

# LÍMITES DE FUNCIONES

## 1. INTRODUCCIÓN A LOS LÍMITES

1.1 Definición intuitiva de límite.

## 2. DEFINICIÓN RIGUROSA DE LÍMITE

2.1 Límites reales.

2.2 Propiedades de los límites.

2.3 Estrategias para calcular límites.

- Límites de funciones algebraicas.

2.4 Técnicas para calcular límites.

- Técnica de cancelación.

- Cálculo de un límite por racionalización.

## 3. CONTINUIDAD Y LÍMITES LATERALES

## 4. LÍMITES INFINITOS

4.1 Límites infinitos.

4.2 Asíntotas verticales.

4.3 Propiedades de los límites infinitos.

4.4 Tipos de discontinuidades.

## 5. LÍMITES EN EL INFINITO

5.1 Límites en el infinito.

5.2 Asíntotas horizontales.

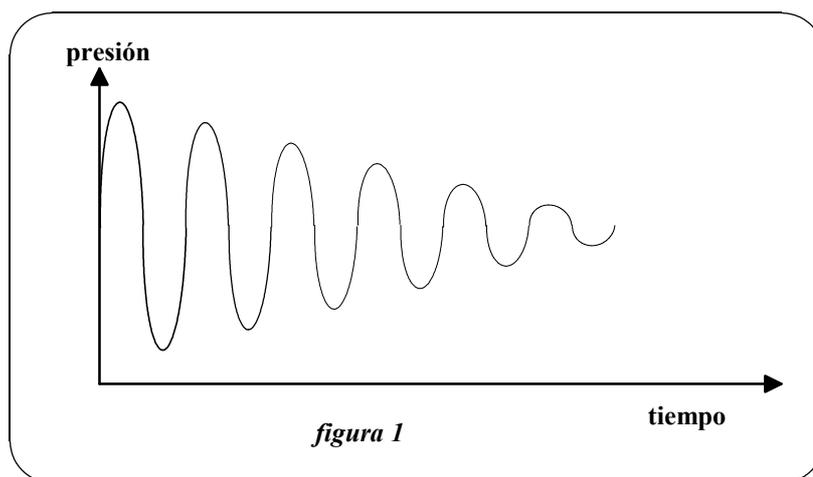
5.3 Propiedades de los límites en el infinito.

# LÍMITES DE FUNCIONES

## 1.- INTRODUCCIÓN A LOS LÍMITES.

De ordinario hablamos de la velocidad límite o instantánea, el límite de nuestra propia resistencia, los límites de la tecnología moderna o de estirar un muelle al límite. Todas estas frases sugieren que el límite es una especie de cota que a veces puede no ser alcanzable y otras no sólo alcanzable sino superable.

Aunque la noción de límite toma su forma más sencilla cuando se aplica a las sucesiones, eso no significa, en manera alguna, que su aplicación está restringida a las sucesiones. Por ejemplo cuando se tañe una campana, la presión del aire circundante variará con el tiempo como se representa "a grosso modo" en el siguiente diagrama:



La amplitud de las oscilaciones va decreciendo lentamente con el tiempo, de manera que, pasado cierto tiempo, la presión es aproximadamente constante e igual a la presión atmosférica.

Esta gráfica es cualitativamente semejante a la gráfica de una sucesión convergente (vista en el tema anterior) y, por tanto, es razonable suponer que podemos utilizar aquí las ideas de convergencia y límite.

### ➤ 1.1 Definición intuitiva de límite.

#### □ **DEFINICIÓN 1:**

*Si  $y = f(x)$  es una función real y  $L$  es un número, entonces " $L$  es el límite de  $f$  para números grandes de su dominio" es equivalente a la proposición "siempre que  $x$  sea suficientemente grande,  $f(x)$  es una excelente aproximación de  $L$ ".*

Hay otras maneras de aplicar el concepto de límite a las funciones, y no siempre la analogía con los límites de las sucesiones es tan evidente.

**□ DEFINICIÓN 2:**

*Si  $y = f(x)$  es una función real y  $a$  y  $L$  son números reales, entonces " $L$  es el límite de  $f(x)$  cerca de  $a$ " es equivalente a la proposición "si  $x$  está muy cerca de  $a$ , pero no es igual a  $a$ , entonces  $f(x)$  está muy cerca de  $L$ ".*

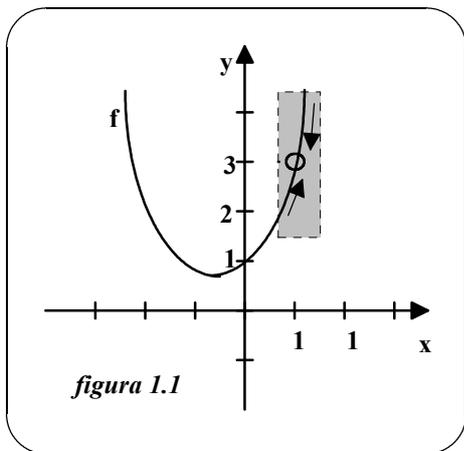
**□ DEFINICIÓN 3:**

*Si  $y = f(x)$  es una función real y  $a$  es un número real, entonces " $+\infty$  es el límite de  $f(x)$  cerca de  $a$ " es equivalente a la proposición "si  $x$  está muy cerca de  $a$ , pero no es igual a  $a$ , entonces  $f(x)$  se hace todo lo grande que queramos"*

Estudiaremos distintos ejemplos que nos ilustren estas ideas y nos permitan comprender la definición rigurosa de límite de una función.

**□ EJEMPLO 1:**

Supongamos que se nos pide dibujar la gráfica de la función



$$f(x) = \frac{(x^2+x+1).(x-1)}{x-1}, \quad x \neq 1$$

Para todo punto  $x \neq 1$  podemos usar las técnicas estándar, pero en el punto  $x = 1$  no estamos seguros de qué podemos esperar. Para tener una idea del comportamiento de la gráfica de  $f$  cerca de  $x = 1$ , podríamos usar dos sucesiones de valores  $x$ , una que se aproxime a 1 por la izquierda (convergente a 1 por valores más pequeños que 1) y otra por la derecha. La tabla muestra los correspondientes valores de  $f(x)$ :

x se acerca a 1 por la izquierda →						← x se acerca a 1 por la derecha					
x	0'5	0'75	0'9	0'99	0'999	1	1'001	1'01	1'1	1'25	1'5
f(x)	1'750	2'313	2'710	2'970	2'997	?	3'003	3'030	3'310	3'813	4'750
f(x) se acerca al 3 →						← f(x) se acerca al 3					

Al marcar estos puntos, se ve que la gráfica de  $f$  es una parábola con un hueco en el punto (1,3). (figura 1.1). Aunque  $x$  no puede ser igual a 1, podemos acercarnos cuanto queramos a 1 y como resultado  $f(x)$  se aproxima cuanto queramos al valor 3. Usando la notación de límites, decimos que el límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a 1 es 3, y lo denotamos como

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$$

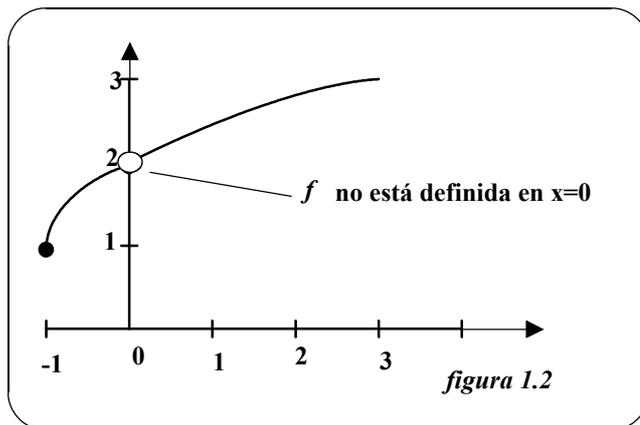
**□ EJEMPLO 2:**

Evaluaremos  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$  en varios puntos próximos al  $x = 0$  y usaremos el resultado para estimar el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$$

La gráfica de  $f$  puede verse en la *figura 1.2*.

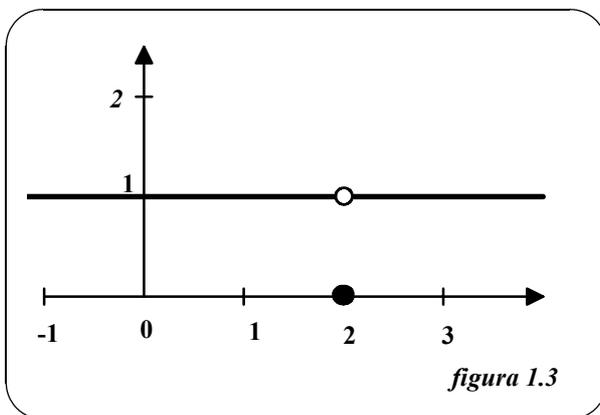
La tabla siguiente muestra los valores de  $f(x)$  en varios  $x$  cercanos al 0:



x se acerca al 0 por la izquierda →					← x se acerca al 0 por la derecha				
$x$	-0'1	-0'01	-0'001	-0'0001	0	0'0001	0'001	0'01	0'1
$f(x)$	1'9487	1'9950	1'9995	1'9999	?	2'0001	2'0005	2'0050	2'0488
					<b>f(x) se acerca al 2 → ← f(x) se acerca al 2</b>				

De donde estimamos que el límite es 2. En este ejemplo, pese a que  $f(x)$  no está definida en  $x = 0$ , parece tender a un límite cuando  $x \rightarrow 0$ . Esto ocurre a menudo y es importante darse cuenta de que al estar o no definido el valor de  $f(x)$  en  $x = a$ , no tienen nada que ver con el hecho de que exista o no límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende hacia  $a$ .

**□ EJEMPLO 3:**



Hallaremos el límite cuando  $x$  tiende a 2 de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases}$$

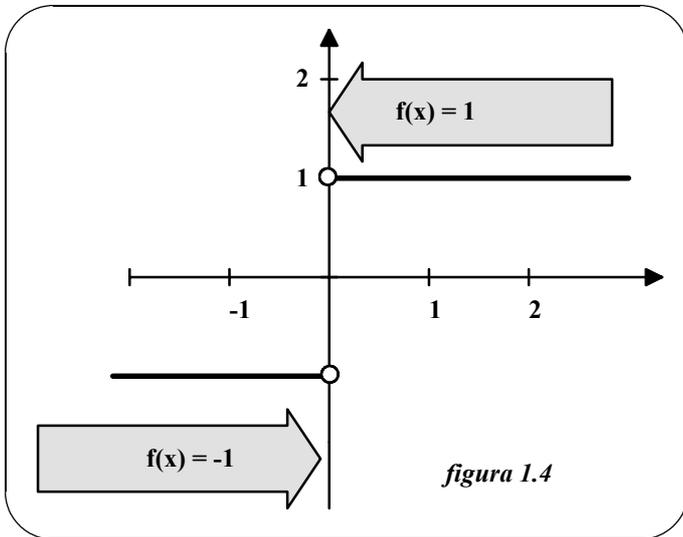
Como  $f(x) = 1$  en todo  $x \neq 2$  y el valor  $f(2)$  no importa concluimos que el límite es 1

(véase *figura 1.3*)

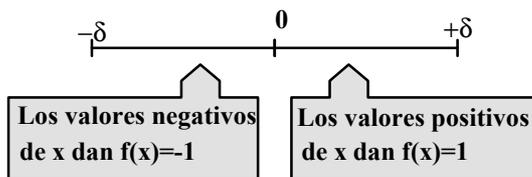
**EJEMPLO 4:**

Intentaremos probar que el siguiente límite no existe:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$

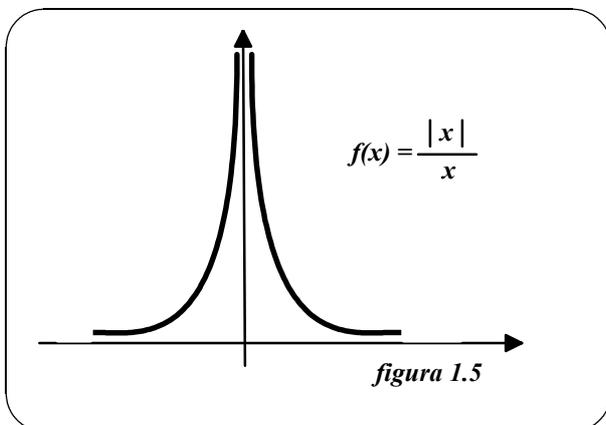


Sea  $f(x) = \frac{|x|}{x}$  la función cuya gráfica aparece en la *figura 1.4*. Podemos ver que para  $x > 0$ , la función toma el valor 1, y para  $x < 0$ , la función toma el valor -1. Concretamente si  $\delta$  es un número positivo, para los  $x$  que cumplen  $0 < |x| < \delta$ , podemos clasificar los valores de  $f(x)$  como sigue:



Esto implica que no existe límite.

**EJEMPLO 5:**



Discutiremos la existencia del límite siguiente:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$

De la *figura 1.5* vemos que cuando  $x$  se acerca a 0 por la derecha o por la izquierda,  $f(x)$  crece sin tope. O sea, que escogiendo  $x$  suficientemente próximo a 0 podemos obligar a que  $f(x)$  crezca cuanto queramos. En efecto, observemos la tabla siguiente:

x se acerca al 0 por la izquierda → ← x se acerca al 0 por la derecha									
x	-0'1	-0'01	-0'001	-0'0001	0	0'0001	0'001	0'01	0'1
f(x)	100	10 <sup>4</sup>	10 <sup>6</sup>	10 <sup>8</sup>	?	10 <sup>8</sup>	10 <sup>6</sup>	10 <sup>4</sup>	100
f(x) se acerca al +∞ → ← f(x) se acerca al +∞									

Así,  $f(x)$  será mayor que 100 si elegimos  $x$  distante de 0 menos de 0'1. Es decir,

$$0 < |x| < 0'1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^2} > 100$$

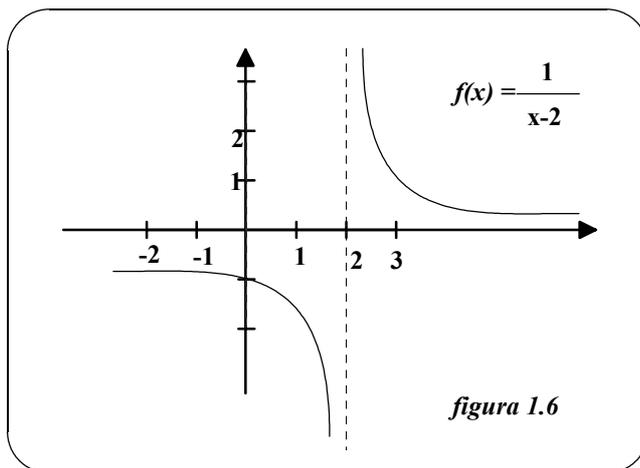
Análogamente, podemos hacer que  $f(x)$  sea mayor que 1.000.000, como sigue:

$$0 < |x| < 0'001 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^2} > 1.000.000$$

En este caso decimos que el límite de la función es  $+\infty$  cuando  $x$  se acerca a 0:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ .

**□ EJEMPLO 6:**

Discutiremos la existencia del siguiente límite:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2}$ .



En la figura se observa que según se aproxime  $x$  a 2 por la derecha o por la izquierda, los valores correspondientes de  $f(x)$  crecen o decrecen sin tope. En efecto, observa la siguiente tabla:

x se acerca al 2 por la izquierda → ← x se acerca al 2 por la derecha									
x	1'9	1'99	1'999	1'9999	0	2'0001	2'001	2'01	2'1
f(x)	-10	-100	-1.000	-10.000	?	10.000	1.000	100	10
f(x) se acerca al -∞ → ← f(x) se acerca al +∞									

A diferencia del ejemplo anterior, en este caso diremos que la función no tiene límite cuando  $x$  se aproxima a 2, puesto que por la derecha los valores de la función se hacen todo lo grandes que queramos, pero por la izquierda se hacen todo lo pequeños que queramos.

**2.- DEFINICIÓN RIGUROSA DE LÍMITE.**

➤ **2.1 Límites reales.**

□ **DEFINICIÓN 1:**

Diremos que la función  $f(x)$  tiene por límite el número real  $L$  cuando  $x$  se aproxima hacia  $a$ , y se escribe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , si y solo si para cada sucesión  $\{x_n\}$  contenida en  $Domf - \{a\}$  y convergente a "a" se tiene que la sucesión  $\{f(x_n)\}$  es convergente a  $L$ .

Se puede demostrar que esta definición es equivalente a las siguientes:

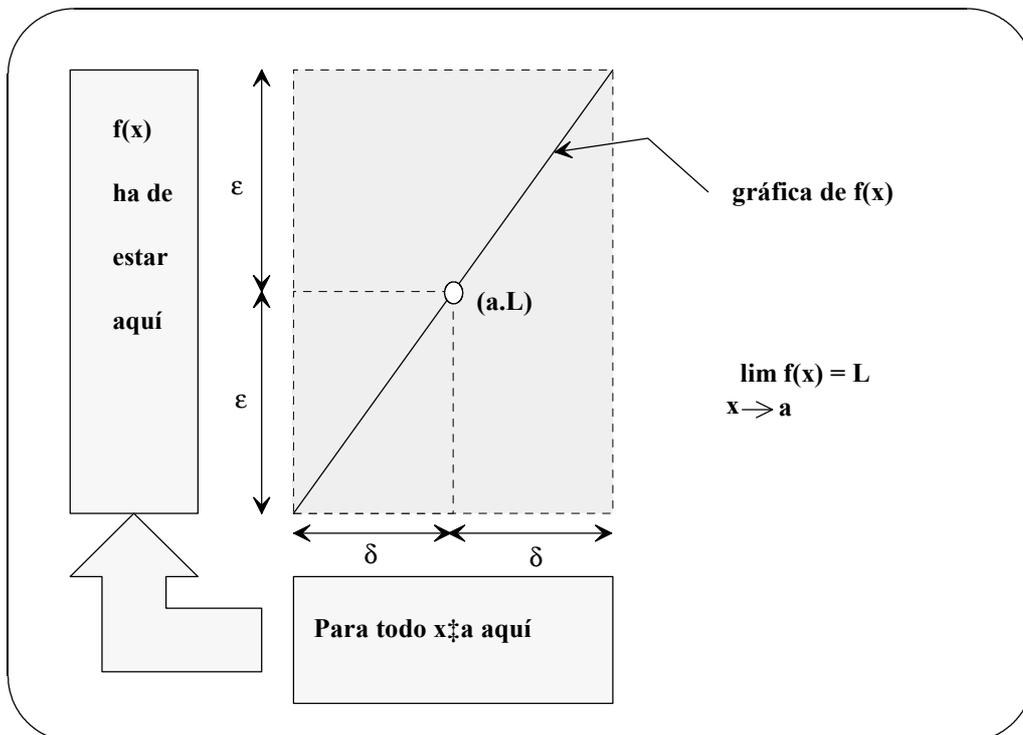
□ **DEFINICIÓN 2:**

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall V = (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$  existe  $U = (a - \delta, a + \delta)$  tal que las imágenes del conjunto  $U \cap Domf - \{a\}$  están contenidas en  $V$ , es decir:

$$\forall V = (L - \varepsilon, L + \varepsilon) \text{ existe } U = (a - \delta, a + \delta) \text{ tal que si } \begin{cases} x \in U \cap Domf \\ x \neq a \end{cases} \text{ entonces } f(x) \in V.$$

□ **DEFINICIÓN 3:**

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que si } \begin{cases} 0 < |x - a| < \delta \\ x \in Domf \end{cases} \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$



□ EJEMPLO 1:

Dado el límite  $\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 5) = 1$  hallar  $\delta$  tal que  $|2x - 5 - 1| < 0'01$  siempre que  $0 < |x - 3| < \delta$ .

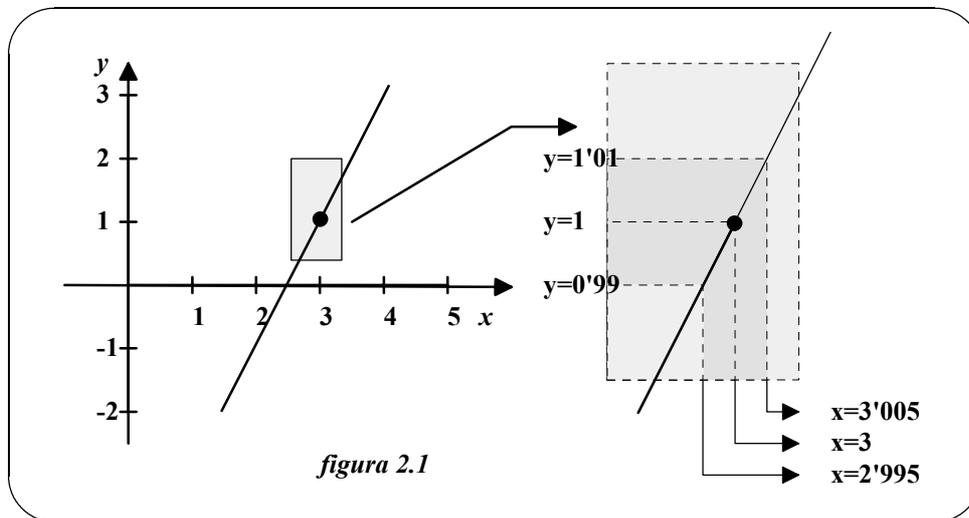
SOLUCIÓN: Tenemos  $\varepsilon$  dado, a saber  $\varepsilon = 0'01$ . Para hallar un  $\delta$  apropiado, intentaremos establecer una relación entre los dos valores absolutos  $|2x - 5 - 1|$  y  $|x - 3|$ . Simplificando el primero, obtenemos

$$|2x - 5 - 1| = |2x - 6| = 2 \cdot |x - 3|$$

Así pues, la desigualdad  $|2x - 5 - 1| < 0'01$  equivale a  $2 \cdot |x - 3| < 0'01$ , y se tiene

$$|x - 3| < \frac{0'01}{2} = 0'005$$

Por tanto, elegimos  $\delta = 0'005$ . Esta elección es adecuada, porque  $0 < |x - 3| < 0'005$  implica que  $|(2x - 5) - 1| = |2x - 6| = 2 \cdot |x - 3| < 2 \cdot 0'005 = 0'01$  como indica la figura (2.1).



□ EJEMPLO 2:

Usando la definición de límite probar que  $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 2) = 4$

SOLUCIÓN: Tenemos que probar que para cada  $\varepsilon > 0$ , existe un  $\delta > 0$  tal que  $|3x - 2 - 4| < \varepsilon$  siempre que  $0 < |x - 2| < \delta$ . Como nuestra elección de  $\delta$  depende de  $\varepsilon$ , intentaremos establecer una conexión entre los valores absolutos  $|3x - 6|$  y  $|x - 2|$ . Simplificando el primero obtenemos:  $|3x - 6| = 3 \cdot |x - 2|$ . Así que la desigualdad

$$|3x - 6| < \varepsilon \text{ exige que } 3 \cdot |x - 2| < \varepsilon \text{ y tenemos que } |x - 2| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ y escogemos } \delta = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Esta elección es correcta, puesto que  $0 < |x - 2| < \delta$  implica que

$$|3x - 6| = 3 \cdot |x - 2| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

➤ **2.2 Propiedades de los límites.**

Ya hemos dicho que el límite de  $f(x)$  cuando  $x \rightarrow a$  no depende del valor de  $f$  en  $x=a$ . No obstante, si ocurre que el límite es precisamente  $f(a)$ , decimos que el límite puede evaluarse por **sustitución directa**. Es decir,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Las funciones con tan buen comportamiento se llaman **continuas en a** y estudiaremos detalladamente este concepto más adelante. Una aplicación interesante de la sustitución directa se ofrece en el siguiente teorema.

□ **TEOREMA 1:**

Sea "a" un número real y  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \neq a$  en un intervalo abierto conteniendo al "a". Si existe el límite de  $g(x)$  cuando  $x \rightarrow a$ , entonces el límite de  $f(x)$  también existe y es

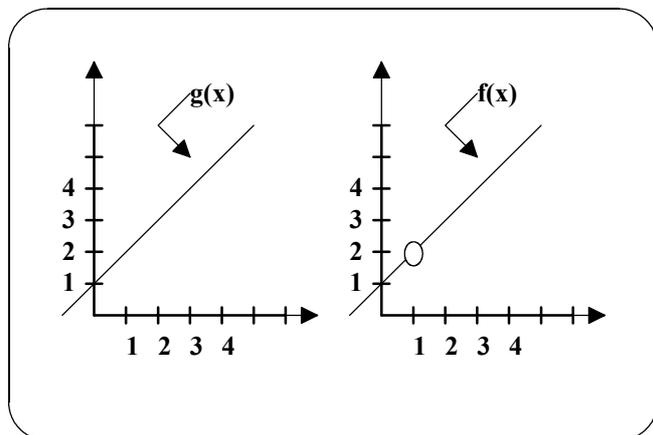
$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

□ **EJEMPLO:**

Podemos probar que las funciones  $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$  y  $g(x) = x+1$  tienen los mismos valores en todo  $x \neq 1$ . En efecto:

$$\text{Si } x \neq 1 \quad f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1 = g(x)$$

En la figura siguiente podemos ver que las gráficas de  $f$  y  $g$  son idénticas para  $x \neq 1$ .



Nótese que no hay salto en la gráfica de  $g(x)$  y que su límite cuando  $x$  tiende a 1 es simplemente

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 1+1 = 2$$

Así pues, aplicando el teorema anterior se deduce que el límite de  $f(x)$  cuando  $x \rightarrow 1$  es también 2.

➤ **2.3 Estrategias para calcular límites.**

1. Aprende a reconocer los límites calculables por sustitución directa.
2. Si el límite de  $f(x)$  cuando  $x \rightarrow a$  no puede evaluarse por sustitución directa, intenta hallar una función  $g$  que coincida con  $f$  en todo  $x \neq a$  (elegir  $g$  de modo que su límite sea calculable por sustitución directa)
3. Aplicando el teorema 1, deducir que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ .

Dedicamos el resto del apartado 2.3 al estudio de límites calculables por sustitución directa. Más adelante trataremos el caso en que esta técnica falle.

### LÍMITES DE FUNCIONES ALGEBRAICAS.

□ **TEOREMA 2:**

Si  $b$  y  $a$  son números reales y  $n$  un entero (positivo si  $a=0$ ), entonces se cumple:

$$1. \lim_{x \rightarrow a} b = b; \quad 2. \lim_{x \rightarrow a} x = a; \quad 3. \lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$$

□ **TEOREMA 3:**

Si  $b$  y  $a$  son números reales y  $n$  un entero positivo y  $f, g$  funciones que tienen límite cuando  $x \rightarrow a$  entonces son ciertas las propiedades siguientes:

$$1. \lim_{x \rightarrow a} [b \cdot f(x)] = b \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$3. \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] \cdot \left[ \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right]$$

$$4. \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \text{ si } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$$

$$5. \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n$$

□ **TEOREMA 4:**

Si  $p(x)$  es un polinomio y  $a$  es un número real, entonces  $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a)$

□ **TEOREMA 5:**

Si  $r(x)$  es una función racional dada por  $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  y  $a$  es un número real tal que  $q(a) \neq 0$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow a} r(x) = r(a) = \frac{p(a)}{q(a)}$ .

□ **TEOREMA 6:**

Si  $a$  es un número real,  $n$  y  $m$  enteros positivos\*, y  $f$  una función cuyo límite en  $a$  existe, entonces son ciertas las siguientes propiedades:

$$1. \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow a} x^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{\frac{m}{n}} = \left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^{\frac{m}{n}}$$

(\*) Si  $n$  es par, supondremos que  $a > 0$  y  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0$ .

□ **EJEMPLOS:**

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} 3 = 3;$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 2^2 = 4$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 3} (4x^2 - 2x + 5) = 4 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 + 5 = 35$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x+2}{x+1} = \frac{1^2+1+2}{1+1} = \frac{4}{2} = 2$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{2x^2 - 2} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} 2x^2 - 2} = \sqrt{18 - 2} = \sqrt{16} = 4$$

➤ **2.4 Técnicas para calcular límites.**

En el apartado 2.3 hemos catalogado varios tipos de límites calculables por *sustitución directa*. Ahora presentaremos técnicas para reducir otros límites a esa forma.

**TÉCNICA DE CANCELACIÓN**

Si pretendemos calcular el límite cuando  $x \rightarrow -3$  de la función  $\frac{x^2+x-6}{x+3}$ , pese a ser una función racional, no puede aplicarse el *Teorema 5* porque el límite del denominador es cero. Sin embargo ya que el límite del numerador también es cero, sabemos que el numerador y el denominador tienen *el factor común* ( $x + 3$ ). Así que para todo  $x \neq -3$ , podemos cancelar tal factor para obtener

$$\frac{x^2+x-6}{x+3} = \frac{(x+3)(x-2)}{(x+3)} = x - 2$$

Finalmente por el *Teorema 1*, se sigue que:

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2+x-6}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -3} (x - 2) = -5$$

En este ejemplo, la sustitución directa conducía a la expresión indefinida  $\frac{0}{0}$ , que llamaremos una **forma indeterminada** por cuanto no podemos (a partir sólo de esa expresión) calcular su límite. Cuando se intenta evaluar un límite y uno se topa con esta forma, debe modificarse la fracción de manera tal que el nuevo denominador no tenga límite cero. Una manera de lograrlo es *cancelando factores iguales* (ejemplo anterior). Otra consiste en *racionalizar el numerador o el denominador* (ejemplo siguiente).

**CÁLCULO DE UN LÍMITE POR RACIONALIZACIÓN**

La sustitución directa en el cálculo de  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$  nos lleva a la forma indeterminada  $\frac{0}{0}$ . En este caso, cambiamos la forma de la fracción racionalizando el numerador:

$$\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{(x+1)-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$$

En consecuencia,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

La tabla siguiente refuerza nuestra conclusión de que el límite es  $1/2$ .

<b>x tiende a 0 por la izquierda → ← x tiende a 0 por la derecha</b>									
<i>x</i>	-0'25	-0'1	-0'01	-0'001	0	0'001	0'01	0'1	0'25
<i>f(x)</i>	0'5359	0'5132	0'5013	0'5001	?	0'4999	0'4988	0'4881	0'4721
<b><i>f(x)</i> tiende a 1/2 → ← <i>f(x)</i> tiende a 1/2</b>									

### 3.- CONTINUIDAD Y LÍMITES LATERALES.

El término *continuo* tiene el mismo sentido en matemáticas que en el lenguaje cotidiano. Decir que una función *f* es continua en  $x = c$  significa que su gráfica no sufre interrupción en  $c$ , que ni se rompe ni tiene saltos o huecos. Por ejemplo, la *Figura 3.1* muestra tres valores de  $x$  ( $c_1$ ,  $c_2$  y  $c_3$ ) en los que *f* no es continua. En los demás puntos del intervalo  $(a, b)$  la gráfica no se interrumpe y decimos que *f* es continua en ellos. Así pues, la continuidad de una función en  $x = c$  se destruye por alguna de estas causas:

1. La función no está definida en  $c$ .
2. El límite de  $f(x)$  en  $x = c$  no existe.
3. El límite de  $f(x)$  en  $x = c$  existe, pero no coincide con  $f(c)$ .

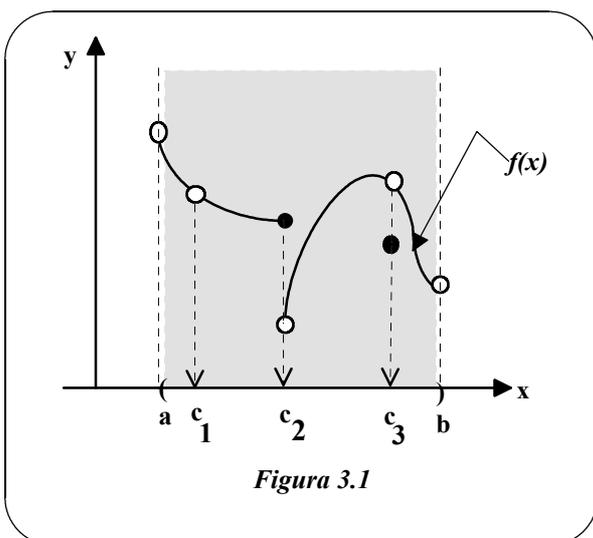
Todo ello conduce a la siguiente definición:

□ **DEFINICIÓN 1:**

**Continuidad en un punto:** Una función *f* se dice **continua en  $c$**  si se verifican las siguientes condiciones:

1.  $f(c)$  está definido.
2.  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  existe.
3.  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ .

**Continuidad en un intervalo abierto:** Una función *f* se dice **continua en un intervalo  $(a,b)$**  si lo es en todos los puntos de ese intervalo.



**Figura 3.1**

Se dice que una función *f* es **discontinua en  $c$**  si *f* está definida en un intervalo abierto que contiene  $ac$  (excepto quizás en  $c$ ) y *f* no es continua en  $c$ . Las discontinuidades pueden ser de dos tipos fundamentales: **evitables** e **inevitables**. Se dice que una discontinuidad en  $x = c$  es evitable si *f* puede hacerse continua redefiniéndola en  $x = c$ . Así, en la *Figura 3.1* la función tiene dos discontinuidades evitables ( $c_1$  y  $c_3$ ) y una inevitable en  $c_2$ . (Nota: Más adelante daremos una clasificación más precisa de las discontinuidades.)

□ **EJEMPLOS:**

1. La función  $f(x) = \frac{1}{x}$  en el intervalo  $(0,1)$  es racional con denominador no nulo en dicho intervalo, luego por el teorema 5 del apartado anterior concluimos que  $f$  es continua en  $(0,1)$ .

2. La función  $g(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$  en el intervalo  $(0,2)$  no está definida en  $x=1$ , luego es discontinua en  $x=1$  y continua en el resto del intervalo  $(0,2)$ .

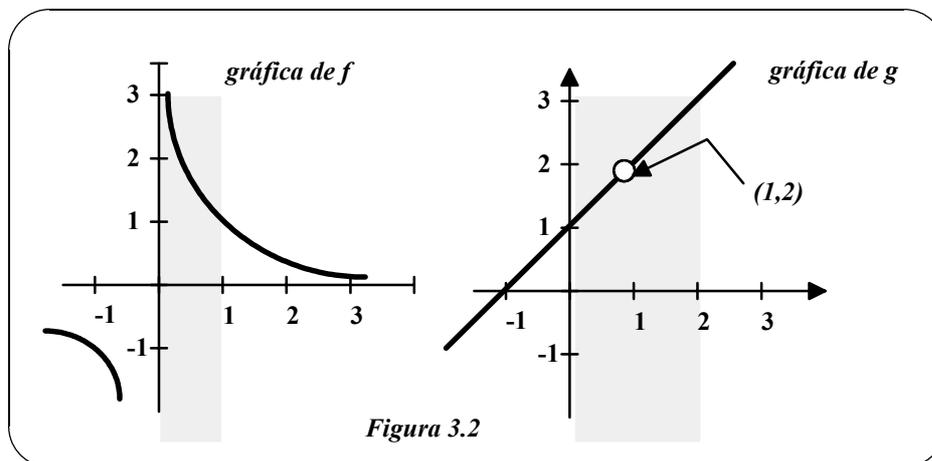


Figura 3.2

Los intervalos de los ejemplos anteriores eran abiertos. Para discutir la continuidad en intervalos cerrados, necesitamos los **límites laterales**. Por ejemplo, cuando hablamos de límite por la derecha queremos decir que  $x$  tiende a  $c$  desde valores mayores que  $c$ . Denotamos esto por

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L \quad (\text{límite por la derecha})$$

Análogamente, el límite por la izquierda significa que  $x$  tiende a  $c$  desde valores menores que  $c$ . Lo denotamos por

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L \quad (\text{Límite por la izquierda})$$

□ **DEFINICIÓN 2:**

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tal que} \quad \begin{cases} 0 < x - c < \delta \\ x \in \text{Dom}f \end{cases} \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

□ **DEFINICIÓN 3:**

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tal que} \quad \begin{cases} 0 < c - x < \delta \\ x \in \text{Dom}f \end{cases} \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

□ **TEOREMA 7:**

Si  $f$  es una función y  $c, L$  números reales, entonces  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$  si y sólo si se verifica que  $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$  y  $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L$ .

Los límites laterales son útiles al tratar funciones con radicales, funciones escalonadas y en el estudio de la continuidad como veremos en los siguientes ejemplos.

□ **EJEMPLOS:**

1. Consideremos la función  $f(x) = \sqrt{3-x}$  cuyo dominio son los números reales menores o iguales que 3. Puesto que no está definida para los números mayores que 3, calcularemos el límite cuando  $x$  tiende a 3 por la izquierda. Como se puede observar en la figura 3.3, dicho límite viene dado por  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 0$ .

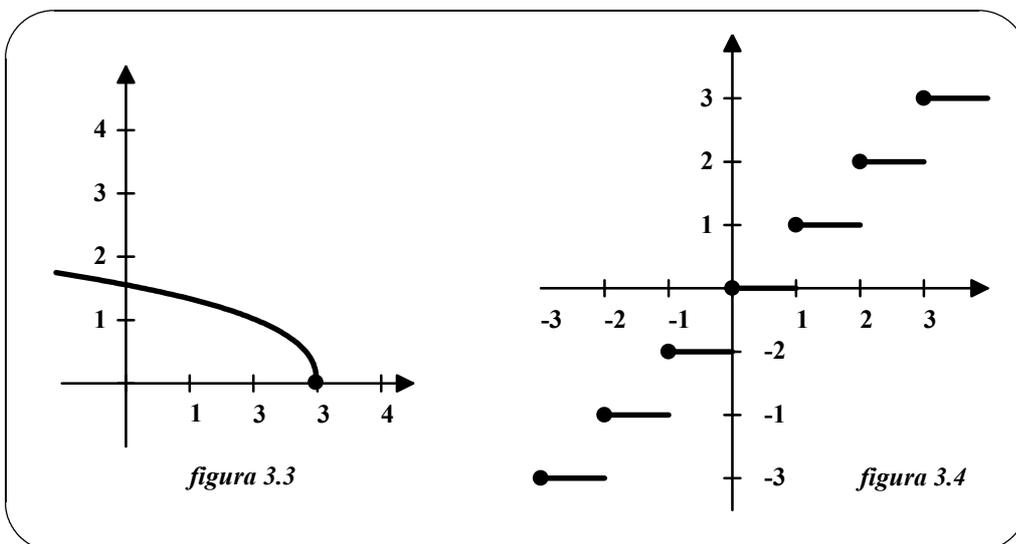
2. La función **parte entera**  $[x]$  viene definida por

$$[x] = \text{mayor entero } n \text{ tal que } n \leq x.$$

Hallaremos su límite cuando  $x$  tiende a 0 por ambos lados. En la figura 3.4 podemos ver que los límites laterales son

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [x] = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} [x] = -1$$

y que por lo tanto la función parte entera es discontinua en  $x=0$  (y en todos los enteros). La causa es que los límites laterales son distintos entre sí. En tales casos decimos que el límite **no existe**.



Ahora que hemos definido los límites laterales ya podemos definir la continuidad en intervalos cerrados.

□ **DEFINICIÓN 4:**

Si  $f$  está definida en un intervalo cerrado  $[a, b]$ , es continua en  $(a, b)$  y además verifica que  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$  y  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$  se dice que  **$f$  es continua en  $[a, b]$** .

□ **EJEMPLO:**

Para estudiar la continuidad de  $g(x) = \begin{cases} 5-x, & -1 \leq x \leq 2 \\ x^2-1, & 2 < x \leq 3 \end{cases}$  en  $[-1, 3]$  debemos comprobar si se verifica la definición anterior.

Por el *Teorema 4* sabemos que los polinomios  $5 - x$  y  $x^2 - 1$  son continuos para todo real  $x$ . Luego para ver si  $g$  es continua en  $[-1,3]$  basta estudiar el comportamiento de  $g$  en  $x = 2$ . Tomando límites laterales para  $x = 2$ , vemos que

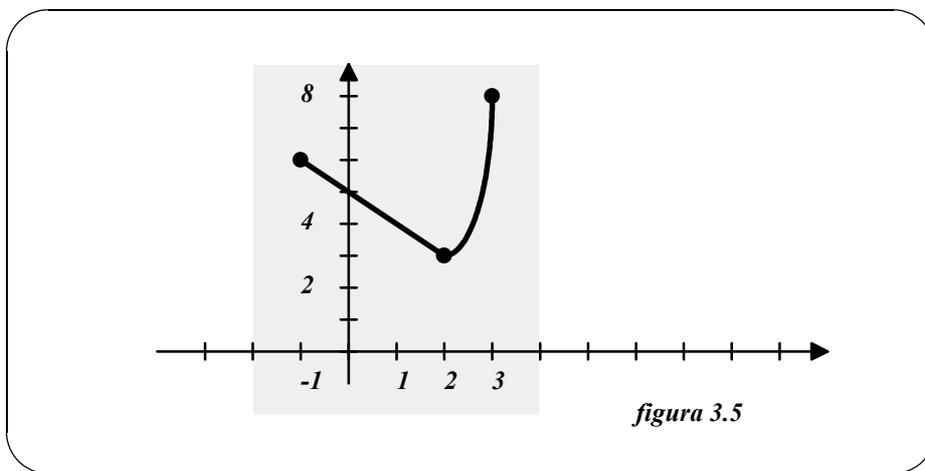
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (5 - x) = 3$$

$$\text{y } \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 1) = 3$$

Como estos dos límites coinciden, el *Teorema 7* permite concluir que

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3$$

Además, como  $g(2) = 3$ , se deduce que  $g$  es continua en  $x = 2$ , y en consecuencia en el intervalo  $[-1,3]$ . La gráfica de  $g$  se presenta en la figura 3.5.



**□ DEFINICIÓN 5:**

1.  $f$  es continua por la derecha en  $c \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$

2.  $f$  es continua por la izquierda en  $c \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c)$

**□ TEOREMA 8:**

$f$  continua en  $c \Leftrightarrow f$  continua por la derecha y por la izquierda en  $c$ .

**□ TEOREMA 9: PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS**

Si  $b$  es un número real y  $f, g$  continuas en  $x = c$ , también son continuas en  $c$  las funciones:

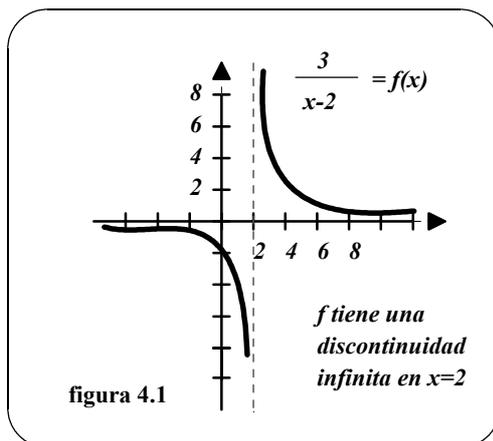
1.  $(b \cdot f)$
2.  $(f \pm g)$
3.  $(f \cdot g)$
4.  $\frac{f}{g}$ , si  $g(c) \neq 0$

**4.- LÍMITES INFINITOS.**

➤ **4.1 Límites infinitos.**

Vamos a ver otra manera en que la existencia de límite puede fallar: si la función tiene una discontinuidad infinita. Comencemos con un ejemplo.

□ **EJEMPLO 1:**



Sea  $f(x) = \frac{3}{x-2}$ . De la figura 4.1 y la tabla siguiente, vemos que  $f$  *decrece sin cota* cuando  $x$  tiende a 2 por la izquierda y *crece sin cota* cuando  $x$  tiende a 2 por la derecha. Escribiremos simbólicamente

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{x-2} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{x-2} = +\infty$$

x se acerca al 2 por la izquierda →						← x se acerca al 2 por la derecha					
x	1	1'5	1'9	1'99	1'999	2	2'001	2'01	2'1	2'5	3'0
f(x)	-3	-6	-30	-300	-3.000	?	3.000	300	30	6	3
f(x) decrece sin límite →						← f(x) crece sin límite					

En este ejemplo, como los límites laterales son distintos, diremos que la función no tiene límite cuando  $x$  se acerca a 2.

□ **DEFINICIÓN 1:**

1. La afirmación  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty$  significa que  $\forall K > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $\begin{cases} 0 < |x - c| < \delta \\ x \in \text{Dom}f \end{cases} \Rightarrow f(x) > K$ .
2. La afirmación  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$  significa que  $\forall N < 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $\begin{cases} 0 < |x - c| < \delta \\ x \in \text{Dom}f \end{cases} \Rightarrow f(x) < N$

La definición anterior se ilustra en la **figura 4.2**.

□ **DEFINICIÓN 2:**

Para definir el *límite infinito por la izquierda*, sustituimos

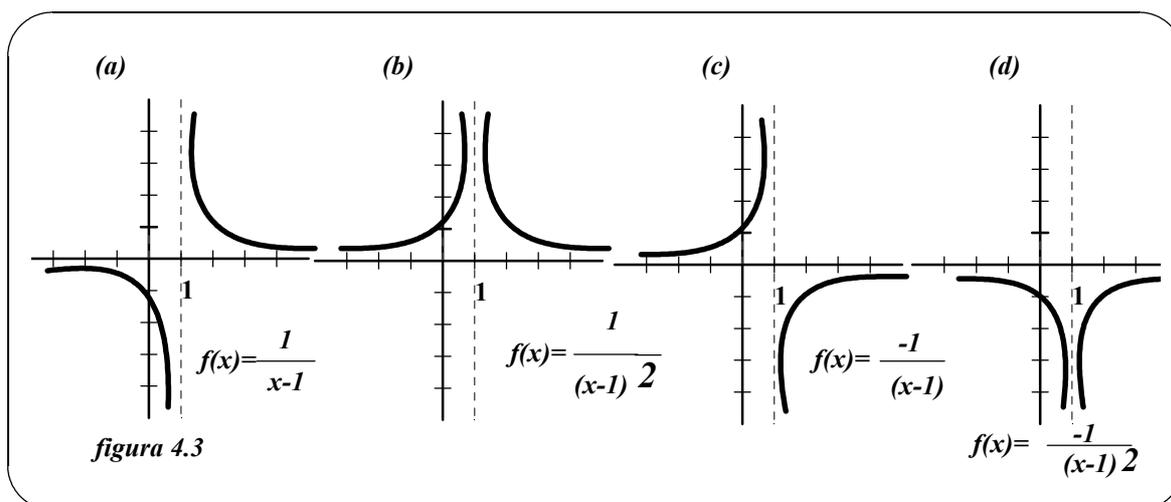
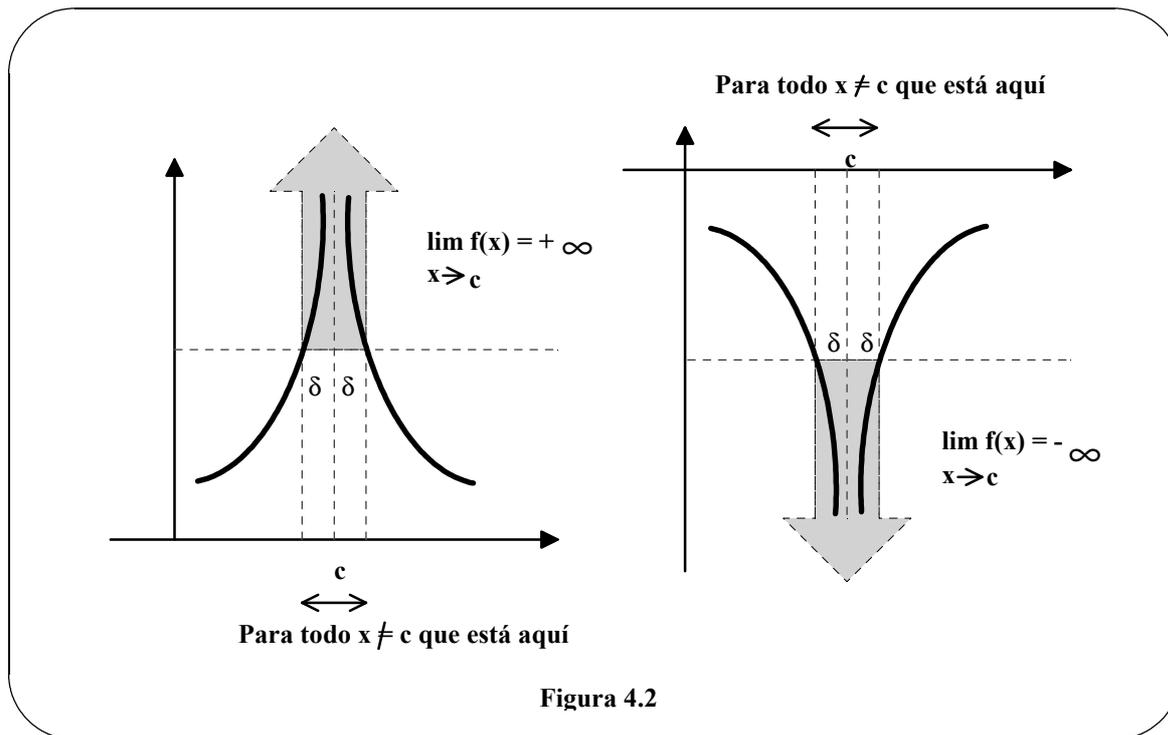
$$0 < |x - c| < \delta \text{ por } c - \delta < x < c$$

y para definir el **límite infinito por la derecha**, sustituimos

$$0 < |x - c| < \delta \text{ por } c < x < c + \delta$$

□ **DEFINICIÓN 3:**

Si  $f(x) \rightarrow \pm\infty$  por la izquierda o por la derecha, diremos que  $f$  tiene en  $c$  una **discontinuidad infinita**.



□ **EJEMPLO 2:**

Utilizando la figura 4.3 hallaremos el límite de cada función cuando  $x$  se aproxima a 1 por ambos lados.

(a)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$ ; El límite por ambos lados es  $+\infty$ .

(c)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{x-1} = +\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1}{x-1} = -\infty$

(d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{(x-1)^2} = -\infty$ ; El límite por ambos lados es  $-\infty$ .

≥ **4.2 Asíntotas verticales.**

Si fuese posible extender las gráficas de la figura 4.3 hacia el infinito, veríamos que son más y más próximas a la recta vertical  $x = 1$ . Llamaremos a esta recta una **asíntota vertical** de la gráfica de  $f$ .

□ **DEFINICIÓN 4:**

Si  $f(x)$  tiende hacia  $+\infty$  (o  $-\infty$ ) cuando  $x$  tiende a  $c$  por la izquierda o por la derecha, diremos que la recta  $x = c$  es una **asíntota vertical** de la gráfica de  $f$ .

En el ejemplo 2, nótese que cada función es un cociente y que la asíntota vertical ocurre en el punto donde el denominador es cero. El próximo teorema generaliza esta observación.

□ **TEOREMA 1:**

Sean  $f$  y  $g$  continuas en un intervalo abierto conteniendo a  $c$ . Si  $f(c) \neq 0$ ,  $g(c)=0$ , y existe un intervalo abierto conteniendo a  $c$  tal que  $g(x) \neq 0 \quad \forall x \neq c$  en el intervalo, entonces la gráfica de la función dada por

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

tiene una asíntota vertical en  $x = c$ .

□ **EJEMPLO 3:**

Determina las asíntotas verticales de las siguientes funciones:

(a)  $f(x) = \frac{1}{2(x+1)}$  ; (b)  $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

**SOLUCIÓN:**

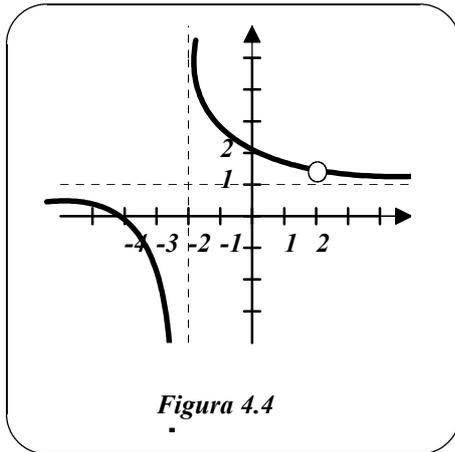
(a) En el punto  $x = -1$ , el denominador es cero y el numerador no es cero. Luego por el teorema 1 concluimos que  $x = -1$  es una asíntota vertical.

(b) Factorizando el denominador como  $x^2 - 1 = (x - 1).(x + 1)$ , vemos que es cero en  $x = -1$  y  $x = 1$ . Además, como el numerador no es cero en esos puntos, concluimos por el teorema 1 que la gráfica de  $f$  tiene dos asíntotas verticales.

El Teorema 1 exige que el valor del numerador y denominador en  $x = c$  sea no nulo. Si ambos, numerador y denominador, son nulos en  $x = c$ , obtenemos **la forma indeterminada**  $\frac{0}{0}$  y no podemos determinar el comportamiento límite en  $x = c$  sin más estudio. Un caso en que sí podemos determinarlo es cuando numerador y denominador son polinomios. Y lo hacemos cancelando factores comunes.

□ **EJEMPLO 4:**

Determinar todas las asíntotas verticales de la gráfica de  $f(x) = \frac{x^2+2x-8}{x^2-4}$ .



**Solución:** Factorizando numerador y denominador obtenemos:  $f(x) = \frac{(x+4)(x-2)}{(x+2)(x-2)}$ , por lo que el dominio de la función es  $R - \{+2, -2\}$ . Salvo en  $x = 2$  la gráfica de  $f$  coincide con la de la función  $g(x) = \frac{x+4}{x+2}$ . Por tanto, por el *teorema 1* aplicado a  $g$  se sigue que hay asíntota vertical en  $x = -2$ , como muestra la *figura 4.4*. Analíticamente, podemos comprobar que:

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2+2x-8}{x^2-4} = +\infty \quad y$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2+2x-8}{x^2-4} = -\infty.$$

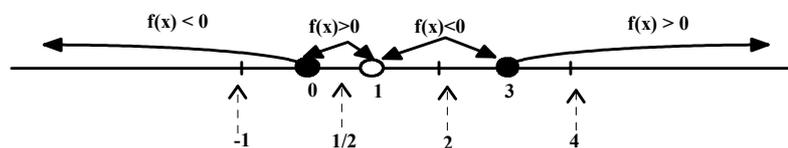
Además, en  $x = 2$  la función  $f(x)$  presenta una discontinuidad evitable pues

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+4)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+4}{x+2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

□ **EJEMPLO 5:**

Hallaremos los límites:  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-3x}{x-1}$  y  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-3x}{x-1}$

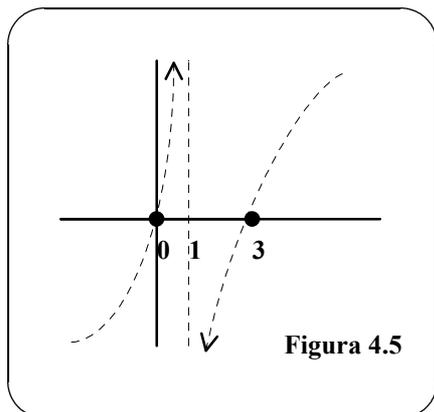
**Solución:** 1.- Factorizamos numerador y denominador  $f(x) = \frac{x(x-3)}{x-1}$ .



$x$	-1	0	1/2	1	2	3	4
$f(x)$	-2	0	5/2	sin definir	-2	0	4/3

2.- La gráfica de  $f$  corta al eje OX en los puntos de abscisa:  $x(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad y \quad x = 3$ .

3.- Si  $x = 1$ , el denominador se hace cero, por lo que  $Domf = R - \{1\}$ . En  $x = 1$  la gráfica presenta una asíntota vertical.



4.- Determinamos el signo de  $f(x)$  en su dominio escogiendo al menos un punto entre cada intersección y la asíntota. Anotamos la información obtenida en una tabla para realizar un esbozo de la gráfica, como muestra la figura 4.5.

5.- Finalmente, concluimos que:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-3x}{x-1} = +\infty \quad y$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-3x}{x-1} = -\infty.$$

➤ **4.2 Propiedades de los límite infinitos.**

□ **TEOREMA 2:**

Si  $c, L$  son números reales y  $f, g$  son funciones tales que

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty \quad y \quad \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$$

entonces las siguientes propiedades son válidas:

1.  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \pm g(x)] = +\infty$
2.  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \cdot g(x)] = +\infty, \quad L > 0$
- $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \cdot g(x)] = -\infty, \quad L < 0$
3.  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$

Propiedades similares valen si  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$ .

□ **EJEMPLO 6:**

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{1}{x^2}) = +\infty$  pues  $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$  y  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$  y en consecuencia podemos aplicar la propiedad 1 del teorema 2.

(b)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2+1}{\frac{1}{x-1}} = 0$  pues  $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + 1 = 2$  y  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$  y en consecuencia podemos aplicar la propiedad 3 del teorema 2.

➤ **4.4 Tipos de discontinuidades.**

- Recordemos que los puntos del dominio de una función donde ésta no sea continua se llaman puntos de discontinuidad de la función.
- **Clasificación de las discontinuidades:**

**EVITABLE** si existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \in R$

**INEVITABLE**

**De primera especie** si cumple una de las dos siguientes condiciones:

i) existen los límites laterales de  $f(x)$  cuando  $x$  se aproxima a " $a$ " y, son números reales distintos.

ii) Existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  o bien  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  o bien los límites laterales son infinito de distinto signo.

**De segunda especie** si no existe uno al menos de los límites laterales.

**5.- LÍMITES EN EL INFINITO.**

➤ **5.1 Límites en el infinito.**

En este apartado analizaremos con más detalle el comportamiento de funciones en intervalos *infinitos*.

□ **EJEMPLO 1:**

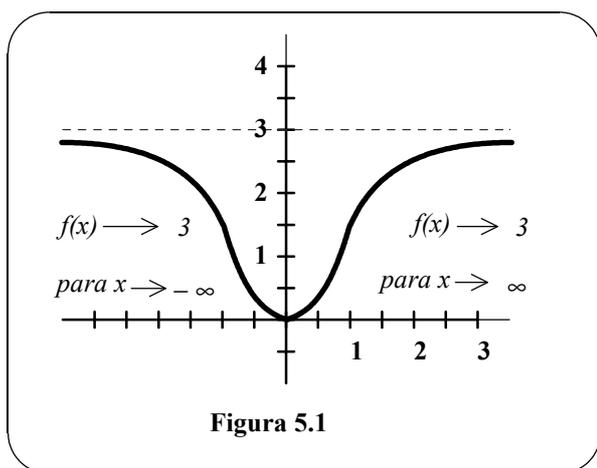


Figura 5.1

Consideremos la gráfica de la función  $f(x) = \frac{3x^2}{x^2+1}$  que se muestra en la figura 5.1. La tabla sugiere que el valor de  $f(x)$  tiende a 3 cuando  $x$  crece sin cota ( $x \rightarrow \infty$ ). Análogamente,  $f(x)$  tiende a 3 cuando  $x$  decrece sin cota ( $x \rightarrow -\infty$ ). Denotaremos esos **límites en el infinito** por

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3 \quad y$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3.$$

	← x decrece sin límite				x crece sin límite →				
$x$	$-\infty \leftarrow$	-100	-10	-1	0	1	10	100	$\rightarrow +\infty$
$f(x)$	$3 \leftarrow$	2'9997	2'97	1'5	0	1'5	2'97	2'9997	$\rightarrow 3$
$f(x)$ tiende hacia 3					$f(x)$ tiende hacia 3				

□ **DEFINICIÓN 1:**

i) La afirmación  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$  significa que para cada  $\varepsilon > 0$  existe un  $M > 0$  tal que  $|f(x) - L| < \varepsilon$  siempre que  $x > M$ .

ii) La afirmación  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$  significa que para cada  $\varepsilon > 0$  existe un  $N < 0$  tal que  $|f(x) - L| < \varepsilon$  siempre que  $x < N$ .

Esta definición queda ilustrada en la *figura 5.2*.

➤ **5.2 Asíntotas horizontales.**

En la mencionada figura se puede observar que la gráfica de  $f$  se acerca a la recta  $y = L$ . La llamaremos **asíntota horizontal** de  $f$ .

□ **DEFINICIÓN 2:**

Si  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$  o  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$  entonces la recta  $y = L$  se llama una **asíntota horizontal** de la gráfica de  $f$ .

**NOTA:** Es claro que la gráfica de una función de  $x$  puede tener a lo sumo dos asíntotas horizontales, una por la derecha y otra por la izquierda.

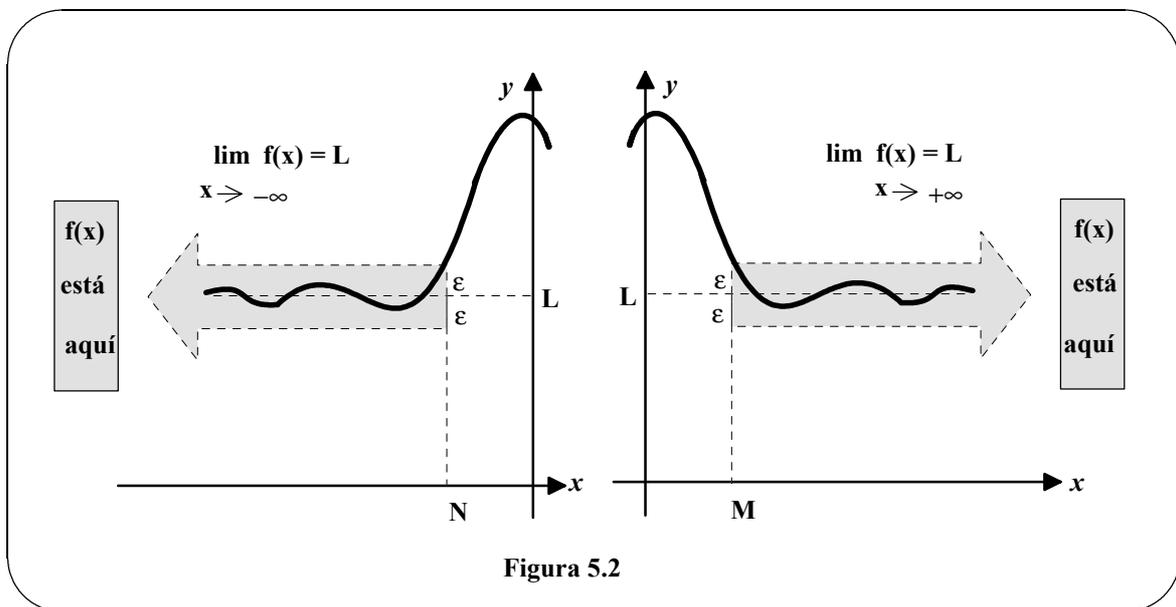


Figura 5.2

➤ **5.3 Propiedades de los límites en el infinito.**

Las propiedades que enunciaremos a continuación para  $x \rightarrow \infty$ , son también válidas para  $x \rightarrow -\infty$ .

□ **TEOREMA 1:**

Si  $b$  es un número real,  $n$  entero  $> 0$  y las funciones  $f, g$  tienen límites cuando  $x \rightarrow +\infty$ , las siguientes propiedades son válidas:

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} b = b$
2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} [b \cdot f(x)] = b \cdot \left[ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \right]$
3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) \text{ y } \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)} \text{ si } \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \neq 0$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x)]^n = \left[ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \right]^n$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)}$$

□ **TEOREMA 2:**

Si  $r$  es positivo y racional, y  $c$  cualquier número real, entonces  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{c}{x^r} = 0$ .

Además, si  $x^r$  está definido cuando  $x < 0$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{c}{x^r} = 0$ .

□ **EJEMPLOS:**

1. Hallaremos  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(5 - \frac{2}{x^2}\right)$ . Utilizando el Teorema 2 y las propiedades 1 y 3 del Teorema 1, tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(5 - \frac{2}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} 5 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2} = 5 - 0 = 5.$$

2. Para calcular el límite  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{x+1}$  no podemos aplicar el Teorema 1 directamente, porque ni el numerador ni el denominador tienen límite real cuando  $x \rightarrow \infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{x+1} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} (2x-1) = \infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} (x+1) = \infty \end{cases}$$

Sin embargo, sí podemos aplicarlo si dividimos antes numerador y denominador por  $x$ , con lo que se obtiene:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 2 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}} = \frac{2-0}{1+0} = 2$$

Luego la recta  $y = 2$  es asíntota horizontal por la derecha. Tomando el límite  $x \rightarrow -\infty$ , podemos ver que  $y = 2$  es asíntota horizontal por la izquierda.

En el ejemplo 2, nuestra intención fue aplicar el Teorema 1, pero conducía a la **forma indeterminada**  $\frac{\infty}{\infty}$ . Pudimos solventar la dificultad expresando en una forma equivalente el cociente; en concreto, dividiendo numerador y denominador por la mayor potencia de  $x$ .

Aplicaremos el mismo método en los ejemplos siguientes:

□ **EJEMPLOS:**

3. Para calcular el límite  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+5}{3x^2+1}$  dividimos numerador y denominador por  $x^2$  y aplicando el Teorema 1 obtenemos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}}{3 + \frac{1}{x^2}} = \frac{0+0}{3+0} = 0.$$

4. En este caso, dividimos por  $x^2$ , con lo que resulta:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+5}{3x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{5}{x^2}}{3+\frac{1}{x^2}} = \frac{2+0}{3+0} = \frac{2}{3}.$$

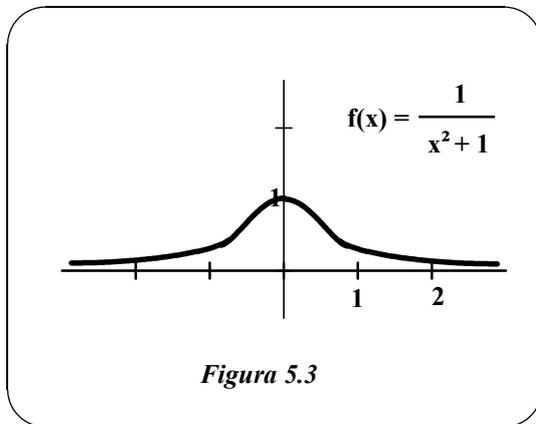
5. En este último ejemplo, dividimos por  $x^3$ , con lo que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3+5}{3x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{5}{x^3}}{\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}} = \frac{2+0}{0+0} = \infty$$

Es interesante comparar las funciones de los ejemplos 3, 4 y 5. En el 3º el grado del numerador es *menor* que el del denominador y el límite de la función es cero. En el 4º los grados son *iguales* y el límite es sencillamente el cociente de los dos coeficientes principales 2 y 3. Por fin, en el 5º el grado del numerador es *mayor* que el del denominador y no existe límite real, el límite es  $+\infty$ . Esto parece razonable si nos damos cuenta de que para grandes valores de  $x$  el término con mayor potencia de  $x$  es el que domina. Por ejemplo, el límite, cuando  $x$  tiende a infinito, de

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

es cero, puesto que el denominador excede en potencia al numerador. (Figura 5.3).



La función anterior es un caso especial de un tipo de curva estudiada por la italiana María Gaetana Agnesi (1.717-1783). En la figura podemos observar que  $f(x)$  tiende hacia la misma asíntota horizontal por la derecha y por la izquierda. Esto es,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

Siempre ocurre así con las funciones racionales. Sin embargo, funciones no racionales pueden tener asíntotas horizontales distintas a izquierda y derecha, como ilustra el Ejemplo 6.

□ **EJEMPLO 6:**

Calcular: (a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}$  ; (b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}$

**SOLUCIÓN:** (a) Para aplicar el Teorema 1, dividimos numerador y denominador por  $x$ . Como  $\sqrt{x^2} = x$  para  $x > 0$ , tenemos que

$$\frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}} = \frac{3-\frac{2}{x}}{\frac{\sqrt{2x^2+1}}{\sqrt{x^2}}} = \frac{3-\frac{2}{x}}{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}$$

Por tanto,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-\frac{2}{x}}{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}} = \frac{3-0}{\sqrt{2+0}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \approx 2'12$$

(b) Para  $x \rightarrow -\infty$ , es  $x < 0$  y  $x = -\sqrt{x^2}$ . Luego,

$$\frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}} = \frac{3-\frac{2}{x}}{\frac{\sqrt{2x^2+1}}{-\sqrt{x^2}}} = \frac{3-\frac{2}{x}}{-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}$$

Por tanto,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-\frac{2}{x}}{-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}} = \frac{3-0}{-\sqrt{2+0}} = -\frac{3}{\sqrt{2}} \approx -2'12$$