Límites y continuidad

1. En los apartados siguientes, usar la gráfica de las funciones para hallar el límite si existe:

(a) $\lim\limits_{x\to 3}(4-x)$ ***(b)*** $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+2)$ ***(c)*** $\lim\limits_{x\to 2} f(x);\ f(x)=\begin{cases} 4-x, & x\neq 2 \\ 0, & x=2 \end{cases}$

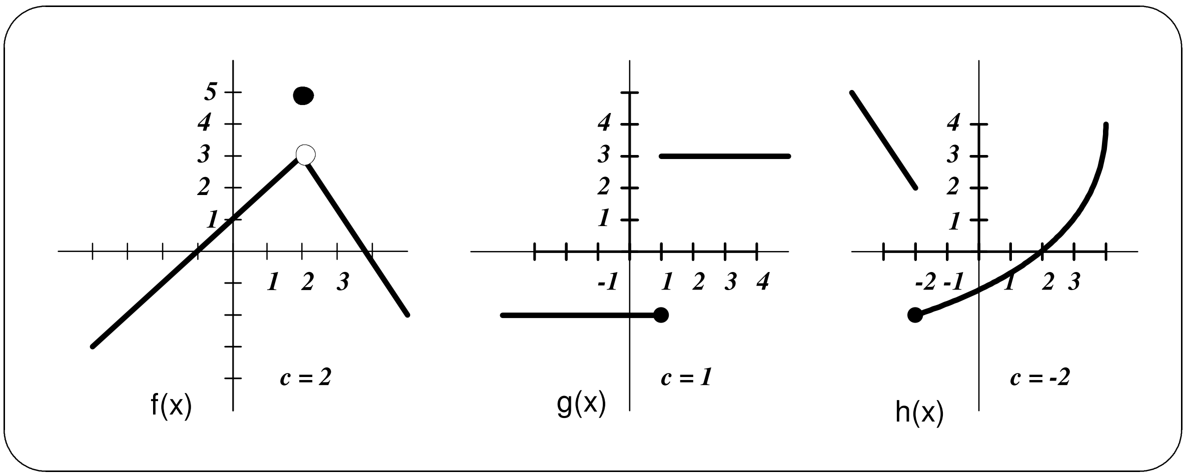
(d) $\lim\limits_{x\to 1} f(x);\ f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\neq 1 \\ 1, & x=1 \end{cases}$ ***(e)*** $\lim\limits_{x\to 5}\frac{|x-5|}{x-5}$ ***(f)*** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{x-3}$

2. Calcula los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-x-2}$ ***(b)*** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}$ ***(c)*** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$ ***(d)*** $\lim\limits_{x\to -3}\frac{\sqrt{1-x}-2}{x+3}$

(e) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\frac{1}{x+1}-\frac{1}{4}}{x-3}$ ***(f)*** $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\frac{x}{x+1}-\frac{4}{5}}{x-4}$

3. Determina gráficamente los límites $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ de las siguientes funciones:



4. Hallar, si existen, los siguientes límites*:*

$(a)\ \lim\limits_{x\to 5^+}\frac{x-5}{x^2-25};\quad (b)\ \lim\limits_{x\to 4^-}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4};\quad (c)\ \lim\limits_{x\to 2^+}\frac{2-x}{x^2-4}$

$(d)\ \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2-2x+1}{x-1};\quad (e)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x};\quad (f)\ \lim\limits_{x\to 2}\frac{|x-2|}{x-2}$

$(g)\ \lim\limits_{x\to 3} f(x),\quad donde\quad f(x)=\begin{cases} \frac{x+2}{2}, & x\leq 3 \\ \frac{12-2x}{3}, & x>3 \end{cases}$

$(h)\ \lim\limits_{x\to 2} f(x),\quad donde\quad f(x)=\begin{cases} x^2-4x+6, & x<2 \\ -x^2+4x-2, & x\geq 2 \end{cases}$

$(i)\ \lim\limits_{x\to 1} f(x),\quad donde\quad f(x)=\begin{cases} x^3+1, & x<1 \\ x+1, & x\geq 1 \end{cases}$

$(j)\ \lim\limits_{x\to 1} f(x),\quad donde\quad f(x)=\begin{cases} x, & x\leq 1 \\ 1-x, & x>1 \end{cases}$

5. Determina los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones:

$(a)\quad f(x)=\frac{-x^3}{2};\quad (b)\quad f(x)=\frac{x^2-1}{x};\quad (c)\quad f(x)=\frac{x^2-1}{x+1};\quad (d)\quad f(x)=\frac{1}{x^2-4}$

$(e)\quad f(x)=\frac{1}{x-1};\quad (f)\quad f(x)=\frac{x}{x^2+1};\quad (g)\quad f(x)=\frac{x+2}{x^2-3x-10}$

$(h)\quad f(x)=\begin{cases} -2x+3, & x<1 \\ x^2, & x\geq 1\end{cases}\qquad (i)\quad f(x)=\begin{cases} -2x, & x\leq 2 \\ x^2-4x+1, & x>2\end{cases}$

6. Hallar *a* tal que la función $f(x)=\begin{cases} x^3, & x\leq 2 \\ ax^2, & x>2\end{cases}$ sea continua.

7. Hallar *a* y *b* de modo que hagan continua la función $f(x)=\begin{cases} 2, & x\leq -1 \\ ax+b, & -1<x<3 \\ -2, & x\geq 3\end{cases}$

8. Calcular $\lim_{x\to -3^+} f(x)\;\; y \;\; \lim_{x\to -3^-} f(x)$ de las siguientes funciones:

$(a)\, f(x)=\frac{1}{x^2-9}\quad (b)\quad f(x)=\frac{x}{x^2-9}\quad (c)\quad f(x)=\frac{x^2}{x^2-9}$

9. Calcular $\lim_{x\to -2^+} f(x)\;\; y \;\; \lim_{x\to -2^-} f(x)$ de las funciones:

$(a)\quad f(x)=\frac{1}{(x+2)^2}\quad (b)\quad f(x)=\frac{1}{x+2}$

10. Hallar las asíntotas verticales (si hay) de las funciones:

$f(x)=\frac{1}{x^2};\quad f(x)=\frac{x^2-2}{x^2-x-2};\quad f(x)=\frac{x^3}{x^2-1};\quad f(x)=1-\frac{4}{x^2}$

$f(x)=\frac{4}{(x-2)^3};\quad f(x)=\frac{2+x}{x-2};\quad f(x)=\frac{-4x}{x^2+4};\quad f(x)=\frac{-2}{(x-2)^2}$

11. Hallar los siguientes límites:

$\lim_{x\to 2^+}\frac{x-3}{x-2};\quad \lim_{x\to 1^+}\frac{2+x}{1-x};\quad \lim_{x\to 4^+}\frac{x^2}{x^2-16};\quad \lim_{x\to 4}\frac{x^2}{x^2+16};$

$\lim_{x\to 0^-}(1+\frac{1}{x});\quad \lim_{x\to 0^-}(x^2-\frac{1}{x});\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{(x^2+1).(x-1)};\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2+x+1}$

12. Determina las asíntotas horizontales de las siguientes funciones:

$(a)\quad f(x)=\frac{3x^2}{x^2+2};\quad (b)\quad f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+2}};\quad (c)\quad f(x)=\frac{x}{x^2+2}$

$(d)\quad f(x)=2+\frac{x^2}{x^4+1};\quad (e)\quad f(x)=\frac{-6x}{\sqrt{4x^2+5}};\quad (f)\quad f(x)=5-\frac{1}{x^2+1}$

13. Halla los siguientes límites:

$(a)\ \lim_{x\to\infty}(\frac{3x-2}{3x+4})^{4x-2}\qquad (b)\ \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-2x}{3x^2+5}\right)^{5x}\qquad (c)\ \lim_{x\to\infty}\left(4x-\sqrt{3x^2+5x}\right)$

$(d)\ \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+5}+2x\right)\qquad (e)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{5x-3}{\sqrt{3x^2+2}}\qquad (f)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2-2x}{5x^2+2x}\right)^{3x^2}$

$(g)\ \lim_{x\to 3}\frac{2x-\sqrt{5x^2-9}}{x^2-9}\qquad (h)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4x+16}-4}{3x^2-2x}\qquad (i)\ \lim_{x\to 1}(\frac{3x-2}{4x+2})^{\frac{-5}{(x-1)^2}}$

14. Dada la función $f(x)=\begin{cases} x-3, x\neq 1 \\ 3, x=1 \end{cases}$. Se pide:

(a) Represéntala gráficamente. (b) Halla f(1) y f(3). (c) Calcula $\lim\limits_{x\to 1} f(x) \ \ y \ \ \lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

15. Comprueba que $\lim\limits_{x\to 2}(4x-5)=3$.

16. Demuestra que $\lim\limits_{x\to 6}\frac{x}{x-4}=3$. Haz una gráfica de la función para ayudarte.

17. Comprueba que $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x+2}{x}=1$. Haz una gráfica de la función para ayudarte.

18. Dadas las funciones $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ y $g(x)=x+2$. ¿Cómo serán sus gráficas? ¿Cuánto valen, en cada uno de los casos, la imagen de 2 y su límite cuando x tiende a 2?

19. Determina el valor de k para que la función $f(x)=\begin{cases} 2x-2, \ x<2 \\ x^2+2kx-2k, \ x\geq 2 \end{cases}$, tenga límite cuando x tienda a 2.

20. Calcula el valor de $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ cuando f(x) es: (a) $f(x)=\frac{x}{x-2}$, (b) $f(x)=\frac{-x}{x-2}$,
(c) $f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$, (d)) $f(x)=\frac{-1}{(x-2)^2}$

Analiza el comportamiento gráfico de f(x) en x = 2 en cada uno de los casos.

21. Calcula los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+x-3x^2}{x^2-1}$ (b) $\lim\limits_{x\to -1}\left[\frac{-x}{(x+1)^2}\right]^{\frac{2}{x-1}}$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{x^3+3x-1}$ (d) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{x^2-2x+1}{x+2}\right]^{\frac{-1}{(x-1)^2}}$

(e) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-3x+2}{x^2+4x-1}$ (f) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-3x)^{1-2x}$

(g) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+3x^2-x+1}{x^2+x+1}$ (h) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x}{x+1}$

(i) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{2+x^2-3x^4}{x^2+4x-1}$ (j) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{3x-4}$

(k) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{1+x}{3+2x}\right]^{\frac{x^2-2x}{x+3}}$ (l) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+3x}+2x}{3x-2}$

(m) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left[\frac{x-1}{4x-1}\right]^{2x-3}$ (n) $\lim\limits_{x\to -3}\left[x^2-1\right]^{\frac{x-2}{x+3}}$

(ñ) $\lim\limits_{x\to 1}\left[2x+3\right]^{\frac{3}{(x-1)^2}}$ (o) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{1}{(x-1)^2}\right]^{\frac{2}{x^2-1}}$

(p) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{2}{(x-3)^2}$ (r) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{4x-\sqrt{x^2+3x}}{2x-2}$

(s) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{2x^2+3x-14}{x^3-8}$ (t) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^3-3x-2}{2x^3+5x^2+4x+1}$

(u) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}$ (v) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{3x}-3}{2-\sqrt{2x-2}}$

(w) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+3x}$ (x) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-\sqrt{2x^2+4x}}{\sqrt{3x-2}-2}$

(y) $\lim\limits_{x\to \infty} \left[\sqrt{x^2-3x}-x\right]$ (z) $\lim\limits_{x\to \infty} \left[2x-\sqrt{4x^2-2x+3}\right]$

22. Calcula los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{x\to \infty} \left[\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{2x^2+3x-2}\right]$

(b) $\lim\limits_{x\to \infty} \left[\sqrt{4x^2-2x}-2x+2\right]$

(c) $\lim\limits_{x\to \infty} \left[\frac{2x+3}{2x-3}\right]^{3x-1}$ (d) $\lim\limits_{x\to \infty} \left[1-\frac{3}{2x-1}\right]^{4x+5}$

(e) $\lim\limits_{x\to \infty} \left[\frac{x+3}{2x-3}\right]^{3x-1}$ (f) $\lim\limits_{x\to 3} \left[\frac{x+3}{2x}\right]^{\frac{1}{x-3}}$

(g) $\lim\limits_{x\to 1} \left[\frac{2}{x+1}\right]^{\frac{x^2+2x}{x^2+3x-4}}$ (h) $\lim\limits_{x\to \infty} \left[\frac{2x-1}{2x+1}\right]^{\frac{x^2+4x}{x+2}}$

(i) $\lim\limits_{x\to \infty} \left[\sqrt{\frac{2x+3}{2x-3}}\right]^{2x+1}$ (j) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{2^x}{3^x}$

(k) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{2^x+1}{2^x-1}$ (l) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2^x+1}{2^x-1}$

23. Comprueba si son continuas o no las funciones siguientes en los puntos que se indican:

(a) $f(x)=x^3-3x+5$ en x =2.

(b) $f(x)=\frac{2}{x-3}$ en x = 3.

(c) $f(x)=\begin{cases} 2x-5, & x\neq 2 \\ 4, & x=2 \end{cases}$ en x = 2.

(d) $f(x) = \begin{cases} 3x+5, \ x < -1 \\ -2x+4, \ x \geq -1 \end{cases}$ en x = -1.

(e) $f(x) = \begin{cases} x^2+x-3, \ x < 1 \\ 2x-3, \ x > 1 \end{cases}$ en x = 1.

(f) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, x < 1 \\ 3x-2, 1 < x \leq 2 \\ \frac{x^2-5x+6}{x-2}, 2 < x \end{cases}$ en x =1 y en x =2.

Soluciones

1. ***(a)*** $\lim\limits_{x\to 3} (4-x) = 1$ ***(b)*** $\lim\limits_{x\to 1} (x^2+2) = 3$ ***(c)*** $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} (4-x) = 2 \neq f(2) = 0$

(d) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} (x^2+1) = 2 \neq f(1) = 1$

(e) $f(x) = \frac{|x-5|}{x-5} = \begin{cases} 1, x > 5 \\ -1, x < 5 \end{cases}$, $\lim\limits_{x\to 5^+} 1 = 1 \neq -1 = \lim\limits_{x\to 5^-} (-1)$, no existe el límite.

(f) $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty$

2. ***(a)*** $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{(x-2)\cdot(x+1)} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{3}$

(b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

(d) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{\sqrt{1-x}-2}{x+3} = \lim\limits_{x\to -3} \frac{-1}{\sqrt{1-x}+2} = \frac{-1}{4}$

(e) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\frac{1}{x+1}-\frac{1}{4}}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{-1}{4(x+1)} = \frac{-1}{16}$

(f) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\frac{x}{x+1}-\frac{4}{5}}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4} \frac{1}{5(x+1)} = \frac{1}{25}$

3. ***(a)*** $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 3 = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

(b) $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = -2 \neq \lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = 3$

(c) $\lim_{x\to -2^-} h(x) = 2 \neq \lim_{x\to -2^+} h(x) = -2$

4. ***(a)*** $\lim_{x\to 5^+} \frac{x-5}{x^2-25} = \lim_{x\to 5^+} \frac{1}{(x+5)} = \frac{1}{10}$

(b) $\lim_{x\to 4^-} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x\to 4^-} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}$

(c) $\lim_{x\to 2^+} \frac{2-x}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^+} \frac{-1}{x+2} = -\frac{1}{4}$

(d) $\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-2x+1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} (x-1) = 0$

(e) $\lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \neq 1 = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x}$

(f) $\lim_{x\to 2^-} \frac{-x+2}{x-2} = -1 \neq 1 = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{x+2}$

(g) $\lim_{x\to 3^-} \frac{x+2}{2} = \frac{5}{2} \neq 2 = \lim_{x\to 3^+} \frac{12-2x}{3}$

(h) $\lim_{x\to 2^-} (x^2-4x+6) = 2 = \lim_{x\to 2^+} (-x^2+4x-2)$

(i) $\lim_{x\to 1^-} (x^3+1) = 2 = \lim_{x\to 1^+} (x+1)$

(j) $\lim_{x\to 1^-} x = 1 \neq 0 = \lim_{x\to 1^+} (1-x)$

5. ***(a)*** f(x) es continua en su dominio que es R.

(b) f(x) presenta en x = 0 una discontinuidad inevitable.

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty \neq -\infty = \lim_{x\to 0^+} f(x)$

(c) f(x) presenta en x = -1 una discontinuidad evitable.

$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x\to -1} (x-1) = -2$, f(-1) no existe.

(d) f(x) presenta en x = 2 y x= -2 discontinuidades inevitables.

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty \neq +\infty = \lim_{x\to 2^+} f(x)$

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = +\infty \neq -\infty = \lim_{x\to -2^+} f(x)$$

(e) f(x) presenta en x = 1 una discontinuidad inevitable.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \neq +\infty = \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

(f) f(x) es continua en su dominio que es R.

(g) f(x) presenta en x = 5 una discontinuidad inevitable y en x = -2 una discotinuidad evitable.

$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = -\infty \neq +\infty = \lim_{x\to 5^+} f(x)$$

$\lim\limits_{x\to -2} \frac{x+2}{(x+2)(x-5)} = -\frac{1}{7}$ y f(-2) no existe.

(h) f(x) es continua en R, ya que es continua también en x = 1.

$$\lim_{x\to 1^-} (-2x+3) = 1 = \lim_{x\to 1^+} x^2 = f(1)$$

(i) f(x) presenta una discontinuidad inevitable en x = 2.

$$\lim_{x\to 2^-} (-2x) = -4 = f(2) \neq -3 = \lim_{x\to 2^+} (x^2 - 4x + 1)$$

6. Para que f(x) sea continua ha de serlo en x = 2, ya que en el resto de los puntos del dominio por estar definida como una polinómica ya lo es.

f continua en x = 2 $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} f(2) = 8 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} x^3 = 8 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} ax^2 = 4a \end{array} \right\} \Leftrightarrow$ (como los tres valores han de ser iguales)

$8 = 4a \Rightarrow a = 2$

7. Para que f(x) sea continua ha de serlo en x = -1 y en x =3, ya que en el resto de los puntos del dominio por estar definida como una polinómica ya lo es.

f continua en x = -1 $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} f(-1) = 2 \\ \lim\limits_{x\to -1^-} 2 = 2 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} ax + b = -a + b \end{array} \right\} \Leftrightarrow -a + b = 2$

f continua en x = 3 $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} f(3) = -2 \\ \lim\limits_{x\to 3^-} ax+b = 3a+b \\ \lim\limits_{x\to 3^+} -2 = -2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow 3a+b=-2$

Resolviendo el sistema $\left\{ \begin{array}{c} -a+b=2 \\ 3a+b=-2 \end{array} \right\} \Rightarrow a=-1,\ b=1$

8. ***(a)*** $\lim\limits_{x\to -3^+} \frac{1}{x^2-9} = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to -3^-} \frac{1}{x^2-9} = +\infty$

(b) $\lim\limits_{x\to -3^+} \frac{x}{x^2-9} = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to -3^-} \frac{1}{x^2-9} = -\infty$

(a) $\lim\limits_{x\to -3^+} \frac{x^2}{x^2-9} = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to -3^-} \frac{x^2}{x^2-9} = +\infty$

9. ***(a)*** $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{1}{(x+2)^2} = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{1}{(x+2)^2} = +\infty$

(b) $\lim\limits_{x\to -2^+} \frac{1}{(x+2)} = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to -2^-} \frac{1}{(x+2)} = -\infty$

10. ***(a)*** $f(x) = \frac{1}{x^2}$ posee como asíntota vertical la recta x = 0.

(b) $f(x) = \frac{x^2-2}{x^2-x-2}$ posee como asíntotas verticales las rectas x = 2 y x = -1.

(c) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ posee como asíntotas verticales las rectas x = 1 y x = -1.

(d) $f(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$ posee como asíntota vertical la recta x = 0.

(e) $f(x) = \frac{4}{(x-2)^3}$ posee como asíntota vertical la recta x = 2.

(f) $f(x) = \frac{2+x}{x-2}$ posee como asíntota vertical la recta x = 2.

(g) $f(x) = \frac{-4x}{x^2+4}$ No tiene asíntotas verticales.

(h) $f(x) = \frac{-2}{(x-2)^2}$ posee como asíntota vertical la recta x = 2.

11. ***(a)*** $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x-3}{x-2} = -\infty$ ***(b)*** $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{2+x}{1-x} = -\infty$

(c) $\lim\limits_{x\to 4^+} \frac{x^2}{x^2-16} = +\infty$ ***(d)*** $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2}{x^2+16} = \frac{1}{2}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0^-}(1+\frac{1}{x})=-\infty$

(f) $\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2-\frac{1}{x})=+\infty$

(g) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{1}{2}$

(h) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)}=0$

12. *(a)* La función $f(x)=\frac{3x^2}{x^2+2}$ posee como asíntota horizontal la recta y = 3.

(b) La función $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+2}}$ posee como asíntotas horizontales las rectas y = 2 e y = -2.

(c) La función $f(x)=\frac{x}{x^2+2}$ posee como asíntota horizontal la recta y = 0.

(d) La función $f(x)=2+\frac{x^2}{x^4+1}$ posee como asíntota horizontal la recta y = 2.

(e) La función $f(x)=\frac{-6x}{\sqrt{4x^2+5}}$ posee como asíntotas horizontales las rectas y = 3 e y = -3.

(f) La función $f(x)=5-\frac{1}{x^2+1}$ posee como asíntota horizontal la recta y = 5.

13. *(a)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+4}\right)^{4x-2}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-6}{3x+4}\cdot(4x-2)}=e^{\frac{-24}{3}}=e^{-8}$

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-2x}{3x^2+5}\right)^{5x}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-\infty}=+\infty$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(4x-\sqrt{3x^2+5x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{13x^2-5x}{4x+\sqrt{3x^2+5x}}=+\infty$

(d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+5}+2x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{\sqrt{4x^2+5}-2x}=0$

(e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5x-3}{\sqrt{3x^2+2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-5x-3}{\sqrt{3x^2+2}}=\frac{-5}{\sqrt{3}}$

(f) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2-2x}{5x^2+2x}\right)^{3x^2}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4x}{5x^2+2x}\cdot 3x^2}=e^{-\infty}=0$

(g) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x-\sqrt{5x^2-9}}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(-1)(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+3)\left(2x+\sqrt{5x^2-9}\right)}=\frac{-6}{6\cdot 12}=-\frac{1}{12}$

(h) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{4x+16}-4}{3x^2-2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x}{x(3x-2)(\sqrt{4x+16}+4)}=\frac{4}{(-2)8}=-\frac{1}{4}$

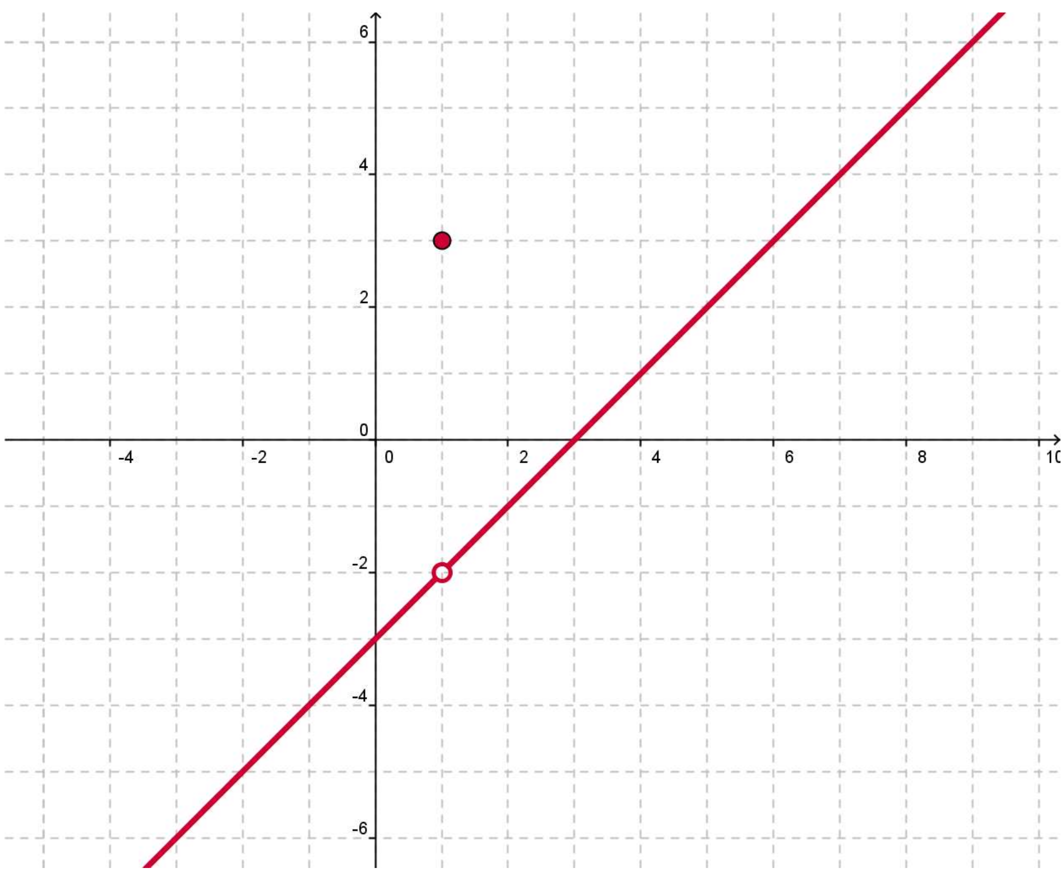
(i) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3x-2}{4x+2}\right)^{\frac{-5}{(x-1)^2}}=\left(\frac{1}{6}\right)^{-\infty}=+\infty$

14.

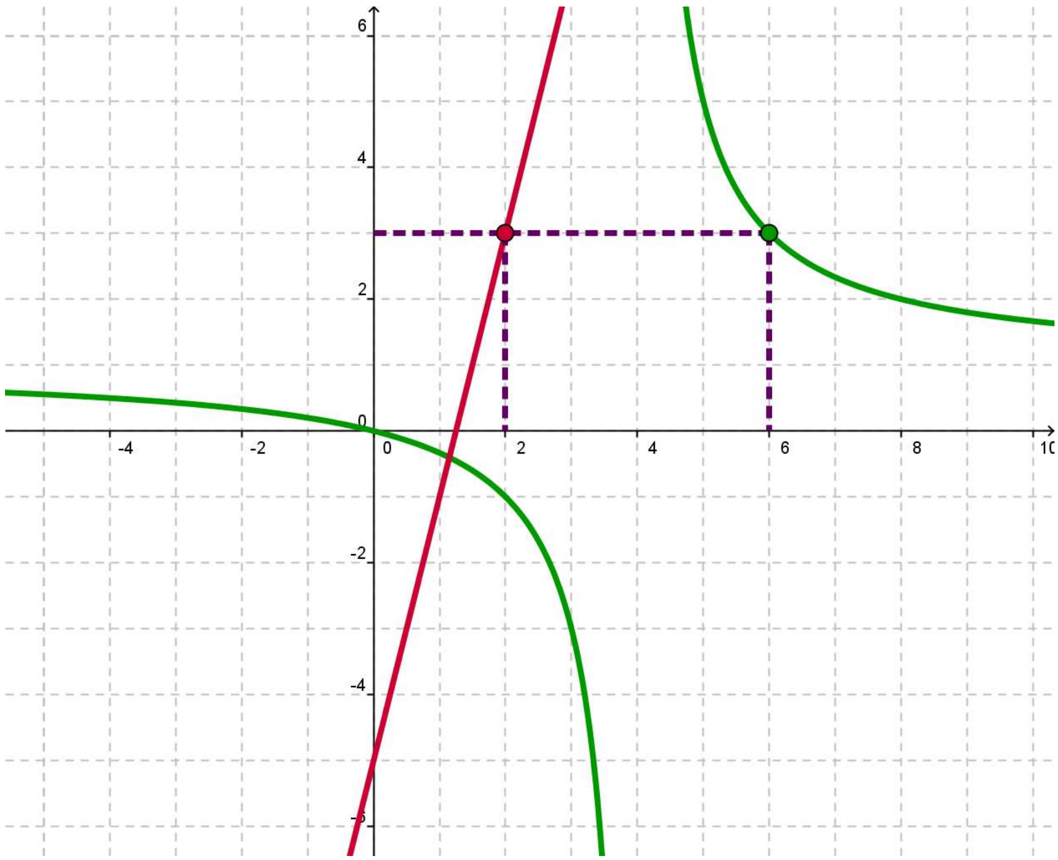
(b) f(1) = 3, f(3) = 0

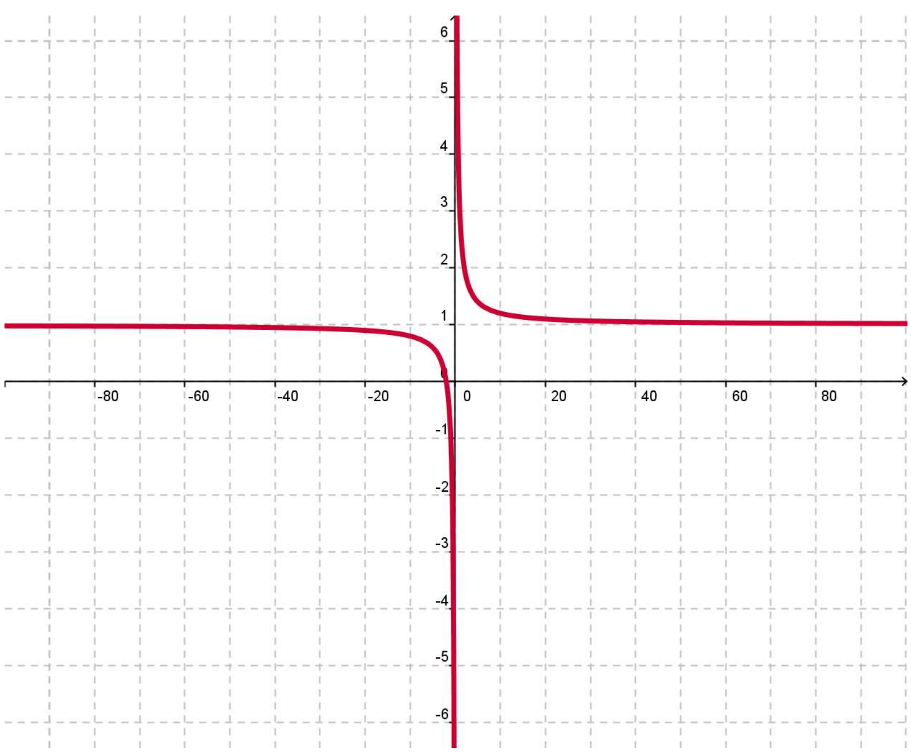
(c) $\lim_{x\to 1}(x-3) = -2 \neq f(1).$ $\lim_{x\to 3}(x-3) = 0 = f(3).$

15. y **16.**



17.





18. $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}=\left\{\begin{matrix} x+2, x\neq 2 \\ \text{sin definir}, x=2 \end{matrix}\right\}$ y $g(x) = x + 2$. Sus gráficas únicamente difieren en el punto de abscisa x = 2. La recta g(x) pasa por el punto (2,4) y a la recta f(x) le falta el punto con abscisa x = 2.

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} g(x) = 4$$

19. $\lim\limits_{x\to 2^-} (2x-2) = 2 = 4 + 4k - 2k = \lim\limits_{x\to 2^+} (x^2 + 2kx - 2k) \Rightarrow k = -1$

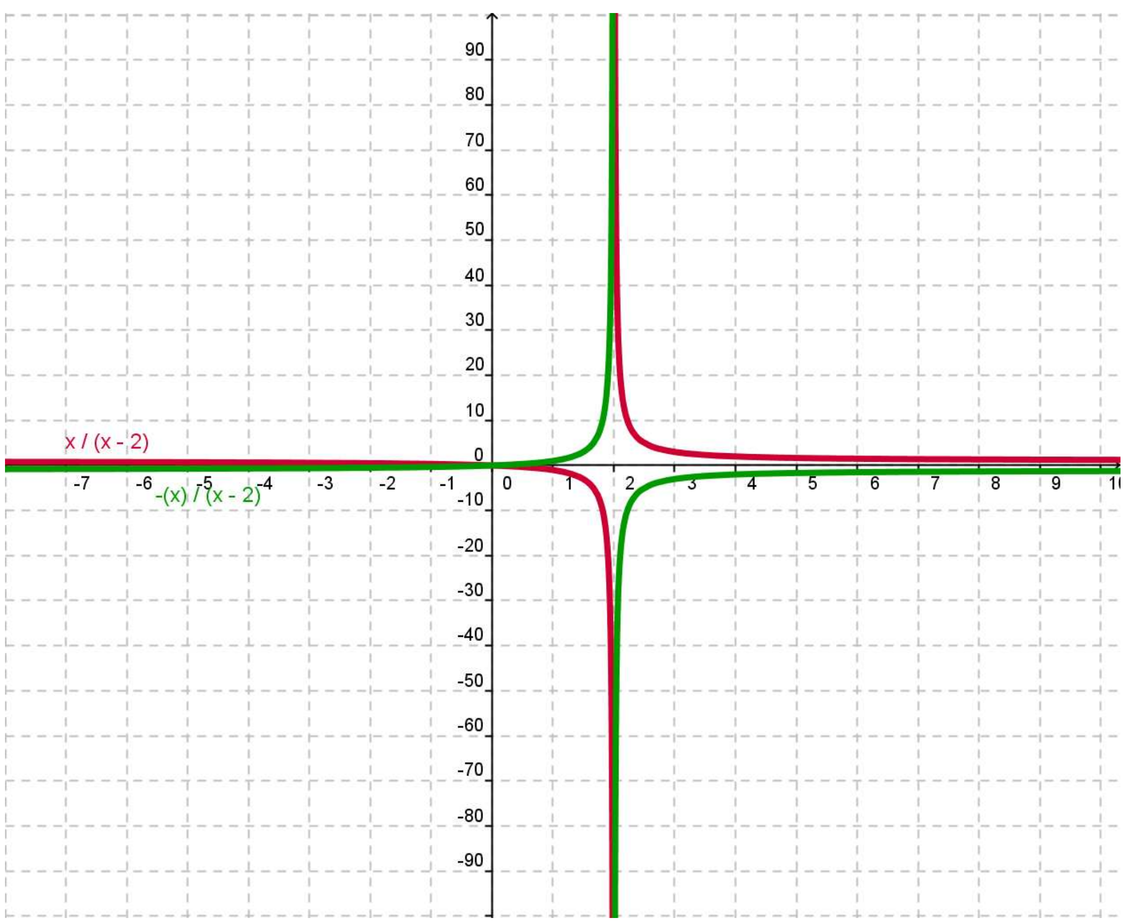
20. ***(a)*** $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x}{x-2} = -\infty \neq +\infty = \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x}{x-2}$, f(2) no existe.

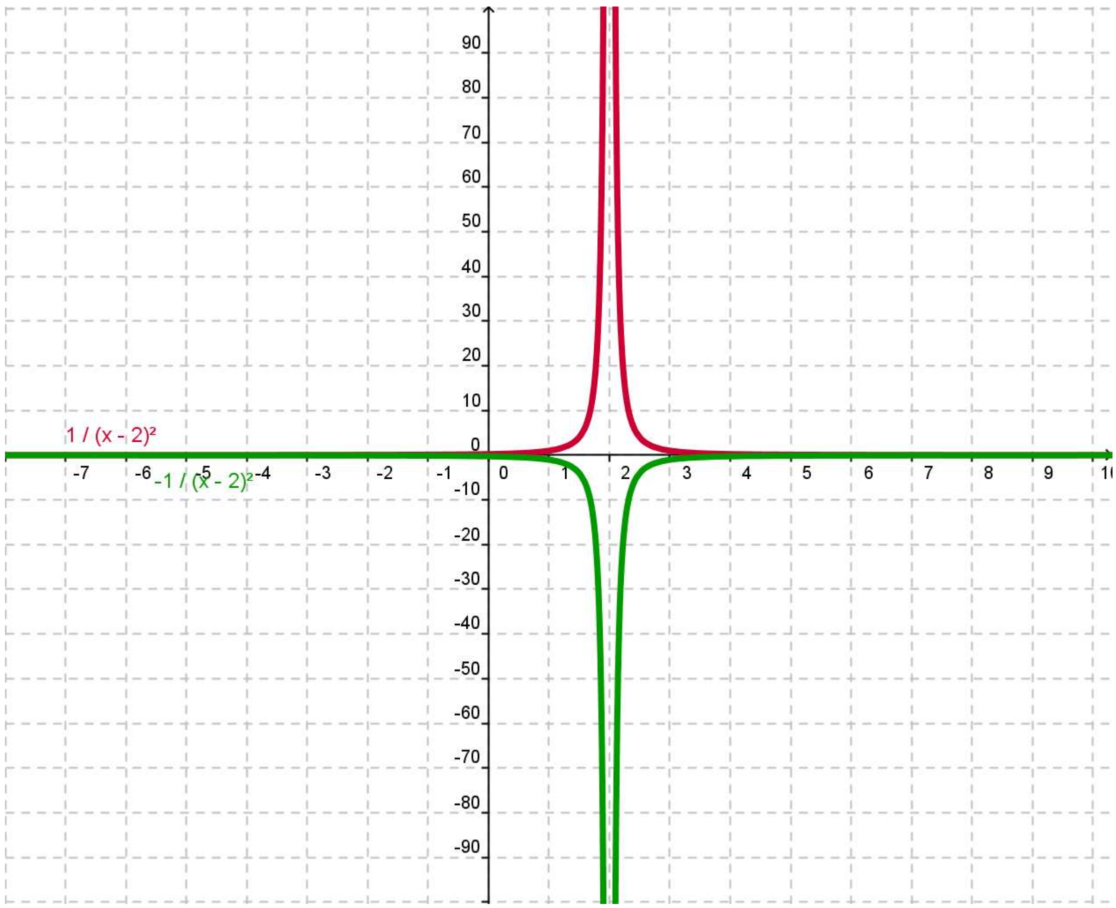
(b) $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{-x}{x-2} = +\infty \neq -\infty = \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{-x}{x-2}$, f(2) no existe.

(c) $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty = +\infty = \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{1}{(x-2)^2}$, f(2) no existe.

(d) $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{-1}{(x-2)^2} = -\infty = -\infty = \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{-1}{(x-2)^2}$, f(2) no existe.

En todos los casos la recta x = 2 es una asíntota vertical.





21. Calcula los siguientes límites:

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{2+x-3x^2}{x^2-1} = -3$

(b) $\lim_{x\to-1} \left[\frac{-x}{(x+1)^2}\right]^{\frac{2}{x-1}} = \infty^{-1} = 0$

(c) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+1}{x^3+3x-1} = 0$

(d) $\lim_{x\to 1} \left[\frac{x^2-2x+1}{x+2}\right]^{\frac{-1}{(x-1)^2}} = 0^{-\infty} = \infty$

(e) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4-3x+2}{x^2+4x-1} = +\infty$

(f) $\lim_{x\to\infty} (x^2-3x)^{1-2x} = \infty^{-\infty} = 0$

(g) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+3x^2-x+1}{x^2+x+1} = +\infty$

(h) $\lim_{x\to-1^-} \frac{3x}{x+1} = +\infty \neq -\infty = \lim_{x\to-1^+} \frac{3x}{x+1}$

(i) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2+x^2-3x^4}{x^2+4x-1} = -\infty$

(j) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{3x-4} = 0$

(k) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\frac{1+x}{3+2x}\right]^{\frac{x^2-2x}{x+3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0$

(l) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+3x}+2x}{3x-2} = \frac{3}{3} = 1$

(m) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left[\frac{x-1}{4x-1}\right]^{2x-3} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-\infty} = \infty$

(n) $\lim\limits_{x\to-3^-} [x^2-1]^{\frac{x-2}{x+3}} = 8^{\infty} = \infty$; $\lim\limits_{x\to-3^+} [x^2-1]^{\frac{x-2}{x+3}} = 8^{-\infty} = 0$

(ñ) $\lim\limits_{x\to1} [2x+3]^{\frac{3}{(x-1)^2}} = 5^{\infty} = \infty$

(o) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\frac{1}{(x-1)^2}\right]^{\frac{2}{x^2-1}} = 1$

(p) $\lim\limits_{x\to3} \frac{2}{(x-3)^2} = \infty$

(r) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x-\sqrt{x^2+3x}}{2x-2} = \frac{5}{2}$

(s) $\lim\limits_{x\to2} \frac{2x^2+3x-14}{x^3-8} = \frac{11}{12}$

(t) $\lim\limits_{x\to-1} \frac{x^3-3x-2}{2x^3+5x^2+4x+1} = \frac{-3}{-1} = 3$

(u) $\lim\limits_{x\to4} \frac{x^2-16}{\sqrt{x}-2} = 32$

(v) $\lim\limits_{x\to3} \frac{\sqrt{3x}-3}{2-\sqrt{2x-2}} = \frac{1}{-1} = -1$

(w) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+3x} = \frac{1}{12}$

(x) $\lim\limits_{x\to2} \frac{x^2-\sqrt{2x^2+4x}}{\sqrt{3x-2}-2} = \frac{10}{3}$

(y) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\sqrt{x^2-3x} - x\right] = \frac{-3}{2}$

(z) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[2x - \sqrt{4x^2-2x+3}\right] = \frac{1}{2}$

22. Calcula los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\sqrt{2x^2+1} - \sqrt{2x^2+3x-2}\right] = \frac{-3}{2\sqrt{2}}$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\sqrt{4x^2-2x} - 2x + 2\right] = \frac{3}{2}$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\frac{2x+3}{2x-3}\right]^{3x-1} = e^9$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[1 - \frac{3}{2x-1}\right]^{4x+5} = e^{-6}$

(e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\frac{x+3}{2x-3}\right]^{3x-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\infty} = 0$

(f) $\lim\limits_{x\to3} \left[\frac{x+3}{2x}\right]^{\frac{1}{x-3}} = e^{-\frac{1}{6}}$

(g) $\lim\limits_{x\to1} \left[\frac{2}{x+1}\right]^{\frac{x^2+2x}{x^2+3x-4}} = e^{\frac{-3}{10}}$

(h) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\frac{2x-1}{2x+1}\right]^{\frac{x^2+4x}{x+2}} = e^{-1}$

(i) $\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{\frac{2x+3}{2x-3}}\,\right]^{2x+1}=e^3$

(j) $\lim_{x\to\infty}\frac{2^x}{3^x}=0$

(k) $\lim_{x\to\infty}\frac{2^x+1}{2^x-1}=1$

(l) $\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x+1}{2^x-1}=-1$

23. Comprueba si son continuas o no las funciones siguientes en los puntos que se indican:

(a) $f(x)=x^3-3x+5$ en x =2. Es continua por ser polinómica.

(b) $f(x)=\frac{2}{x-3}$ en x = 3. No es continua ya que: $\left\{\begin{array}{c} f(3)\ no\ existe \\ \lim_{x\to 3^-} f(x)=-\infty \\ \lim_{x\to 3^+} f(x)=+\infty \end{array}\right\}$

(c) $f(x)=\left\{\begin{array}{c} 2x-5,\ x\neq 2 \\ 4,\ x=2 \end{array}\right.$ en x = 2. No es continua ya que: $\left\{\begin{array}{c} f(2)=4 \\ \lim_{x\to 2}(2x-5)=-1 \end{array}\right\}$

(d) $f(x)=\left\{\begin{array}{c} 3x+5,\ x<-1 \\ -2x+4,\ x\geq -1 \end{array}\right.$ en x = -1. No es continua ya que:

$\left\{\begin{array}{c} f(-1)=6 \\ \lim_{x\to -1^-}(3x+5)=2 \\ \lim_{x\to -1^+}(-2x+4)=6 \end{array}\right\}$

(e) $f(x)=\left\{\begin{array}{c} x^2+x-3,\ x<1 \\ 2x-3,\ x>1 \end{array}\right.$ en x = 1. No es continua ya que:

$\left\{\begin{array}{c} f(1)\ no\ existe \\ \lim_{x\to 1^-}(x^2+x-3)=-1 \\ \lim_{x\to 1^+}(2x-3)=-1 \end{array}\right\}$

(f) $f(x)=\left\{\begin{array}{c} \frac{x^2-1}{x-1},x<1 \\ 3x-2,1<x\leq 2 \\ \frac{x^2-5x+6}{x-2},2<x \end{array}\right.$ en x =1 y en x =2.

No es continua en x = 1 ya que: $\left\{\begin{array}{c} f(1)\ no\ existe \\ \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=2 \\ \lim_{x\to 1^+}(3x-2)=1 \end{array}\right\}$

No es continua en x = 2 ya que: $\left\{ \begin{array}{c} f(2) = 4 \\ \lim\limits_{x \to 2^-} (3x - 2) = 4 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{(x-2)(x-3)}{x-2} = -1 \end{array} \right\}$