2º de Bachillerato Ciencias

Matemáticas II

Ejercicios de Determinantes resueltos

(Solucionario libro)

Colegio Maravillas

Recopilados por: Teresa González

1.-

Calcula los siguientes determinantes.

a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a & 2 \\ b & -3 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} a-4 & 2 \\ 6 & a-3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -9 & 3 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & x \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} a+1 & a-1 \\ 1-a & a+1 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1$ c) $\begin{vmatrix} a & 2 \\ b & -3 \end{vmatrix} = -3a-2b$ e) $\begin{vmatrix} a-4 & 2 \\ 6 & a-3 \end{vmatrix} = a^2-7a$

b) $\begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -9 & 3 \end{vmatrix} = 0$ d) $\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & x \end{vmatrix} = 0$ f) $\begin{vmatrix} a+1 & a-1 \\ 1-a & a+1 \end{vmatrix} = 2a^2+2$

2.-

Calcula *a, b, c, d*… para que se cumplan las igualdades.

a) $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & a \end{vmatrix} = 26$ c) $\begin{vmatrix} c & 3c-1 \\ 4 & c \end{vmatrix} = 32$ e) $\begin{vmatrix} \sqrt{e} & 2 \\ 2 & \sqrt{e-6} \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} b & 4 \\ 3b & -3 \end{vmatrix} = 45$ d) $\begin{vmatrix} \frac{1}{d} & -\frac{2}{d} \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 7$ f) $\begin{vmatrix} \operatorname{sen} f & \cos f \\ \cos f & -\operatorname{sen} f \end{vmatrix} = 0$

a) $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & a \end{vmatrix} = 4a+6 = 26 \rightarrow a = 5$

b) $\begin{vmatrix} b & 4 \\ 3b & -3 \end{vmatrix} = -15b = 45 \rightarrow b = -3$

c) $\begin{vmatrix} c & 3c-1 \\ 4 & c \end{vmatrix} = c^2-12c+4 = 32 \rightarrow \begin{cases} c = -2 \\ c = 14 \end{cases}$

d) $\begin{vmatrix} \frac{1}{d} & -\frac{2}{d} \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = \frac{14}{d} = 7 \rightarrow d = 2$

e) $\begin{vmatrix} \sqrt{e} & 2 \\ 2 & \sqrt{e-6} \end{vmatrix} = \sqrt{e^2-6e} - 4 = 0 \rightarrow e = 8$

f) $\begin{vmatrix} \operatorname{sen} f & \cos f \\ \cos f & -\operatorname{sen} f \end{vmatrix} = -\operatorname{sen}^2 f - \cos^2 f = -1 \neq 0 \rightarrow$ No tiene solución.

3.-

Obtén el valor de los siguientes determinantes.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \\ -8 & 17 & 9 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} x-1 & 2 & x \\ x+1 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} a & 2 & 4 \\ 0 & b & 3 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} -a & b & c \\ -b & c & a \\ -c & a & b \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 11$ d) $\begin{vmatrix} a & 2 & 4 \\ 0 & b & 3 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 11$ e) $\begin{vmatrix} x-1 & 2 & x \\ x+1 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4x$

c) $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \\ -8 & 17 & 9 \end{vmatrix} = 0$ f) $\begin{vmatrix} -a & b & c \\ -b & c & a \\ -c & a & b \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

4.-

Halla los valores reales de a, b, c y d para que se cumplan las igualdades.

a) $\begin{vmatrix} 3 & a & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & a & -2 \end{vmatrix} = 2$ c) $\begin{vmatrix} c-1 & c+2 & 0 \\ c & -1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -197$

b) $\begin{vmatrix} -2 & b & -1 \\ b & 1 & b \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -5$ d) $\begin{vmatrix} d & d^2 & d-1 \\ 2 & -1 & 0 \\ d & 0 & d \end{vmatrix} = -18$

a) $\begin{vmatrix} 3 & a & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & a & -2 \end{vmatrix} = -4 + 3a = 2 \rightarrow a = 2$

b) $\begin{vmatrix} -2 & b & -1 \\ b & 1 & b \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = b^2 + 5b - 1 = -5 \rightarrow \begin{cases} b = -1 \\ b = -4 \end{cases}$

c) $\begin{vmatrix} c-1 & c+2 & 0 \\ c & -1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = c^2 + 23c + 3 = -197 \rightarrow$ No tiene solución.

d) $\begin{vmatrix} d & d^2 & d-1 \\ 2 & -1 & 0 \\ d & 0 & d \end{vmatrix} = -d - 2d^3 = -18 \rightarrow d = 2$

5.-

Calcula el valor del determinante de la matriz $A+B$, siendo:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}-2 & -2 & -1\\ 2 & -1 & -3\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

(Navarra. Septiembre 2005. Grupo 1. Opción B)

$$A+B=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -2\\ 3 & 1 & -2\end{pmatrix}\rightarrow |A+B|=1$$

6.-

Calcula el valor del determinante de la matriz AB, siendo:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 1 & 13 & -1\\ -1 & 7 & 2\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}-2 & -3 & 9\\ 1 & -1 & 17\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

(Navarra. Septiembre 2004. Grupo 1. Opción B)

$$AB=\begin{pmatrix}2 & -2 & 34\\ 11 & -16 & 231\\ 9 & -4 & 108\end{pmatrix}\rightarrow |AB|=10$$

7.-

¿Qué relación deben guardar m y n para que el determinante $\begin{vmatrix}m & -1 & 4\\ n & 3 & 3\\ 3 & 5 & 0\end{vmatrix}$ sea nulo?

$$\begin{vmatrix}m & -1 & 4\\ n & 3 & 3\\ 3 & 5 & 0\end{vmatrix}=20n-45-15m=0\rightarrow 4n=9+3m$$

8.-

Sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ -1 & 2\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 3 & 1\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}6 & -3\\ -4 & 3\end{pmatrix}$$

Comprueba si se verifican las siguientes igualdades. Si alguna se verifica, decide si se trata de alguna propiedad general de los determinantes.

a) $|2A|=2|A|$

b) $|A+B|=|A|+|B|$

c) $|C-2B|=|C|-2|B|$

d) $|AB|=|A|\cdot|B|$

a) $|2A|=\begin{vmatrix}6 & 10\\ -2 & 4\end{vmatrix}=44$ $\qquad 2|A|=2\cdot\begin{vmatrix}3 & 5\\ -1 & 2\end{vmatrix}=2\cdot 11=22$

La igualdad no se cumple.

b) $|A+B| = \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -15$ $\qquad |A|+|B| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 11 - 14 = -3$

La igualdad no se cumple.

c) $|C-2B| = \begin{vmatrix} 10 & -11 \\ -10 & 1 \end{vmatrix} = -100$ $\qquad |C| - 2|B| = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$

$= 6 - 2(-14) = 34$

La igualdad no se cumple.

d) $|AB| = \begin{vmatrix} 9 & 17 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} = -154$ $\qquad |A| \cdot |B| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 11 \cdot (-14) = -154$

La igualdad se cumple porque es una de las propiedades de los determinantes.

9.-

Observa que si $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$, se cumple que $|A+B| = |A| + |B|$.

¿Es siempre cierto para cualesquiera dos matrices cuadradas de la misma dimensión? En caso afirmativo, justifícalo y, en caso negativo, facilita un contraejemplo.

$$|A+B| = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 13 & 3 \end{vmatrix} = 5$$

$$|A|+|B| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5$$

La igualdad se cumple en este caso pero no siempre, el apartado b) del ejercicio anterior es un contraejemplo.

10.-

Calcula el valor del determinante $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -2 & 8 & 0 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.

Comprueba que si realizamos las siguientes operaciones, su valor no varía.

a) $F_2 + 2F_3$ b) $C_1 - 3C_3$ c) $F_3 - F_2 + F_1$ d) $C_2 - 3C_1 + 2C_3$

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -2 & 8 & 0 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 34$$

a) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 8 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 34$ $\qquad$ c) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -2 & 8 & 0 \\ 10 & -6 & 3 \end{vmatrix} = 34$

b) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ -2 & 8 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 34$ $\qquad$ d) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 14 & 0 \\ 5 & -14 & 2 \end{vmatrix} = 34$

11.-

Calcula cada uno de estos determinantes para comprobar que:

$$\begin{vmatrix} a+1 & 3 & 0 \\ b+2 & 1 & 4 \\ 3+c & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 3 & 0 \\ b & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ c & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a+1 & 3 & 0 \\ b+2 & 1 & 4 \\ 3+c & 2 & -1 \end{vmatrix} = -a-1+36+12c-8a-8+3b+6 = 33-9a+3b+12c$$

$$\begin{vmatrix} a & 3 & 0 \\ b & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ c & 2 & -1 \end{vmatrix} = (36-9a+3b)+(12c-3) = 33-9a+3b+12c$$

12.-

Si M es una matriz cuadrada y $|M| = 6$, ¿qué puedes decir del determinante de M^3? ¿Y del determinante de $2M$?

$|M^3| = |M| \cdot |M| \cdot |M| = |M|^3 = 6^3 = 216$

Si n es el orden de la matriz cuadrada M entonces: $|2M| = 2^n|M| = 2^n \cdot 6 = 2^{n+1} \cdot 3$

13.-

¿Qué propiedades de los determinantes se han empleado en cada una de las igualdades siguientes?

a) $\begin{vmatrix} a+b & 3a \\ c+d & 3c \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} a+b & a \\ c+d & c \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 31 & 23 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 342 & 513 & 214 \\ 34 & 51 & 21 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 4 & -5 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

a) Propiedad 3 — Propiedad 5 — Propiedad 2

b) Propiedad 5 ($F_1 - 10F_2$)

c) Propiedad 5 ($F_1 - 10F_2$; $F_2 - 10F_3$)

d) Propiedad 9 — Propiedad 6

14.-

Demuestra, sin calcular el valor de los determinantes, que el primero es múltiplo de 6 y el segundo de 5.

a) $\begin{vmatrix} 2 & 9 & 21 \\ 5 & 2 & -3 \\ 6 & 8 & -12 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ 4 & 21 & 2 \\ 11 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 2 & 9 & 21 \\ 5 & 2 & -3 \\ 6 & 8 & -12 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 9 & 7 \\ 5 & 2 & -1 \\ 6 & 8 & -4 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 9 & 7 \\ 5 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ 4 & 21 & 2 \\ 11 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 7 & -1 \\ 25 & 21 & 2 \\ 15 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 5 & 21 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

15.-

Sabiendo que $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5$, determina sin desarrollarlos el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -6 & -4 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 8 & 1 & 4 \\ -5 & -3 & -4 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 4 & -4 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -6 & -4 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot 5 = 30$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5$

c) $\begin{vmatrix} 8 & 1 & 4 \\ -5 & -3 & -4 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5$

d) $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 4 & -4 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 4 & -3 & -4 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot 5 = -10$

16.-

Siendo $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 8$, determina sin desarrollar:

a) $\begin{vmatrix} 2a & 3b \\ 2c & 3d \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a-3b & b \\ c-3d & d \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} c & d \\ a+2c & b+2d \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 2a & 3b \\ 2c & 3d \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 6 \cdot 8 = 48$ c) $\begin{vmatrix} a-3b & b \\ c-3d & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 8$

b) $\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -8$ d) $\begin{vmatrix} c & d \\ a+2c & b+2d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -8$

17.-

Conocido que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 5 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, calcula el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 5a & -5b & 5c \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

(Canarias. Junio 2007. Opción A. Cuestión 3)

$$\begin{vmatrix} 5a & -5b & 5c \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} a & -b & c \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ 5 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

18.-

Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 6$, determina sin desarrollar el valor de los siguientes determinantes.

a) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d/3 & e/3 & f/3 \\ g & h & i \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2b & c+3a & a/5 \\ 2e & f+3d & d/5 \\ 2h & i+3g & g/5 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+d & b+e & c+f \\ a+d+g & b+e+h & c+f+i \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ \frac{d}{3} & \frac{e}{3} & \frac{f}{3} \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ \frac{d}{3} & \frac{e}{3} & \frac{f}{3} \\ g & h & i \end{vmatrix} = \frac{2}{3} \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+d & b+e & c+f \\ a+d+g & b+e+h & c+f+i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a+d+g & b+e+h & c+f+i \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 6$$

c) $\begin{vmatrix} 2b & c+3a & \frac{a}{5} \\ 2e & f+3d & \frac{d}{5} \\ 2h & i+3g & \frac{g}{5} \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} b & c+3a & \frac{a}{5} \\ e & f+3d & \frac{d}{5} \\ h & i+3g & \frac{g}{5} \end{vmatrix} = \frac{2}{5} \cdot \begin{vmatrix} b & c+3a & a \\ e & f+3d & d \\ h & i+3g & g \end{vmatrix} = \frac{2}{5} \cdot \begin{vmatrix} b & c & a \\ e & f & d \\ h & i & g \end{vmatrix} =$

$$= -\frac{2}{5} \cdot \begin{vmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{vmatrix} = \frac{2}{5} \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \frac{2}{5} \cdot 6 = \frac{12}{5}$$

19.-

Justifica sin desarrollar que los siguientes determinantes son nulos.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -6 \\ 5 & 4 & -10 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 8 & 6 & 7 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 8 & 5 & 9 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 9 & 14 & 3 \end{vmatrix}$

a) El determinante es nulo porque: $C_3 = -2C_1$

b) El determinante es nulo porque: $F_3 = F_1 + F_2$

c) El determinante es nulo porque:

$$C_3 = \frac{1}{2}C_1 + C_2 \rightarrow \begin{vmatrix} 8 & 5 & 9 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

d) El determinante es nulo porque:

$$F_3 = 3F_2 - 2F_1 \rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 9 & 14 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

20.-

Demuestra sin desarrollar que los siguientes determinantes son nulos.

a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+2d & b+2e & c+2f \\ d-a & e-b & f-c \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ z & x & y \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+2d & b+2e & c+2f \\ d-a & e-b & f-c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ d-a & e-b & f-c \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ d-a & e-b & f-c \end{vmatrix} =$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

b) $$\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ z & x & y \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ z & x & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} x+y & x-z & y-z \\ z & z-x & z-y \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(x-z)(y-z) \cdot \begin{vmatrix} x+y & 1 & 1 \\ z & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

21.-

Aplicando propiedades de los determinantes, comprueba que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

22.-

Trata de convertir el siguiente determinante en el determinante de una matriz triangular, y así demostrar la igualdad:

$$\begin{vmatrix} a & a+b & b \\ b & a & b \\ 2a & 3a & a+b \end{vmatrix} = (a-b)^3$$

$$\begin{vmatrix} a & a+b & b \\ b & a & b \\ 2a & 3a & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a+b & b \\ b & a & b \\ a & 2a-b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b & a+b & b \\ 0 & a & b \\ 0 & 2a-b & a \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a-b & a & b \\ 0 & a-b & b \\ 0 & a-b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b & a & b \\ 0 & a-b & b \\ 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a-b)^3$$

23.-

Si la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ tiene determinante n, averigua el valor del determinante de las siguientes matrices:

$$B = \begin{pmatrix} 6d & 4e & 2f \\ 3g & 2h & i \\ 9a & 6b & 3c \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} d+f & e & f+e \\ a+c & b & c+b \\ g+i & h & i+h \end{pmatrix}$$

(Cantabria. Junio 2000. Bloque 2. Opción A)

$$|B| = \begin{vmatrix} 6d & 4e & 2f \\ 3g & 2h & i \\ 9a & 6b & 3c \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 9a & 6b & 3c \\ 3g & 2h & i \\ 6d & 4e & 2f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9a & 6b & 3c \\ 6d & 4e & 2f \\ 3g & 2h & i \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 3a & 2b & c \\ 3d & 2e & f \\ 3g & 2h & i \end{vmatrix} =$$

$$= 6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 36n$$

24.-

Sea A la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{pmatrix}$.

Sea B la matriz que resulta al realizar en A las siguientes transformaciones: primero se multiplica A por sí misma; después, se cambian de lugar la fila segunda y la tercera, y finalmente, se multiplican todos los elementos de la segunda columna por -2.

Calcular el determinante de la matriz B, usando para ello las propiedades de los determinantes.

(País Vasco. Junio 2007. Bloque A. Cuestión A)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 34 & 102 \\ 14 & 90 & 282 \\ 36 & 250 & 804 \end{pmatrix} \rightarrow B = \begin{pmatrix} 6 & -68 & 102 \\ 36 & -500 & 804 \\ 14 & -180 & 282 \end{pmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 6 & -68 & 102 \\ 36 & -500 & 804 \\ 14 & -180 & 282 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 34 & 102 \\ 36 & 250 & 804 \\ 14 & 90 & 282 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 34 & 102 \\ 14 & 90 & 282 \\ 36 & 250 & 804 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{vmatrix}^2 =$$

$$= 2 \cdot \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 24 \end{vmatrix} \right)^2 = 2 \cdot \left(\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 24 \end{vmatrix} \right)^2 = 2 \cdot \left(2 \cdot 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \right)^2 = 2 \cdot 12^2 = 288$$

25.-

Sea A una matriz cuadrada de orden 3.

a) Si sabemos que el determinante de la matriz $2A$ es $|2A| = 8$. ¿Cuánto vale el determinante de A? Escribe la propiedad de los determinantes que hayas usado para obtener este valor.

b) Calcula para qué valores de x se cumple que $|2A| = 8$, siendo A la matriz $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 2 & 2 \\ x & 2-x & 1 \end{pmatrix}$.

(Extremadura. Septiembre 2007. Opción A. Ejercicio 3)

a) $|2A| = 2^3 \cdot |A| = 8 \rightarrow |A| = 1$

Si en una matriz cuadrada multiplicamos por un mismo número todos los elementos de una misma fila (o columna), su determinante queda multiplicado por ese número.

b) $|A| = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 2 & 2 \\ x & 2-x & 1 \end{vmatrix} = x^2 - 2x + 1$

$|2A| = 8 \rightarrow |A| = 1 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 1 \rightarrow x^2 - 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

26.-

Halla el valor de los siguientes determinantes, desarrollando por la fila o columna que más te interese.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 & 4 \\ -1 & -5 & 0 & 6 \\ -2 & -4 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ -3 & -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 & 4 \\ -1 & -5 & 0 & 6 \\ -2 & -4 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 2 \\ -1 & -5 & 0 & 6 \\ -2 & -4 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ -1 & -5 & 6 \\ -2 & -4 & 2 \end{vmatrix} =$

$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ -1 & -5 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 34$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ -3 & -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 8 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = -2(48 + 4 - 6) = -92$

27.-

Dado el determinante $\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \end{vmatrix}$, calcúlalo:

a) Usando la regla de Sarrus.

b) Desarrollando por los elementos de la primera columna.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 7 + 6 - 9 - 84 = -80$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -9 + 2(-39) + 7 = -80$

28.-

Obtén el valor del determinante $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix}$:

a) Mediante la regla de Sarrus.

b) *Haciendo ceros* en la tercera fila y desarrollando por ella.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 60 - 3 + 24 - 8 - 10 + 54 = 117$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -17 & -13 \\ 2 & -8 & -13 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -17 & -13 \\ -8 & -13 \end{vmatrix} = 221 - 104 = 117$

29.-

Calcula el valor del determinante de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(Navarra. Septiembre 2006. Grupo 1. Opción B)

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 2 = 1$$

30.-

Averigua, sin realizar ninguna operación, el valor que debe tener a para que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ -3 & 0 & a & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 6 \\ 5 & 3 & -10 & 4 \end{vmatrix}$ se anule.

$$F_2 = F_2 + F_4 - F_3 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & a-6 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 6 \\ 5 & 3 & -10 & 4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow a = 6$$

31.-

Halla el valor de a que hace que la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & a \end{pmatrix}$ no sea regular.

(Navarra. Junio 2006. Grupo 1. Opción B)

Una matriz A no es regular si $|A| = 0$.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & a+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a+2 \\ 0 & 2 & -a \\ 1 & -1 & a+2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & a+2 \\ 2 & -a \end{vmatrix} = 0 \rightarrow a = -2$$

32.-

Comprueba que $\begin{vmatrix} x+2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x+2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x+1)^3$.

$$\begin{vmatrix} x+2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x+2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x+1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & 0 & 0 \\ 0 & x+1 & 0 \\ 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix} = (x+1)^3$$

33.-

Obtener, en función de a, b y c, el determinante de la matriz:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1+a & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1+b & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+c & 1\end{pmatrix}$$

(La Rioja. Septiembre 2007. Propuesta A. Ejercicio 1)

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1+a & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1+b & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+c & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1+a & -a & -a & -a\\ 1 & b & 0 & 0\\ 1 & 0 & c & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-a & -a & -a\\ b & 0 & 0\\ 0 & c & 0\end{vmatrix}=$$

$$=-abc\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=-abc$$

34.-

Sea A una matriz cuadrada de orden 2 verificando que $2A^2=A$. Calcular razonadamente los posibles valores del determinante de A.

(Castilla y León. Junio 2001. Prueba A. Cuestión 1)

$$|A|=|2\cdot A^2|=2^2|A^2|=4|A|^2$$

$$|A|=4|A|^2\to 4|A|^2-|A|=0\to\begin{cases}|A|=0\\ 4|A|-1=0\to |A|=\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

35.-

Estudia el rango de estas matrices.

a) $\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ -4 & -2 & 0\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}3 & 5 & -2\\ 1 & 4 & 5\\ 8 & 11 & -11\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}2 & 6 & 1 & 3\\ -2 & 3 & 0 & 5\\ 2 & 24 & 3 & 19\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}6 & -9\\ -8 & 12\\ 12 & -18\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}1 & -4 & 0\\ -2 & 8 & 3\\ 3 & 1 & -2\end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix}-1 & 2 & 6 & 3\\ 4 & -8 & -24 & 1\end{pmatrix}$

a) $\begin{vmatrix}2 & 3\\ -4 & 0\end{vmatrix}=12\neq 0\to$ El rango de la matriz es 2.

b) $\begin{vmatrix}6 & -9\\ -8 & 12\end{vmatrix}=0$ $\begin{vmatrix}6 & -9\\ 12 & -18\end{vmatrix}=0$ $6\neq 0\to$ El rango de la matriz es 1.

c) $\begin{vmatrix}3 & 5 & -2\\ 1 & 4 & 5\\ 8 & 11 & -11\end{vmatrix}=0$ $\begin{vmatrix}3 & 5\\ 1 & 4\end{vmatrix}=7\neq 0\to$ El rango de la matriz es 2.

d) $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -2 & 8 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -39 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 3.

e) $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & 24 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 18 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

f) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -13 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

36.-

Calcular el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & -3 & -3 \\ 2 & 4 & 0 & -6 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

(Castilla y León. Junio 2008. Prueba B. Cuestión 2)

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & -3 & -3 \\ 2 & 4 & 0 & -6 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & -5 \\ -4 & -8 & 0 & 12 \\ 2 & 4 & 0 & -6 \\ 7 & 14 & 0 & -21 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

37.-

Comprueba que la matriz $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ tiene rango 2. Añade dos filas que no sean nulas ni iguales a las anteriores de modo que el rango siga siendo 2.

$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -20 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

Respuesta abierta. Por ejemplo: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 6 & -3 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \\ 8 & -4 & 6 \end{pmatrix}$

38.-

Dada la matriz $\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, añade una columna de modo que el rango sea 3. Demuéstralo.

Respuesta abierta. Por ejemplo: $\begin{pmatrix} 4 & -6 & 1 \\ -6 & 9 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 4 & -6 & 1 \\ -6 & 9 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \rightarrow \text{El rango de la matriz es 3.}$$

39.-

¿Para qué valor de m el rango de esta matriz es 2? $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & m & 6 \\ -5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$

Para que el rango de la matriz sea 2, el menor de orden 3 tiene que ser igual a 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & m & 6 \\ -5 & 3 & -7 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -7m - 120 + 72 + 30m - 18 + 112 = 0$$
$$\rightarrow 23m + 46 = 0 \rightarrow m = -2$$

Si $\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -18 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

40.-

Obtener el valor de a para que el rango de la matriz A sea igual a 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 6 & a \end{pmatrix}$$

(La Rioja. Junio 2003. Propuesta A. Ejercicio 1)

Para que el rango de la matriz sea 2, los menores de orden 3 tienen que ser iguales a 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 6 & a \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -12 + 6 - 6a = 0 \rightarrow -6 - 6a = 0 \rightarrow a = -1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \rightarrow \text{El rango de la matriz es 2.}$$

41.-
Calcula el rango de cada matriz en función de cada uno de los parámetros.

a) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & a \\ -5 & -6 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} b & 2 & -1 \\ 3 & 2 & b+1 \\ 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) \geq 2$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & a \\ -5 & -6 & 2 \end{vmatrix} = -48 - 16a$$

- Si $a \neq -3 \rightarrow$ El menor de orden 3 es distinto de cero. El rango de la matriz es 3.
- Si $a = -3 \rightarrow$ El menor de orden 3 es nulo. El rango de la matriz es 2.

b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) \geq 2$

$$\begin{vmatrix} b & 2 & -1 \\ 3 & 2 & b+1 \\ 7 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 10b - 6b^2 \qquad -6b^2 + 10b + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ b = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

- Si $b \in \mathbb{R} - \left\{2, -\dfrac{1}{3}\right\} \rightarrow$ El menor de orden 3 es distinto de cero. El rango de la matriz es 3.
- Si $b = 2$ o $b = -\dfrac{1}{3} \rightarrow$ El menor de orden 3 es nulo. El rango de la matriz es 2.

42.-
Estudia el rango de la matriz para los distintos valores del parámetro.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & a \end{pmatrix}$$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) \geq 2$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) \geq 3$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 5+a \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5+a \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & a \end{vmatrix} = 20 - 2a$$

- Si $a \neq 10 \rightarrow$ El menor de orden 4 es distinto de cero. El rango de la matriz es 4.
- Si $a = 10 \rightarrow$ El menor de orden 4 es nulo. El rango de la matriz es 3.

43.-

Calcula el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ -1 & 2\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Castilla-La Mancha. Junio 2007. Bloque 3. Pregunta A)

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ -1 & 2\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4\lambda^2 - 2\lambda = 2\lambda(2\lambda - 1)$$

- Si $\lambda \in \mathbb{R} - \left\{0, \frac{1}{2}\right\} \rightarrow$ El menor de orden 3 es distinto de cero. El rango de la matriz es 3.
- Si $\lambda = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.
- Si $\lambda = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{2} \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

44.-

Halla la matriz inversa de estas matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

a) $|A| = 2 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

b) $|B| = 1 \neq 0 \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -2 & 7 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $|C| = -20 \neq 0 \rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{20} & \frac{7}{20} \end{pmatrix}$

d) $|D| = 10 \neq 0 \rightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{10} & -\frac{9}{10} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{9}{10} & -\frac{11}{10} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{10} & -\frac{7}{10} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$

45.-

¿Para qué valores del parámetro a la matriz no tiene inversa? Calcula la matriz inversa cuando $a = 2$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ a+1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$|M| = a - a^2$

La matriz no tiene inversa si su determinante es nulo, es decir, si $a = 0$ o $a = 1$.

Si $a = 2 \rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow |M| = -2 \rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

46.-

A, B y C son tres matrices cuadradas tales que $|A| = 5$, $|B| = 4$ y $|C| = 2$. Decide razonadamente el valor de los siguientes determinantes.

a) $|A^t|$

b) $|B^{-1}|$

c) $|AB^{-1}|$

d) $|AB^{-1}|$

e) $|(BC)^{-1}|$

f) $|C^{-1}B^t|$

a) $|A^t| = |A| = 5$

b) $|B^{-1}| = \frac{1}{|B|} = \frac{1}{4}$

c) $|AB^{-1}| = |A| \cdot |B^{-1}| = |A| \cdot \frac{1}{|B|} = 5 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

d) $|A^{-1}B| = |A^{-1}| \cdot |B| = \frac{1}{|A|} \cdot |B| = \frac{1}{5} \cdot 4 = \frac{4}{5}$

e) $|(BC)^{-1}| = \frac{1}{|BC|} = \frac{1}{|B| \cdot |C|} = \frac{1}{4 \cdot 2} = \frac{1}{8}$

f) $|C^{-1}B^t| = |C^{-1}| \cdot |B^t| = \frac{1}{|C|} \cdot |B| = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$

47.-

Calcula las matrices X, Y, Z y T que cumplen las ecuaciones.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 30 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} 11 & 10 & 0 \\ 14 & 4 & 16 \end{pmatrix}$

c) $Z \cdot \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 & 14 \\ -13 & -3 \end{pmatrix}$

d) $T \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 9 \\ 0 & -11 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

a) $X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 30 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 30 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

b) $Y = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 10 & 0 \\ 14 & 4 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{16} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 10 & 0 \\ 14 & 4 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

c) $Z = \begin{pmatrix} 66 & 14 \\ -13 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 66 & 14 \\ -13 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

d) $T = \begin{pmatrix} 17 & 9 \\ 0 & -11 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 17 & 9 \\ 0 & -11 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & -\frac{2}{11} \\ -\frac{2}{11} & \frac{5}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

48.-

Determina las matrices X, Y, Z… en las ecuaciones.

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 14 & 9 \\ -17 & -10 \\ 17 & 11 \end{pmatrix}$

b) $Y \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ 13 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -10 & -10 \\ -10 & 10 & -10 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot Z = \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \cdot T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 28 & 111 \\ 54 & 52 & 194 \end{pmatrix}$

a) $X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 9 \\ -17 & -10 \\ 17 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 9 \\ -17 & -10 \\ 17 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

b) $Y = \left[\begin{pmatrix} 10 & -10 & -10 \\ -10 & 10 & -10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ 13 & -2 & -3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}^{-1} =$

$= \begin{pmatrix} 3 & -6 & -8 \\ -23 & 12 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 8 & 6 & \frac{3}{2} \\ -4 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 9 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $Z = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \frac{7}{8} & -\frac{3}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $T = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 32 & 28 & 111 \\ 54 & 52 & 194 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} =$

$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 32 & 28 & 111 \\ 54 & 52 & 194 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 10 & 4 & 28 \\ -8 & 12 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

49.-

Siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 11 & 12 \\ -1 & -4 & 17 \\ 2 & 12 & 2 \end{pmatrix}$, encuentra dos matrices C y D tales que:

$$CA = B \qquad DB = A$$

¿Qué relación hay entre C y D?

$C = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 11 & 12 \\ -1 & -4 & 17 \\ 2 & 12 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}^{-1} =$

$$=\begin{pmatrix} 2 & 11 & 12 \\ -1 & -4 & 17 \\ 2 & 12 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{76}\begin{pmatrix} 35 & -23 & 9 \\ -2 & 10 & 6 \\ 15 & 1 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = AB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 11 & 12 \\ -1 & -4 & 17 \\ 2 & 12 & 2 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{76}\begin{pmatrix} 212 & -122 & -235 \\ -36 & 20 & 46 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -5 & 3 & 6 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$CD = BA^{-1}AB^{-1} = BIB^{-1} = BB^{-1} = I \rightarrow C$ y D son inversas.

50.-

Determina la matriz X que verifica la ecuación $AX = X - B$ siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(Andalucía. Junio 2002. Opción B. Ejercicio 3)

$$AX = X - B \rightarrow AX - X = -B \rightarrow (A - I)X = -B \rightarrow X = (A - I)^{-1}(-B)$$

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow (A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$