1. Derivar las siguientes funciones:

$\dfrac{2x}{1-x^2}$	$\dfrac{x^p(1-x)^q}{1+x}$	$x+\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{x}}$	$\left(\dfrac{x+x^2}{1+x^2}\right)^{1/3}$
$\sqrt{x}\operatorname{sen}\sqrt{x+\sqrt{x}}$	$\dfrac{\sec x}{1+\operatorname{tg} x}$	$\dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2}$	$\operatorname{sen}(1+\sqrt{\operatorname{sen} x})$
$\operatorname{sen}(\cos^2 x)$	$\operatorname{tg}(\sqrt{x}+x)$	$x^2\cos(1/x)$	$\operatorname{sen}^2\sqrt{x}$
$\dfrac{e^x}{\operatorname{sen} x}$	$e^{\sqrt{x}}$	$\log(1+\operatorname{sen} x)$	$xe^{\sqrt{x}}$
$xe^x\operatorname{sen} x$	$(1+\operatorname{tg} x)^{\operatorname{arc\,tg} x}$ $\operatorname{arc\,sen}(1-\cos x)$	$\operatorname{arc\,tg}(x+\sqrt{1+x^2})$	$(\operatorname{arc\,tg} x)^{\log x \operatorname{sen} x}$

2. Estudiar la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones, calculando las derivadas cuando existan ($a\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{Z}$):

a) $f(x)=\begin{cases} x^n\operatorname{arc\,tg}(\frac{1}{x}), & \text{si } x\neq 0;\\ a, & \text{si } x=0..\end{cases}$ b) $f(x)=x^x$ c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{1/x}}, & \text{si } x<0;\\ \sqrt{x^2+x^3}, & \text{si } x\geq 0.\end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}, & \text{si } x>0\\ 1, & \text{si } x=0\\ 1-e^{1/x}, & \text{si } x<0.\end{cases}$ e) $f(x)=\log|x|$ f) $f(x)=\begin{cases} e^{1/x}, & \text{si } x<0\\ 0, & \text{si } x=0\\ x\operatorname{arc\,tg}(1/x), & \text{si } x>0.\end{cases}$

3. Sea $f(x)=x^n\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$, si $x\neq 0$, $f(0)=0$. Determinar los $n\in\mathbb{Z}$, que hacen que:

   a) f sea continua en el cero.
   b) f sea derivable en el cero.
   c) f sea derivable y f' sea continua en el cero.

4. Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivable. Demuestra que si f' está acotada; entonces f es uniformemente continua.

5. Demostrar las siguientes desigualdades:

   a) Si $x\neq 1$, $x>0$: $\log x<x-1$.
   b) Si $x\in(0,1)$: $x<\log(1+(e-1)x)<1$.
   c) Si $x\neq 0$: $e^x>1+x$.
   d) Si $x\in(0,1)$: $\log(1+x^2)<2\operatorname{arc\,tg} x<2\operatorname{arc\,sen} x$.
   e) Si $x\in(0,\pi)$: $\log(1+\cos x)<\log(2)-\dfrac{x^2}{4}$.

6. Demostrar que la ecuación $\operatorname{arc\,tg} x=\log(\sqrt{x})$ tiene una única raíz real.

7. Determinar los extremos absolutos de las siguientes funciones:

   a) $f(x)=\operatorname{sen}|x|$, $x\in[-\pi,\pi]$.
   b) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$, $x\in[-1,3]$.
   c) $f(x)=\begin{cases}x^2+2x, & \text{si } -2\leq x\leq 0;\\ \operatorname{sen} x, & \text{si } 0<x\leq\pi.\end{cases}$

8. Estudiando los extremos absolutos de la función $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$,

   (a) demostrar que $x^e\leq e^x$ para todo $x>0$,
   (b) determinar el menor b para el que se tenga $x\leq e^{bx}$ para todo $x\geq 1$.

9. Calcular, si existen, los siguientes límites ($\alpha\in\mathbb{R}$):

   (a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha\log x$ (b) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$ (c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha\log x$

   (d) $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha e^{-x}$ (e) $\lim\limits_{x\to\infty} e^x-\log x$ (f) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\log(\operatorname{sen} x)}{\log(1-\cos x)}$

10. Calcular, si existen, los siguientes límites $(a, b > 0)$:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$ (b) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ (c) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

(d) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ (e) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ (f) $\lim_{x\to +\infty} (\log x)^{\frac{1}{1-\log x}}$

11. Sea $f(x) = (x^2 - 3)e^{-x}$.
   (a) Estudiar los intervalos de crecimiento de f, así como los extremos relativos y absolutos.
   (b) Estudiar los intervalos de convexidad de f.
   (c) Determinar los valores de a para los que la ecuación $f(x) = a$ tiene exactamente dos soluciones.

12. Calcula las derivadas n-ésimas de las siguientes funciones $(a \in \mathbb{R})$:

(a) e^{ax} (b) $(x+a)^{-1}$ (c) $\log(1+x)$ (d) $(1+x)^a$

(e) $\cos ax$ (f) $\operatorname{sen} ax$ (g) $\log(x^2 - 3x + 2)$ (h) $\operatorname{sen}^2 ax$

13. Obtener la fórmula de Taylor hasta el orden k de las siguientes funciones, en los puntos x_0 indicados, con el término complementario de Langrange $(a \in \mathbb{R})$.

(a) $f(x) = e^x$	$k = n,\ x_0 = 0$	(b) $f(x) = a^x$	$k = n,\ x_0 = 0$
(c) $f(x) = \log(1+x)$	$k = n,\ x_0 = 0$	(d) $f(x) = \operatorname{sen} x$	$k = 2n+1,\ x_0 = 0,\ \frac{\pi}{2}$
(e) $f(x) = \cos x$	$k = 2n,\ x_0 = 0,\ \frac{\pi}{2}$	(f) $f(x) = (1+x)^a$	$k = n,\ x_0 = 0$
(g) $f(x) = \operatorname{tg} x$	$k = 3,\ x_0 = 0$	(h) $f(x) = \log(\cos x)$	$k = 4,\ x_0 = 0$
(i) $f(x) = x^5 + x^4$	$k = 8,\ x_0 = 0$		

14. Representa gráficamente las siguientes funciones estudiando su dominio de definición, crecimiento, máximos y mínimos relativos, límites, asíntotas,... $(\alpha \in \mathbb{R})$:

e^x	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	x^α	$\log x$	$\frac{\operatorname{sen} x}{x}$
$\operatorname{arc\,sen} x$	$\operatorname{arc\,tg} x$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{th} x$	$x \operatorname{arc\,tg} x$
$x + \log(x^2 - 1)$	$\frac{x}{1+x^2}$	$\frac{x^3}{(1+x)^2}$	$x^2 e^{-x}$	$\frac{e^{-x}}{1+x^2}$	$\frac{e^{-x}}{1-x^2}$
$\log(1+x^2) - 2x$	$\frac{\log\lvert x\rvert}{x}$	x^x	$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	$x \operatorname{arc\,tg}(1/x)$	$x^{1/x}$

15. El valor de un diamante es proporcional al cuadrado de su peso. Demuestra que si un diamante se rompe en dos trozos, se produce una depreciación, y determina en qué caso es máxima.

16. Determinar la longitud ℓ de la varilla más larga que puede pasar horizontalmente una esquina de un pasillo de 2 metros de ancho, hacia otro de 4 metros de ancho.

$\boxed{1}$

• $f(x) = \left(\frac{x+x^2}{1+x^2}\right)^{1/3}$

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{x+x^2}{1+x^2}\right)^{\frac{1}{3}-1} \cdot \frac{(1+2x)(1+x^2) - (x+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{x+x^2}{1+x^2}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{1+x^2+2x+2x^3-2x^2-2x^3}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{x+x^2}{1+x^2}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{1+2x-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1+x^2}{x+x^2}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1+2x-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{1+2x-x^2}{(x+x^2)^{2/3}} \cdot (1+x^2)^{\frac{2}{3}-2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1+2x-x^2}{(x+x^2)^{2/3}\cdot(1+x^2)^{4/3}}$$

• $f(x) = \operatorname{sen}\left(1+\sqrt{\operatorname{sen} x}\right)$

$$f'(x) = \cos\left(1+\sqrt{\operatorname{sen} x}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}} \cdot \cos x$$

• $f(x) = \operatorname{arctg}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}} \cdot \cancel{2}x\right) =$$

$$= \frac{1}{1+\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^2} \cdot \left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right).$$

$\boxed{2}$ (d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ 1 - e^{1/x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

<u>Continuidad:</u> Observamos que f es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Estudiemos la continuidad en $x=0$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \underset{\boxed{\left(\frac{0}{0}\right) \text{ L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+x^2} = 1$$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 1 - e^{1/x} = 1$, ya que $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ y $\lim_{x\to -\infty} e^{x} = 0$.

Como $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 = \lim_{x\to 0^-} f(x)$, existe $\lim_{x\to 0} f(x)$ y vale $1 = f(0)$. Luego, f es continua en $x=1$.

Por tanto, f es continua en $\mathbb{R}$.

<u>Derivabilidad:</u> Como para $x>0$ $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$ la cual es derivable en $(0,\infty)$, y como para $x<0$ $f(x) = 1-e^{1/x}$ la cual es derivable en $(-\infty,0)$; deducimos que f es derivable (al menos) en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ siendo

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+x^2)x} - \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^2} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{e^{1/x}}{x^2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

ya que
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right) = \frac{\frac{1}{1+x^2}\cdot x - \operatorname{arctg} x}{x^2} = \frac{1}{(1+x^2)x} - \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}$$

y
$$\frac{d}{dx}\left(1 - e^{1/x}\right) = 0 - e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{e^{1/x}}{x^2}.$$

Estudiemos la derivabilidad de f en $x=0$.

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{(1+x^2)x} - \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x - \operatorname{arctg} x \cdot (1+x^2)}{(1+x^2)\, x^2} = \quad \boxed{\left(\tfrac{0}{0}\right) \text{ L'Hôpital}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1 - \frac{1}{\cancel{1+x^2}}\cdot \cancel{(1+x^2)} - \operatorname{arctg} x \cdot \cancel{2x}}{\cancel{2x}\cdot x^2 + (1+x^2)\cdot \cancel{2x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-\operatorname{arctg} x}{2x^2+1} = \quad \boxed{\left(\tfrac{0}{0}\right) \text{ L'Hôpital}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{-1}{1+x^2}}{4x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{4x(1+x^2)} = -\infty$$

Luego f no es derivable en $x=0$. Veamos si es derivable en dicho punto por la izquierda.

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{1/x}}{x^2} = \quad \boxed{\text{Cambio de variable: } t=\tfrac{1}{x}}$$

$$= \lim_{t\to -\infty} t^2\cdot e^t = \lim_{t\to -\infty} \frac{t^2}{e^{-t}} = \quad \boxed{\left(\tfrac{\infty}{\infty}\right) \text{ L'Hôpital}}$$

$$= \lim_{t\to -\infty} \frac{2t}{-e^{-t}} = \quad \boxed{\left(\tfrac{\infty}{\infty}\right) \text{ L'Hôpital}}$$

$$= \lim_{t\to -\infty} \frac{2}{e^{-t}} = 0.$$

Luego, f es derivable por la izquierda en $x=0$.

$\boxed{5}$ Tenemos que demostrar $x \underset{①}{<} \log(1+(e-1)x) \underset{②}{<} 1 \quad \forall x \in (0,1)$.

① Observamos que $x < \log(1+(e-1)x) \Leftrightarrow e^x < 1+(e-1)x$

$$\Leftrightarrow 0 < 1+(e-1) - e^x$$

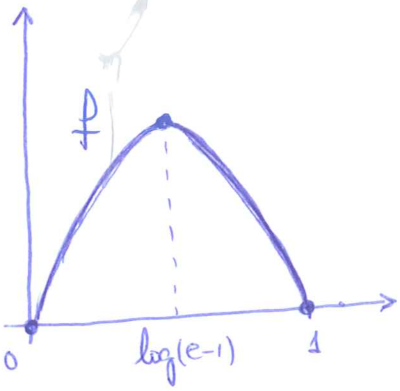
Definimos la función $f:[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$f(x) = 1 + (e-1)x - e^x.$$

f es derivable en $[0,1]$ y

$f'(x) = e-1-e^x = 0 \Leftrightarrow x = \log(e-1) \in (0,1)$

Como $f''(\log(e-1)) = -e+1 < 0$ (ya que $f''(x) = -e^x$) deducimos que $\log(e-1)$ es un máximo absoluto de f, debido a que $f(0)=0$ y $f(1)=0$.



Luego, f es estrictamente creciente en $[0, \log(e-1)]$ y f es estrictamente decreciente en $[\log(e-1), 1]$

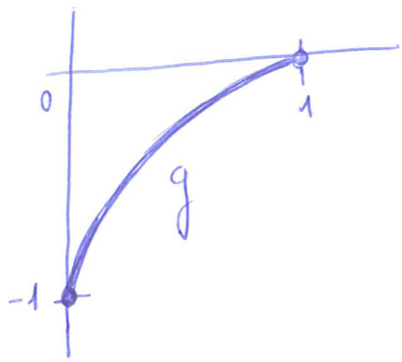
Por tanto, $f(x) > 0$ para todo $x \in (0,1)$.

② Definimos la función $g:[0,1]$ como $g(x) = \log(1+(e-1)x) - 1$.

Observamos que g es derivable en $[0,1]$ y que

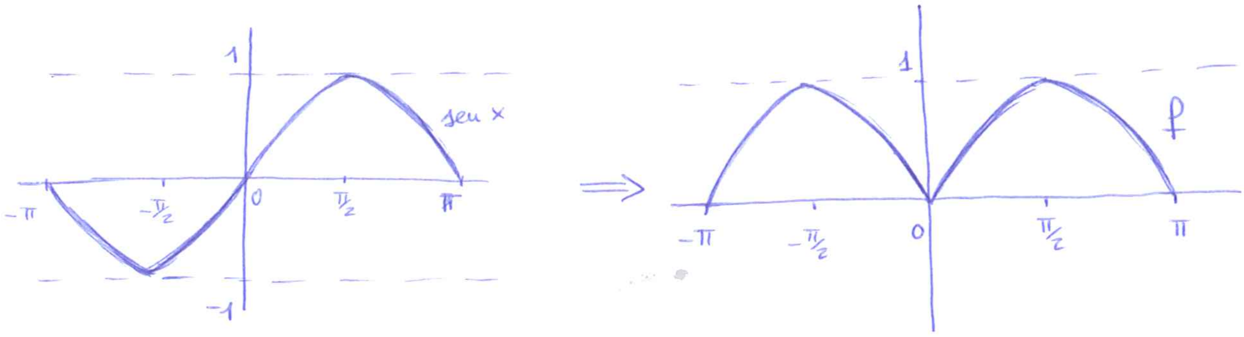
$g'(x) = \dfrac{e-1}{1+(e-1)x} > 0 \quad \forall x \in [0,1]$. Luego, g es estrictamente creciente en $[0,1]$. Como $g(1)=0$ deducimos que

$g(x) < 0$ para todo $x \in (0,1)$.



$\boxed{7}$ a) $f(x) = \text{sen}|x|$, $x \in [-\pi, \pi]$

Dibujemos f para hacernos una idea:



Observemos que f es continua en $[-\pi,\pi]$ y derivable (al menos) en $[-\pi,\pi] \setminus \{0\}$, ya que

$$f(x) = \begin{cases} \text{sen}\, x & \text{si } x \geq 0 \\ \text{sen}(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases} \Longrightarrow f'(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x > 0 \\ \underbrace{-\cos(-x)}_{= -\cos(x)} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Estudiemos si es derivable en $x = 0$:

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \cos x = \cos 0 = 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} -\cos x = -\cos 0 = -1$$

Como $f'_+(0) = 1 \neq -1 = f'_-(0)$, entonces f no es derivable en $x=0$.

Por tanto, f es continua en $[-\pi,\pi]$ y derivable en $[-\pi,\pi]\setminus\{0\}$.

$$f'(x) = 0 \iff \cos x = 0 \iff x \in \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Como

	$-\pi$ … $-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$ … 0	0 … $\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$ … π
f'	+	−	+	−
f	↗	↘	↗	↘

y $f(-\pi) = 0$
$f(-\frac{\pi}{2}) = 1$
$f(0) = 0$
$f(\frac{\pi}{2}) = 1$
$f(\pi) = 0$;

entonces f tiene un máximo absoluto en $x = -\frac{\pi}{2}$ y en $x = \frac{\pi}{2}$

y f tiene un mínimo absoluto en $x=-\pi$, $x=0$ y $x=\pi$. $\square$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2+2x & \text{si } -2 \leq x \leq 0; \\ \text{sen}\, x & \text{si } 0 < x \leq \pi \end{cases}$

Observamos que f es continua en $[-2,\pi]$, ya que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \text{sen}\, x = \text{sen}\, 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2+2x = 0^2+2\cdot 0 = 0 = f(0)$$

Además, f es derivable (al menos) en $[-2,0)\cup(0,\pi]$, con

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{si } -2\leq x < 0 \\ \cos x & \text{si } 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

Estudiemos si f es derivable en $x=0$.

$$\left.\begin{array}{l} f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \cos x = \cos 0 = 1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \neq \\ f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} 2x+2 = 2\cdot 0+2 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ no es derivable en } x=0$$

Veamos cuándo $f'(x)=0$:

- Si $x\in[-2,0)$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x+2=0 \Leftrightarrow x=-1.$$

- Si $x\in(0,\pi]$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}.$$

Luego, $f'(x)=0$ si, y sólo si $x=-\frac{1}{2}$ ó $x=\frac{\pi}{2}$.

Como

	-2 … -1	-1 … 0	0 … $\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$ … π
f'	$-$	$+$	$+$	$-$
f	↘	↗	↗	↘

$f(-2)=0$ $\qquad f(\frac{\pi}{2})=1$

$f(-1)=-1$ $\qquad f(\pi)=0$

$f(0)=0$

entonces f tiene un máximo absoluto en $x=\frac{\pi}{2}$

y f tiene un mínimo absoluto en $x=-1$.

$\boxed{9}$ (a) $\lim_{x \to 0^+} x^{\alpha} \cdot \log x$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

Caso 1. Si $\alpha = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\alpha} \log x = \lim_{x \to 0^+} \log x = -\infty$$

Caso 2. Sup. que $\alpha \neq 0$

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\alpha} \cdot \log x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\log x}{x^{-\alpha}} = \quad \boxed{\left(\frac{\infty}{\infty}\right) \text{ L'Hôpital}}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-\alpha\, x^{-\alpha-1}} =$$

$$= -\frac{1}{\alpha} \lim_{x \to 0^+} x^{\alpha+1} \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= -\frac{1}{\alpha} \lim_{x \to 0^+} x^{\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 0, \\ +\infty & \text{si } \alpha < 0. \end{cases}$$

Por tanto,

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\alpha} \cdot \log x = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 0, \\ -\infty & \text{si } \alpha = 0, \\ +\infty & \text{si } \alpha < 0. \end{cases}$$

(f) $$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log(\operatorname{sen} x)}{\log(1-\cos x)} = \quad \boxed{\left(\frac{\infty}{\infty}\right) \text{ L'Hôpital}}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{\dfrac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{(1-\cos x)\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} =$$

$\boxed{\text{Identidad Fundamental de la Trigonometría Plana } \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1}$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{(1-\cos x)\cdot \cos x}{1-\cos^2 x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\cancel{(1-\cos x)} \cdot \cos x}{\cancel{(1-\cos x)}(1+\cos x)} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x}{1+\cos x} = \frac{\cos 0}{1+\cos 0} = \frac{1}{2}.$$

$\boxed{10}$

(b) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ no existe, ya que

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = 0$$

debido a que

$$\lim_{x\to 0^\pm}\frac{\operatorname{sen} 2x}{x} = 2\cdot\lim_{x\to 0^\pm}\frac{\operatorname{sen} 2x}{2x} = 2\cdot 1 = 2$$

y $\lim_{x\to 0^\pm}\frac{1}{x} = \pm\infty$.

(c) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$. Tomando límite llegaríamos a la indeterminación 1^∞.

$$\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(1+\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}-1\right)\right)^{\frac{1}{x}} = \left[1+\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}-1\right)\right]^{\frac{1}{x}\cdot\frac{\frac{\operatorname{sen} x}{x}-1}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}-1}} =$$

$$=\left(\left[1+\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}-1\right)\right]^{\frac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}-1}}\right)^{\frac{\frac{\operatorname{sen} x}{x}-1}{x}} \xrightarrow[x\to\infty]{} e^0 = 1.$$

ya que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \Longrightarrow \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1 = 0} \Longrightarrow \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}-1} = \infty}$$

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e.$$

y

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen} x}{x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x - x}{x^2} \overset{\boxed{\left(\frac{0}{0}\right)\ \text{L'Hôpital}}}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{2x} \overset{\boxed{\left(\frac{0}{0}\right)\ \text{L'Hôpital}}}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen} x}{2} = 0$$

$\boxed{10}$

(f) $\lim_{x \to +\infty} (\log x)^{\frac{1}{1-\log x}} = \lim_{z \to +\infty} z^{\frac{1}{1-z}} =$

$$= e^{\lim_{z \to +\infty} \frac{1}{1-z} \cdot \log z} = e^0 = 1 \text{, ya que}$$

$$\lim_{z \to +\infty} \frac{1}{1-z} \cdot \log z = \boxed{\left(\frac{\infty}{\infty}\right) \text{ L'Hôpital}}$$

$$= \lim_{z \to +\infty} \frac{1/z}{-1} = 0.$$