de venta de una de ellas es $p(x) = 50 - \frac{x}{4}$pta. Halla el número de unidades que debe venderse diariamente para que el beneficio se máximo

35. Representa gráficamente las funciones: $f(x) = \frac{x^2+9}{x^2-4}$, $g(x) = x^2 + \frac{1}{x}$, $h(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2}$.

36. Un centro comercial abre a las 10 horas y cierra a las 22 horas. Se ha comprobado que el número de personas que acuden a dicho centro puede representarse, en función de la hora del día, en la forma : $N(t) = at^2 + bt + c, \quad 10 \le t \le 22 \quad (a \ne 0)$. Sabiendo que a las 18 horas se registra la máxima afluencia de clientes con un total de 64 personas y que cuando el centro comercial abre no hay ningún cliente esperando:

(a) Determina, justificando la respuesta, los coeficientes a, b y c.

(b) Representa la función obtenida.

37. Considera la función $f(x) = \frac{x^2}{x+a}$. ***(a)*** Di para qué valores del parámetro a la función es creciente en el punto de abscisa x = 1. ***(b)*** Para a = -1, estudia los intervalos de crecimiemto y decrecimiento de f(x).

38. Después de t horas, el rendimiento de cierto estudiante (en una escala de 0 a 100) viene dado por la función: $r(t) = \frac{380t}{t^2+4}$.

(a) Calcula el rendimiento a las 4 horas de estudio.

(b) Determina cuando el rendimiento crece y cuando decrece en las primeras 7 horas de estudio.

(c) Encuentra en qué momento consigue el estudiante su máximo rendimiento, así como el valor de ese rendimiento máximo.

39. En una industria se producen recambios de piezas de automóvil. Se ha hecho un estudio de los costes de los recambios fabricados y ha resultado que el coste diario de producción de x piezas (en euros) viene dado por la siguiente función: $C(x) = 3200 + 20x + 2x^2$. ***(a)*** ¿Cuántas piezas de estos recambios se ha de producir diariamente para que el coste unitario sea el mínimo posible? ***(b)*** ¿Cuál es el coste diario al fabricar este número de piezas? ***(c)*** ¿Cuál es, en este caso, el coste de cada pieza?

Ejercicios de repaso (Límites, continuidad y derivadas)

40. Determina y clasifica los puntos de discontinuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6}{x+3} & si \quad x < -1 \\ x^2 + 2 & si \quad -1 < x \leq 2 \\ \frac{3x-6}{x^2-4} & si \quad x > 2 \end{cases}$$

41. Calcula los siguientes límites:

$$(a) \quad \lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3} \qquad (b) \lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{4x^2 - 1} - (2x - 1) \right)$$

42. Determina las asíntotas de la función: $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

43. ***(a)*** Dada la función $f(x) = \frac{x^2+k}{(x-1)\cdot(x-3)}$,¿qué valor ha de tomar *k* para que presente una discontinuidad evitable en $\boldsymbol{x = 1}$?

(b) ¿Es continua la función $f(x) = |2x - 6|$ en el punto $\boldsymbol{x = 3}$?

(c) Dibuja la gráfica de una función f(x) que verifique las siguientes condiciones:

1. $Dom f = R - \{-1, 3\}$
2. $\lim_{x \to -1^-} f(x) = 0, \qquad \lim_{x \to -1^+} f(x) = -1$
3. $\lim_{x \to 3} f(x) = -\infty$
4. La función *f(x)* es continua en su dominio.

44. Determina y clasifica los puntos de discontinuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1} & si \quad x < -1 \\ x^2 - 3 & si \quad -1 < x \leq 2 \\ \frac{3}{x-2} & si \quad x > 2 \end{cases}$$

45. Calcula los siguientes límites:

$$(a) \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{3x-5}{\sqrt{25x^2+7}} \qquad (b) \lim_{x \to \infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 5x} \right)$$

46. Determina las asíntotas de la función: $f(x) = \frac{3x-6}{x+5}$

47. *(a)* Dada la función $f(x) = \begin{cases} 4x^2 - 2x + 1, & x \leq 3 \\ 5x + a, & x > 3 \end{cases}$ determina el valor de a para que sea continua en su dominio.

(b) Escribe un ejemplo de dos funciones que posean el mismo límite real en $x = 2$, una de ellas continua y la otra discontinua evitable en dicho punto.

(c) Dibuja la gráfica de una función f(x) que verifique las siguientes condiciones:

1. $Dom f = R - \{1, 2\}$
2. $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -2, \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$
3. $\lim_{x \to 2} f(x) = +\infty$
4. La función *f(x)* es continua en su dominio.

48. Calcula los siguientes límites:

(a) $\lim_{x \to -2} \frac{x^2+3x+2}{3x^2-12}$; *(b)* $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{5x-1}-2}{x^2+2x-3}$; *(c)* $\lim_{x \to 0} \frac{4x^2-x}{3x^2+2x+3}$

49. Determina y clasifica los puntos de discontinuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 6x - 2, & si \quad x \leq -1 \\ \frac{4}{x+2}, & si \quad -1 < x < 2 \\ x^2 - 2x + 1, & si \quad x > 2 \end{cases}$$

50. *(a)* Calcula k para que sea continua la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x-3}{x+1}, & si \quad x \neq -1 \\ k + 4, & si \quad x = -1 \end{cases}$$

(b) Determina y clasifica los puntos de discontinuidad de la función:

$$f(x) = \frac{2x+6}{x^2-9}$$

51. Calcula los siguiente límites:

(a) $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 3x} - 2x \right)$ *(b)* $\lim_{x \to 5} \frac{2x^2-7x-15}{x^2-25}$

52. Calcula los siguiente límites:

(a) $\lim_{x \to 1/2} \frac{2x-1}{2x^2+5x-3}$ *(b)* $\lim_{x \to +\infty} \left(x + 1 - \sqrt{x^2 - x} \right)$

53. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

$$\textit{(1)}\ f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2-x-2}{x-1}, x \neq 1 \\ 0, x = 1 \end{cases} \qquad \textit{(2)}\ g(x) = \frac{|x-2|}{x-2}$$

Razona la respuesta en cada uno de los casos.

54. Se estima que dentro de t años, la población de una cierta comunidad suburbana será de $P(t) = 30 - \frac{8}{t+2}$ miles.

(a) Determina la tasa de variación media de la función en los intervalos [2,4] y [3,4].

(b) ¿A qué ritmo estará creciendo la población dentro de 3 años?

(c) ¿Cuánto crecerá realmente la población en el cuarto año?

(d) ¿Qué sucederá a la larga con el ritmo de crecimieto de población?

55. Calcula la función derivada de las siguientes funciones:

$$\textit{(a)}\ f(x) = e^{-4x^2+7} \qquad \textit{(b)}\ f(x) = \ln(3x^3 + 2x)$$

56. ***(a) Aplicando la definición de derivada***, determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x+1}$ en el punto P(3,2).

(b) Demuestra que la función $f(x) = |15 - 3x|$ no es derivable en $x = 5$.

57. Utilizando la definición de derivada, calcula el valor de la derivada de la función $f(x) = \frac{1}{x-2}$ en el punto de abscisa $x = 3$.

58. De la función $f(x) = ax^3 + bx$ sabemos que pasa por el punto $(1, 1)$ y en ese punto es de inflexión. Halla a y b.

59. Determina la función derivada de las siguientes funciones:

$$a)\quad f(x) = \ln(x^2 - 1) \qquad b)\quad f(x) = (x-1)\cdot e^{4x} \qquad c)\quad f(x) = \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$$

60. Determina los intervalos de monotonía y extremos relativos de la función:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$$

61. Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1, & x < -1 \\ 2x + 2, & -1 \leq x \leq 2 \\ -x^2 + 8x, & x > 2 \end{cases}$. Estudia su continuidad y su derivabilidad.

62. De la función $f(x) = ax^3 + bx + c$ sabemos que pasa por el punto $A(1,0)$, ese punto es un máximo y presenta en x=2 un mínimo. Determina a , b y c.

63. Razona cuál es el dominio de la función $f(x) = \frac{1}{x^2-x-6}$. Calcula, si existen, los máximos y mínimos relativos de f(x) en su dominio.

64. Calcula la función derivada de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \ln^2 x - \ln(\ln x)$ *(b)* $f(x) = \ln \frac{x^2}{\sqrt{x+3}}$

(c) $f(x) = \sqrt{e^{3x} - \frac{5+\ln x}{3x+5}}$ *(d)* $f(x) = \frac{\sqrt{3x^3} - \sqrt[3]{2x}}{\sqrt{x^3}}$

(e) $f(x) = e^{5x} + \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ *(f)* $f(x) = \ln \frac{3x^2}{x-5}$

65. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \le 2 \\ \frac{x+3}{x^2-3}, & x > 2 \end{cases}$, estudia la continuidad de f(x) en x = 2. Analiza el crecimiento de f(x) si x > 2. ¿Tiene algún máximo o mínimo relativo si x > 2?

66. Sea a función $f(x) = \begin{cases} -(x-1)^2 + b, & x \le 2 \\ a(x-3)^2 + 3, & x > 2 \end{cases}$. Halla a y b para que la función sea continua y derivable en $x = 2$.

67. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1}, & -1 \le x \le 3 \\ \frac{2x}{x^2-6}, & 3 < x \le 10 \end{cases}$

(a) Estudia la continuidad de f en x = 3.

(b) Determina la tangente a f(x) en x=4.

68. Determina la función derivada de las siguientes funciones:

$a)$ $f(x) = x\ln(x + \sqrt{x})$ $b)$ $f(x) = e^{x^2} \cdot \ln(x^2+1)$

$c)$ $f(x) = \ln\left(e^x + \sqrt{\frac{x-1}{x}}\right)$ $d)$ $f(x) = \ln \frac{x^3}{\sqrt{x^2+2}}$

(e) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x + \sqrt{x}}$ (f) $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$

69. Razona cuál es el dominio de definición de la función $f(x) = \frac{1}{x^2} + x^2$. Calcula, si existen, los máximos y mínimos relativos de f. ¿Tiene algún punto de inflexión?.