UNIDAD 5: MATRICES Y DETERMINANTES

ÍNDICE DE LA UNIDAD

1.- INTRODUCCIÓN.

*La palabra álgebra proviene del libro **Al-jabr wa'l muqabalah**, del matemático árabe **Al-Jowarizmi** (siglo IX). Con dicho nombre se designó en occidente en posteriores siglos a la ciencia que aprendieron del citado libro. El principal objetivo del álgebra clásico fue la resolución de ecuaciones hasta prácticamente la Edad Media con la aparición del libro de Al-Jowarizmi. El Álgebra se extendió hacia Europa a través de España se consagró durante los siglos XVI y XVII.*

*Matemáticos como **Diofanto** (siglo III), **Cardano y Tartaglia** (siglo XVI), **Vieta y Descartes** (siglo XVII), **Gauss, Galois, Hamilton, Sylvester y Cauchy** (siglo XIX) son los principales impulsores del desarrollo y formalización del Álgebra durante la historia.*

*Con la unidad que comenzamos comienza un nuevo bloque del curso: **Álgebra Lineal**, que está bastante relacionado con el último que veremos a final de curso, el bloque de Geometría del espacio. A diferencia del bloque anterior, este es mucho más* *mecánico en cuanto a sus aplicaciones prácticas y constituye una potente herramienta de base para estudios posteriores. En la siguiente unidad nos enfrentamos a un nuevo concepto que va más allá del campo de los números reales. Se trata de las* ***matrices****, con numerosas aplicaciones en muchos campos de las ciencias.*

2.- MATRICES. CONCEPTOS BÁSICOS. TIPOS DE MATRICES.

Definición 1: Se llama **matriz** de **dimensión** $m x n$ a todo conjunto de $m \cdot n$ números reales ordenados en filas y columnas de la forma: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Se designa por a_{ij} al elemento que ocupa la fila i y columna j. Para abreviar, diremos que $A \in M_{mxn}(\mathbb{R})$.

Ejemplo 1: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & -7 & 4 \end{pmatrix}$ es una matriz de dimensión $2x3$.

Definición 2: . Dos **matrices** son **iguales** si tienen la misma dimensión y coinciden elemento a elemento.

Definición 3: Una **matriz** se llama **cuadrada** de **orden** n si tiene dimensión nxn, es decir si tiene igual número de filas que de columnas. En este caso, al conjunto de elementos de la forma a_{ii} se le llama **diagonal principal** y a los de la forma a_{ij} con $i+j=n+1$ se le llama **diagonal secundaria.**

Ejemplo 2: $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ es una matriz cuadrada de orden 2 siendo su diagonal principal (1 4) y su diagonal secundaria (2 3).

$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ -4 & 2 & -7 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ es una matriz cuadrada de orden 3, su diagonal principal es (-1 2 9) y su diagonal secundaria es (5 2 1).

Definición 4: Dada una matriz A, se llama **matriz opuesta** de A a la matriz $-A$ cuyos elementos son los opuestos de los de A.

Ejemplo 3: La matriz opuesta de la C del ejemplo 2 es $-C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 4 & -2 & 7 \\ -1 & -4 & -9 \end{pmatrix}$.

<u>Definición 5:</u> Dada una matriz A, de dimensión $m x n$, se llama **matriz traspuesta** de A, a la matriz A^t de dimensión $n x m$ que resulta de intercambiar filas por columnas en A.

<u>Ejemplo 4:</u> Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, entonces, $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

<u>Nota 1:</u> Es evidente que $\left(A^t\right)^t = A$ para cualquier matriz A.

<u>Definición 6:</u> Una matriz A se llama:

a) **Matriz fila** si tiene una sola fila. Por ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 & 3 \end{pmatrix}$.

b) **Matriz columna** si tiene una sola columna. Por ejemplo: $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

c) **Matriz triangular superior** si es cuadrada y todos los elementos situados por debajo de la diagonal principal son nulos. Por ejemplo: $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

d) **Matriz triangular inferior** si es cuadrada y todos los elementos situados por encima de la diagonal principal son nulos. Por ejemplo: $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -7 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

e) **Matriz triangular** si es triangular superior o triangular inferior.

f) **Matriz diagonal** si es triangular superior e inferior, es decir, si todos los elementos fuera de la diagonal principal son nulos. Por ejemplo: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

g) **Matriz escalar** si es diagonal y todos los términos de la diagonal principal son iguales. Por ejemplo: $F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

h) **Matriz identidad o unidad** si es escalar y los escalares son todos unos. Sólo existe una para cada orden y se representa por I_n, siendo n el orden de la matriz. Por ejemplo:

$I_1 = (1)$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.........

i) **Matriz nula o cero** si todos sus elementos son nulos. Si son cuadradas se representan por O_n. Por ejemplo: $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

j) **Matriz simétrica** si es cuadrada y coincide con su traspuesta, es decir, si $A = A^t$. Por ejemplo: $G = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

k) **Matriz antisimétrica o hemisimétrica** si es cuadrada y coincide con la opuesta de su traspuesta, es decir, si $A = -A^t$. Por ejemplo: $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 7 \\ 2 & -7 & 0 \end{pmatrix}$.

<u>**Nota 2:**</u> Es evidente que si una matriz es antisimétrica, todos los elementos de su diagonal principal han de ser nulos.

Se proponen las **actividades 1 y 2.**

<u>3.- OPERACIONES CON MATRICES.</u>

<u>**Definición 7:**</u> Dadas dos matrices A y B, <u>de la misma dimensión</u>, se llama matriz **suma** $A+B$ a la matriz de la misma dimensión que se obtiene sumando los elementos de A y B situados en la misma fila y columna.

<u>**Ejemplo 5:**</u> $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$.

<u>**Nota 3:**</u> Obsérvese que dos matrices sólo se pueden sumar si tienen la misma dimensión.

<u>**Nota 4:**</u> La "resta" de dos matrices es la suma de la matriz "minuendo" con la opuesta de la matriz "sustraendo", es decir, $A-B = A+(-B)$. En la práctica se restan los elementos directamente.

<u>**Proposición 1:**</u> **(Propiedades de la suma).** La suma anteriormente definida verifica:

a) $A+(B+C) = (A+B)+C$ (Asociativa)
b) $A+O = A$ (Elemento neutro)
c) $A+(-A) = O$ (Elemento simétrico)
d) $A+B = B+A$ (Conmutativa)
e) $(A+B)^t = A^t + B^t$

<u>**Definición 8:**</u> Dada una matriz A de dimensión $m x n$ y un número real α, se define la matriz **producto de** α **por A** como la matriz $\alpha \cdot A$ de, dimensión $m x n$, que se obtiene al multiplicar α por todos los elementos de A cada uno en su lugar correspondiente.

<u>**Ejemplo 6:**</u> $-2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 10 & -16 \end{pmatrix}$.

<u>Proposición 2:</u> (Propiedades del producto por escalar). El producto así definido verifica:

a) $\alpha\left(A+B\right)=\alpha A+\alpha B$ (Distributiva respecto de la suma de matrices)

b) $\left(\alpha+\beta\right)A=pA+qA$ (Distributiva respecto de la suma de escalares)

c) $\alpha\left(\beta A\right)=\left(\alpha\cdot\beta\right)A$ (Asociativa)

d) $\alpha A=A\alpha$ (Conmutativa)

e) $\left(\alpha A\right)^t=\alpha A^t$

<u>Nota 5:</u> No existe la división de una matriz por un número. Nunca se escribe $\frac{A}{3}$, sino $\frac{1}{3}A$.

<u>Definición 9:</u> Dada una matriz A de dimensión $m\,x\,n$ y una matriz B de dimensión $n\,x\,p$, se define la matriz **producto de A por B** como la matriz $C=A\cdot B$, de dimensión $m\,x\,p$, tal que cada elemento c_{ij} es la suma de los productos de los elementos de la i-ésima fila de A por los de la j-ésima columna de B en el orden usual (de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo). Dicho de otra forma, $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+.....+a_{in}b_{nj}$.

<u>Ejemplo 7:</u> $\begin{pmatrix}1&2&4\\2&1&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&3\\0&2\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot(-1)+2\cdot0+4\cdot1 & 1\cdot3+2\cdot2+4\cdot0\\2\cdot(-1)+1\cdot0+5\cdot1 & 2\cdot3+1\cdot2+5\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&7\\3&8\end{pmatrix}$.

<u>Nota 6:</u> Obsérvese que para que pueda efectuarse el producto $A\cdot B$ es imprescindible que el número de columnas de A coincida con el número de filas de B. Si no se cumple esto, ni siquiera existe el producto.

<u>Proposición 3:</u> (Propiedades del producto de matrices). El producto antes definido verifica:

a) $A\cdot\left(B\cdot C\right)=\left(A\cdot B\right)\cdot C$ (Asociativa)

b) $A\cdot I=I\cdot A=A$ (Elemento neutro)

c) $A\cdot\left(B+C\right)=A\cdot B+A\cdot C$ (Distributiva)

d) $\left(A\cdot B\right)^t=B^t\cdot A^t$

e) $A\cdot B\neq B\cdot A\;\; en\;\; general$ (No conmutativa)

<u>Si se cumple esta propiedad, se dice que A y B **conmutan**.</u>

f) $A\cdot B=A\cdot C$ no implica que $B=C$ (No cancelativa)

g) $A\cdot B=O$ no implica que $A=O$ ó $B=O$ (Divisores de cero)

<u>Definición 10:</u> Dada una matriz A, cuadrada de orden n, se define la **potencia n-ésima de A** como el producto de A por sí misma n veces, es decir, $A^n=A\cdot A\cdot ....A$ (n veces)

<u>Ejemplo 8:</u> Si $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,.....

En general: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sin más que efectuar los productos.

Se proponen las **actividades de la 3 a la 12.**

4.- TRANSFORMACIONES ELEMENTALES EN UNA MATRIZ.

Definición 11: Se llaman **transformaciones elementales por filas** en una matriz a las siguientes:

a) Intercambiar las filas i y j, que lo escribiremos: $F_i \leftrightarrow F_j$.
b) Sustituir la fila i por el resultado de multiplicarla por un escalar $a \neq 0$, que lo escribiremos: $F_i' = aF_i$.
c) Sustituir la fila i por el resultado de sumar los productos de las filas i y j por dos escalares $a \neq 0$, $b \neq 0$, que los escribiremos: $F_i' = F_i + aF_j$.

Nota 7: Es importante observar que estas operaciones también se extienden a combinaciones lineales entre más de dos filas siempre que el escalar que multiplique a la fila que se cambia no sea nulo. Por ejemplo, es válida la transformación $F_3' = -2F_2 + F_1 + 5F_3$, pero no es válida la transformación: $F_3' = -2F_2 + F_1$ ya que el coeficiente de la fila 3 es nulo (no aparece). Las más habituales son las del tipo: $F_2' = -2F_2 + 3F_1$, que, aunque no es elemental, si es la combinación de dos elementales, la b y la c. Por ello, la utilizaremos a menudo de la misma forma que si fuese elemental.

Nota 8: Análogas transformaciones se tienen para columnas cambiando F por C.

Definición 12: Si una matriz B se obtiene de A mediante trasformaciones elementales, se dice que A y B son **equivalentes** y se escribe $A \approx B$.

Definición 13: Se llama **matriz escalonada por filas** de una matriz A, a cualquier matriz B equivalente a A que tenga ceros debajo de cada elemento de la forma b_{ii}. Si además, los elementos de la forma b_{ii} son todos 1, se dice **matriz reducida por filas** de A.

Ejemplo 9:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \overset{F_1 \leftrightarrow F_2}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \underset{F_3' = -2F_1 + F_3}{\overset{F_2' = -2F_1 + F_2}{\approx}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & -1 & 3 \end{pmatrix} \overset{F_3' = F_3 - F_2}{\approx}$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \underset{F_3' = \frac{1}{4}F_3}{\overset{F_2' = \frac{1}{5}F_2}{\approx}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = B,$$

que es una reducida por filas de A. La matriz del paso anterior a B sería una matriz escalonada por filas de A.

Se propone la **actividad 13.**

5.- MATRIZ INVERSA .

Definición 14: Una matriz A, cuadrada de orden n, se llama **invertible, inversible, regular o no singular** si existe otra matriz B, cuadrada de orden n, tal que $AB = BA = I_n$. En tal caso, a la matriz B se le llama **matriz inversa** de A y se designa por A^{-1}, es decir, se cumple $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$.

Nota 9: Es evidente, a partir de la definición, que sólo existe el concepto de matriz inversa para matrices cuadradas. En las no cuadradas, ni siquiera está definido.

Nota 10: La inversa, en caso de existir, es única.

Ejemplo 10: La inversa de $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5/4 \\ -1 & 3/4 \end{pmatrix}$. Para comprobarlo, basta aplicar la definición.

Proposición 4: (Propiedades de la inversa) Sean A y B regulares y del mismo orden. Entonces se verifica:

a) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$ b) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

En esta unidad veremos dos métodos de cálculo para la matriz inversa, aunque el método más utilizado lo veremos al final de esta unidad. El primero no es aconsejable para matrices de orden superior a 2.

Nota 11: (Cálculo de la matriz inversa)

- *MÉTODO 1* (A través de la definición): Consiste en colocar n^2 incógnitas en una matriz genérica A^{-1}, cuadrada de orden n, y resolver el sistema de ecuaciones exigiendo que $A \cdot A^{-1} = I_n$.

Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ y $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Exigiendo que: $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, obtenemos el sistema: $\begin{cases} 3a + 5c = 1 \\ 3b + 5d = 0 \\ 4a + 8c = 0 \\ 4b + 8d = 1 \end{cases}$. Resolviendo: $\begin{cases} a = 2 \\ b = -5/4 \\ c = -1 \\ d = 3/4 \end{cases}$. Así pues, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5/4 \\ -1 & 3/4 \end{pmatrix}$.

- *MÉTODO 2:* (De Gauss-Jordan): Consiste en transformar la matriz: $\left(A \middle| I_n\right)$ en la matriz equivalente: $\left(I_n \middle| A^{-1}\right)$ mediante transformaciones elementales por filas. También se pueden hacer las transformaciones por separado, es decir, transformar la matriz A en la identidad mediante transformaciones elementales y luego aplicarle esas mismas transformaciones a la identidad, con lo que obtendremos la inversa de A.

Ejemplo 11: Calculemos la inversa de $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ por este método:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{F_2'=5F_1-3F_2}{\approx} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \overset{F_1'=F_1+F_2}{\approx} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & -1 & 5 & -3 \end{pmatrix} \underset{F_2'=-F_2}{\overset{F_1'=\frac{1}{3}F_1}{\approx}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

Ejemplo 12: Calculemos la inversa de $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ por este método:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{F_2'=-3F_1+F_2}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_3'=3F_3-2F_2}{\overset{F_1'=3F_1+F_2}{\approx}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -2 & 3 \end{pmatrix} \underset{F_2'=F_2-F_3}{\overset{F_1'=-4F_3+F_1}{\approx}}$$

$$\approx \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -24 & 9 & -12 \\ 0 & 6 & 0 & -9 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -2 & 3 \end{pmatrix} \underset{F_2'=\frac{1}{6}F_2}{\overset{F_1'=\frac{1}{3}F_1}{\approx}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -8 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & -4 \\ -3/2 & 1/2 & -1/2 \\ 6 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Se propone la **actividad 14.**

6.- RANGO DE UNA MATRIZ.

Existen varias definiciones equivalentes de rango de una matriz que veremos a lo largo de esta y otras unidades cuando dispongamos de los conceptos previos necesarios. Comenzaremos con la primera relacionada con la matriz reducida.

Definición 15: Se denomina **rango** de una matriz A y se escribe $\operatorname{rg} A$, al número de filas no nulas de una matriz escalonada por filas de A. Análogamente para columnas.

Nota 12: El rango de una matriz no varía cuando esta se somete a transformaciones elementales, por tanto, los rangos de dos matrices equivalentes coinciden. Así, se pueden suprimir las filas o columnas nulas y las que sean combinación lineal de otras para determinar el rango.

Nota 13: Si una matriz es de dimensión $m\,x\,n$, su rango no puede ser mayor que m ni mayor que n. Así, el rango de una matriz cuadrada de orden n es siempre menor o igual a n. Evidentemente también es positivo por definición.

Nota 14: Es evidente, a partir de la definición, que el rango de una matriz coincide siempre con el de su traspuesta.

Nota 15: Es también lógico y evidente que el rango por filas y por columnas coincide, por lo que podemos hacerlo escalonando por filas o por columnas.

Proposición 5: **(Condición de existencia de inversa)** Una matriz cuadrada de orden n tiene inversa, si y solo si, su rango es máximo, es decir, si su rango es n.

Ejemplo 13: $A=\begin{pmatrix}2&3\\1&4\\9&11\end{pmatrix}\underset{F_3'=9F_1-2F_3}{\overset{F_2'=-2F_2+F_1}{\approx}}\begin{pmatrix}2&3\\0&-5\\0&5\end{pmatrix}\overset{F_3'=F_3+F_2}{\approx}\begin{pmatrix}2&3\\0&-5\\0&0\end{pmatrix}$. Por tanto $\mathrm{rg}A=2$.

Ejemplo 14: $B=\begin{pmatrix}1&2&5\\-1&3&-2\\3&1&0\end{pmatrix}\underset{F_3'=-3F_1+F_3}{\overset{F_2'=F_1+F_2}{\approx}}\begin{pmatrix}1&2&5\\0&5&3\\0&-5&-15\end{pmatrix}\overset{F_3'=F_2+F_3}{\approx}\begin{pmatrix}1&2&5\\0&5&3\\0&0&-12\end{pmatrix}$. Luego $\mathrm{rg}B=3$.

Se propone la **actividad 15**.

7.- ECUACIONES Y SISTEMAS MATRICIALES.

Definición 16: Se llama **ecuación/sistema matricial** a toda ecuación/sistema en el que la/s incógnitas sean matrices. Por ejemplo: $AX=B$ y $\begin{cases}2X-Y=C\\-5X+6Y=D\end{cases}$, siendo A, B, C, D, X e Y matrices.

Sólo analizaremos algunos casos concretos sencillos de ecuaciones y sistemas lineales que nos proporcionarán las herramientas básicas para los demás casos que se nos presenten. Además, en algunos casos, al final de la unidad dispondremos de herramientas de cálculo más potentes (determinantes) para resolverlas.

- CASO 1: La ecuación lineal general $AX=B$

Si la matriz A es invertible, la ecuación es equivalente a $A^{-1}AX=A^{-1}B$ y, por tanto $X=A^{-1}B$.

En caso de que no sea invertible, o que ni siquiera sea cuadrada, se resuelve considerando la matriz incógnita X como una matriz genérica de $m\cdot n$ incógnitas y resolviendo el sistema lineal de ecuaciones. Es importante recordar que el producto de matrices no es conmutativo, por lo que no debemos olvidar que no es lo mismo multiplicar a derecha que a izquierda. Así, si la ecuación fuese $XA=B$, la solución sería $X=BA^{-1}$ siempre que A sea invertible.

Ejemplo 15: Resolvamos la ecuación $AX+B=C$, siendo $A=\begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&2&-3\\2&0&1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}6&3&1\\4&1&0\end{pmatrix}$. Es evidente que la ecuación es equivalente a $AX=C-B$. Para despejar X, vemos primero si A es invertible. Un simple cálculo nos lleva a que lo es, siendo $A^{-1}=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}$. Así pues, según lo visto $X=A^{-1}(C-B)$. Sin más que sustituir y calcular, se tiene que $X=\begin{pmatrix}10&5&5\\6&3&2\end{pmatrix}$.

- CASO 2: El sistema lineal general $\begin{cases}aX+bY=A\\cX+dY=B\end{cases}$

Este tipo de sistema se resuelve utilizando los mismos métodos (sustitución, igualación y reducción) que en los sistemas numéricos con la salvedad de que no existe la división de una matriz por un número (ver nota 5).

Ejemplo 16: Resolvamos el sistema matricial: $\begin{cases} X+2Y=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ 2X-3Y=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \end{cases}$. Por comodidad, llamamos A y B a los términos independientes, con lo que queda: $\begin{cases} X+2Y=A \\ 2X-3Y=B \end{cases}$.

Si aplicamos el método de reducción: $\begin{cases} X+2Y=A \\ 2X-3Y=B \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-2)} \begin{cases} -2X-4Y=-2A \\ 2X-3Y=B \end{cases}$.

Sumando ambas ecuaciones queda: $-7Y=B-2A$, con lo que $Y=\frac{1}{7}(2A-B)$. Sustituyendo en la primera ecuación, operando y despejando X, se obtiene: $X=\frac{1}{7}(3A+2B)$, con lo que la solución es: $X=\begin{pmatrix} 8/7 & 9/7 \\ 8/7 & 13/7 \end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix} 3/7 & 13/7 \\ -4/7 & 4/7 \end{pmatrix}$

Se proponen las **actividades 16 y 17.**

8.- APLICACIONES DEL CÁLCULO MATRICIAL.

Existen numerosas situaciones reales en las que el cálculo matricial tiene gran utilidad (Sociología, Transporte, Teoría de Grafos,...). Veamos uno de estos ejemplos:

Ejemplo 17: Una fábrica produce dos modelos de lavadoras: A y B, en tres terminaciones: N, L y S. Produce del modelo A: 400 unidades en la terminación N, 200 unidades en la L y 50 en la S. Produce del modelo B: 300 unidades en la terminación N, 100 unidades en la L y 30 en la S. La terminación N lleva 25 horas de taller y 1 hora de administración. La terminación L lleva 30 horas de taller y 1,2 horas de administración. La terminación S lleva 33 horas de taller y 1,3 horas de administración. Calculemos, utilizando cálculo matricial, una matriz que represente las horas de taller y administración para cada uno de los modelos.

La matriz $P=\begin{pmatrix} 400 & 200 & 50 \\ 300 & 100 & 30 \end{pmatrix}$, representa la cantidad de lavadoras para cada modelo y terminación.

La matriz $H=\begin{pmatrix} 25 & 1 \\ 30 & 1{,}2 \\ 33 & 1{,}3 \end{pmatrix}$, representa la cantidad de horas de taller y administración para cada terminación.

Así pues, la matriz $P\cdot H=\begin{pmatrix} 400 & 200 & 50 \\ 300 & 100 & 30 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 25 & 1 \\ 30 & 1{,}2 \\ 33 & 1{,}3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 17650 & 705 \\ 11490 & 459 \end{pmatrix}$

Esta matriz representará las horas de taller (1ª columna) y administración (2ª columna) para cada modelo A (1ª fila) y B (2ª fila).

Se proponen las **actividades 18 y 19.**

9.- DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA.

Definición 17: Llamamos **permutación** de un conjunto a cada posible ordenación de los elementos del conjunto en función de una ordenación de partida a la que se llama **permutación principal**. Cada dos elementos colocados en orden contrario al de la permutación principal, se dice que están en **inversión.** Se llama **índice** de una permutación al número de inversiones que tiene. Diremos que una **permutación** es **par** si tiene índice par e **impar** si tiene índice impar.

Nota 16: Es inmediato ver que si un conjunto tiene n elementos, existen n! permutaciones del conjunto.

Ejemplo 18: Consideremos el conjunto $A=\{1, 2, 3\}$. En el siguiente cuadro se pueden ver todas las permutaciones y su paridad:

Permutación	(1, 2, 3)	(1, 3, 2)	(2, 1, 3)	(2, 3, 1)	(3, 1, 2)	(3, 2, 1)
Nº de inversiones	0	1	1	2	2	3
Paridad	Par	Impar	Impar	Par	Par	Impar

Definición 18: Dada una matriz A, cuadrada de dimensión n, llamamos **determinante de A**, a la suma de todos los productos de n factores que se pueden efectuar tomando un único elemento de cada fila y un único elemento de cada columna, precedido por un signo que es positivo si la permutación correspondiente a los subíndices de las columnas es par y negativo si es impar, una vez puestos los subíndices de las filas en el orden natural de la permutación principal. El determinante de A se escribe: $|A|$ *o bien* $\det(A)$.

Nota 17: Lo primero que hemos de observar es que el determinante de una matriz es un número real y que únicamente existe cuando la matriz es cuadrada.

10.- DETERMINANTES DE ORDEN 2 Y 3.

La definición anterior correspondiente al concepto de determinante apenas se utiliza en la práctica debido a su complejidad. Durante los siguientes puntos veremos métodos más efectivos en la práctica. Vamos a comenzar con reglas prácticas para calcular determinantes de orden 2 y 3 que son los más utilizados.

Nota 18: (Cálculo de determinantes de orden 2)

El determinante de una matriz cuadrada de orden 2 es: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Ejemplo 19:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = -5-6 = -11$ b) $\begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x \\ -\cos x & \operatorname{sen} x \end{vmatrix} = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

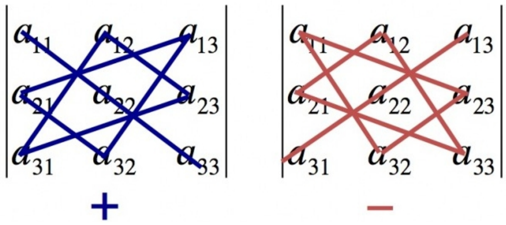
<u>Nota 19:</u> (Cálculo de determinantes de orden 3. Regla de Sarrus)

El determinante de una matriz cuadrada de orden 3 es:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Esta última expresión se puede recordar fácilmente con la llamada **regla de Sarrus**, que gráficamente se puede interpretar con el siguiente diagrama:



<u>Ejemplo 20:</u> $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 3\cdot 4\cdot 6 + (-2)\cdot(-1)\cdot(-2) + 0\cdot 1\cdot 5 - 5\cdot 4\cdot(-2) - 0\cdot(-2)\cdot 6 - 3\cdot 1\cdot(-1) =$

$= 72 - 4 + 0 + 40 - 0 + 3 = 111$

Se proponen las **actividades 20, 21 y 22.**

<u>11.- PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES.</u>

<u>Proposición 6:</u> (Propiedades de los determinantes). Para matrices cuadras se cumple:

a) $|A| = |A^t|$. Es decir, el determinante de una matriz y el de su traspuesta coinciden.

b) Si todos los elementos de una línea de A son nulos, entonces, $|A| = 0$.

c) Si intercambiamos entre sí dos líneas paralelas de una matriz, el determinante cambia de signo.
d) Si una matriz tiene dos líneas iguales o proporcionales, su determinante es cero.
e) Si una línea es combinación lineal de otras paralelas, el determinante es cero.
f) Si se multiplican los elementos de una línea por un número, el determinante queda multiplicado por ese número, es decir, si B es la matriz que resulta de multiplicar A por λ, entonces $|B| = \lambda|A|$.

g) Si se multiplica una matriz A, de dimensión n, por un número λ, su determinante queda multiplicado por λ^n, es decir, $|\lambda A| = \lambda^n |A|$.

h) Si todos los elementos de una línea de un determinante (por ejemplo la j-ésima) son de la forma $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$, entonces el determinante es igual a la suma de dos determinantes, cuyas columnas coinciden con las del determinante dado, excepto la j-ésima que lleva respectivamente cada uno de los dos sumandos. Esto es:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & .. & b_{1j}+c_{1j} & .. & a_{1n} \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & .. & b_{nj}+c_{nj} & .. & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & .. & b_{1j} & .. & a_{1n} \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & .. & b_{nj} & .. & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & .. & c_{1j} & .. & a_{1n} \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & .. & c_{nj} & .. & a_{nn} \end{vmatrix}$$

i) Si a una línea se le suma una línea proporcional o una combinación lineal de otras paralelas, el determinante no varía.

j) El determinante del producto de matrices cuadradas es el producto de los determinantes, es decir, $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

k) En general, la propiedad anterior no es cierta para la suma, es decir, $|A \pm B| \neq |A| \pm |B|$

<u>Nota 20:</u> Conviene recordar el efecto que provocan las transformaciones elementales por filas (o columnas) en un determinante y que se deducen de las propiedades anteriores (c, f e i):

a) Intercambiar las filas i y j, que lo escribiremos: $F_i \leftrightarrow F_j$. <u>Cambia el signo del determinante.</u>

b) Sustituir la fila i por el resultado de multiplicarla por un escalar $a \neq 0$, que lo escribiremos: $F_i' = aF_i$. <u>El determinante queda multiplicado por a.</u>

c) Sumar a la fila i una combinación lineal de las demás filas: $F_i' = F_i \pm aF_j \pm bF_k \pm \ldots$. <u>El determinante no varía.</u>

<u>Nota 21:</u> Es <u>muy importante</u> observar que, mientras para el cálculo del rango la propia fila cambiada podría ir multiplicada por cualquier número no nulo en la combinación lineal, en el caso del determinante, dicho escalar debe ser 1 ya que al multiplicar una fila por un número distinto de 1, el determinante queda multiplicado por dicho número.

Se propone la **actividad 23.**

<u>12.- DETERMINANTES DE ORDEN SUPERIOR.</u>

<u>Definición 19:</u> Sea A una matriz cuadrada de dimensión n. Se llama **menor complementario** del elemento a_{ij} al determinante de la matriz de dimensión n-1 que se obtiene eliminando de A la fila i-ésima y la columna j-ésima. A dicho menor complementario lo representaremos por α_{ij}.

<u>Definición 20:</u> En las condiciones de la definición anterior, llamamos **adjunto** del elemento a_{ij} al número $A_{ij} = (-1)^{i+j}\;{}_{ij}$. A la matriz de el mismo orden que A formada por todos los adjuntos de los elementos de A situados en el mismo lugar se le llama **matriz adjunta de A** y se representa por $\operatorname{Adj} A$.

<u>Ejemplo 21:</u> Vamos a hallar la matriz adjunta de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$:

Para ello, calculamos los elementos adjuntos de cada uno de los de la matriz A:

$$\begin{matrix} A_{11} = (-1)^{1+1}|-1| = -1 & A_{12} = (-1)^{1+2}|2| = -2 \\ A_{21} = (-1)^{2+1}|3| = -3 & A_{22} = (-1)^{2+2}|1| = 1 \end{matrix}$$

. Así pues, $\operatorname{Adj} A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>Ejemplo 22:</u> Vamos a hallar la matriz adjunta de $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$. Los adjuntos son:

$B_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 6 & 5\end{vmatrix}=9 \qquad B_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 4 & 5\end{vmatrix}=14 \qquad B_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 4 & 6\end{vmatrix}=-24$

$B_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}0 & 2\\ 6 & 5\end{vmatrix}=12 \qquad B_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix}=-3 \qquad B_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 4 & 6\end{vmatrix}=-6$

$B_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}0 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-6 \qquad B_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-5 \qquad B_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 0\\ -2 & 3\end{vmatrix}=3$

Así pues, la matriz adjunta de B será: $\mathrm{Adj}B=\begin{pmatrix}9 & 14 & -24\\ 12 & -3 & -6\\ -6 & -5 & 3\end{pmatrix}$

Como hemos comentado antes, el cálculo de determinantes a través de la definición es sumamente complejo a medida que el orden se incrementa. Por ello, hemos visto reglas prácticas para los casos de orden 2 y 3. Tales reglas no son fácilmente extensibles para órdenes superiores a 3 por lo que vamos a buscar un método alternativo utilizando lo que se llama ***desarrollo de un determinante por los elementos de una línea*** *que vamos a describir a través de la siguiente proposición*

<u>Proposición 7:</u> (Cálculo de determinantes de orden superior a 3). Sea A una matriz de orden n. Entonces, su determinante es igual a la suma de los productos de los elementos de una línea cualquiera por sus adjuntos respectivos, es decir,

$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\dots\dots+a_{in}A_{in}$ (si desarrollamos por la fila i-ésima) o bien:

$|A|=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\dots\dots+a_{nj}A_{nj}$ (si desarrollamos por la columna j-ésima)

<u>Ejemplo 23:</u> Calculemos el valor del determinante de orden 4 siguiente:

$$\begin{vmatrix}5 & 4 & 8 & 6\\ 0 & 9 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 3 & -4\\ 0 & 0 & 2 & 3\end{vmatrix}\overset{C_1}{=}5\cdot A_{11}+0\cdot A_{21}+2\cdot A_{31}+0\cdot A_{41}=5\cdot\begin{vmatrix}9 & 2 & 1\\ 1 & 3 & -4\\ 0 & 2 & 3\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}4 & 8 & 6\\ 9 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 3\end{vmatrix}=5\cdot 149+2\cdot(-92)=561$$

<u>Nota 22:</u> Conviene hacer las siguientes observaciones en relación a la proposición 6:

a) Es evidente que el valor del determinante no depende de la línea utilizada.
b) Combinando la proposición 6 con la proposición 5 (i), podemos hacer ceros en una fila o columna de la matriz antes de desarrollar y ahorrarnos bastantes cálculos. A esto se le conoce con el nombre de **Método de Chío.**

Veamos esto utilizando el mismo ejemplo 22 pero haciendo ceros antes de desarrollar:

$$\begin{vmatrix}5 & 4 & 8 & 6\\ 0 & 9 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 3 & -4\\ 0 & 0 & 2 & 3\end{vmatrix}\overset{C_4'=C_4-C_3}{=}\begin{vmatrix}5 & 4 & 8 & -2\\ 0 & 9 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 3 & -7\\ 0 & 0 & 2 & 1\end{vmatrix}\overset{C_3'=C_3-2C_4}{=}\begin{vmatrix}5 & 4 & 12 & -2\\ 0 & 9 & 4 & -1\\ 2 & 1 & 17 & -7\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}\overset{F_4}{=}1\cdot\begin{vmatrix}5 & 4 & 12\\ 0 & 9 & 4\\ 2 & 1 & 17\end{vmatrix}=561.$$

<u>Nota 23:</u> (Cálculo de determinantes por triangulación) Una extensión del método de Chío consiste en triangularizar la matriz utilizando la misma propiedad, con lo que el determinante se facilita bastante (aunque hay que hacer más ceros). Veamos un ejemplo:

<u>Ejemplo 24:</u>

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix} \overset{F_1 \leftrightarrow F_3}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & -3 & -2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix} \overset{\substack{F_2'=2F_1+F_2 \\ F_3'=-2F_1+F_3 \\ F_3'=F_1+F_4}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} \overset{F_2 \leftrightarrow F_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} \overset{\substack{F_3'=3F_2+F_3 \\ F_4'=-3F_2+F_4}}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -19 \\ 0 & 0 & -1 & 23 \end{vmatrix} \overset{F_4'=F_3+F_4}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \overset{C_1}{=} 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & -19 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \overset{C_1}{=} 1 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -19 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \overset{C_1}{=} 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 4 = -4$$

A partir de este ejemplo es muy fácil entender la siguiente proposición:

<u>Proposición 8:</u> El determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de la diagonal principal. Evidentemente el resultado también es válido para una matriz diagonal.

<u>Ejemplo 25:</u> $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 7 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot 3 = -12$

Se propone la **actividad 24.**

<u>13.- CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA.</u>

<u>Proposición 9:</u> (Cálculo de la matriz inversa). Una matriz cuadrada A es invertible si y solo si su determinante es distinto de cero. Además, en tal caso, la inversa de la matriz A viene dada por la expresión: $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}\, A)^t}$

<u>Nota 24:</u> Es evidente, a partir de la proposición 5 (j), que $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

<u>Ejemplo 26:</u> Vamos a calcular las matrices inversas en dos casos:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$. Es fácil ver que: $|A| = 1 \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$.

Aplicando la fórmula: $A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -3 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

b) $B=\begin{pmatrix}1&4&0\\2&3&1\\1&2&0\end{pmatrix}$. Es fácil ver que: $|B|=2\neq 0\rightarrow \exists B^{-1}$. Calculando la matriz adjunta y aplicando la fórmula: $B^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2&0&4\\1&0&-1\\1&2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&2\\1/2&0&-1/2\\1/2&1&5/2\end{pmatrix}$

Nota 25: Es curioso observar como en el caso de una matriz A de orden 2, la matriz $(\text{Adj}A)^t$ es la que resulta de cambiar de sitio los elementos de la diagonal principal y de signo los de la diagonal secundaria.

Se proponen las **actividades 25 y 26.**

14.- RANGO DE UNA MATRIZ MEDIANTE DETERMINANTES.

Definición 21: Se llama **menor de orden** de una matriz A cualquier determinante de orden k formado por k filas y k columnas de A.

Definición 22: Se llama **rango** de una matriz A al orden del mayor menor no nulo de A.

Nota 26: Evidentemente, el rango definido ahora por menores y el definido con la matriz reducida (definición 15) siempre coinciden.

Proposición 10: Si A es una matriz de dimensión mxn, su rango es menor o igual a m y menor o igual a n. Es decir, el rango de una matriz nunca puede superar ni al número de filas ni al número de columnas de la matriz.

Para determinar el rango de una matriz utilizando menores existen básicamente dos métodos, cada una de ellas con sus ventajas e inconvenientes. Vamos a describirlas brevemente y haremos un ejemplo de cada una.

- Método 1: Consiste en buscar menores no nulos del mayor orden posible, es decir, comenzar por los menores "más grandes" de A.
    - Ventajas: Si encontramos un menor no nulo "pronto", se termina rápidamente. Suele ser el más rápido para matrices cuyo rango no puede ser mayor a 3.
    - Inconvenientes: Si el rango es pequeño, todos los menores "grandes" van a ser nulo, con lo que hemos de seguir calculando menores. Además, si la matriz es de orden elevado, el cálculo de los determinantes es laborioso.

- Método 2: (Orlado) Consiste en lo contrario a la estrategia anterior, es decir, comenzar por los menores más pequeños e irlos Orlando (añadiendo filas y columnas) a partir de un menor no nulo de orden 1. Se utiliza la propiedad de que si todos los determinantes que resultan de orlar el de partida con una fila o columna son nulos, entonces esa fila o columna es combinación lineal de otra/as y, por tanto, para calcular el rango, se puede suprimir.
    - Ventajas: Se parte de menores sencillos de calcular, además, al ir suprimiendo filas o columnas, el rango de las matrices que se obtienen es más sencillo que

el de la matriz de partida. Por ello, suele ser aconsejable para matrices cuyo rango puede ser mayor a 3.

- Inconvenientes: Si el rango es “grande”, no se suprimen filas o columnas por lo que hacemos bastantes cálculos con los menores.

Veamos ahora un ejemplo de cada caso:

Ejemplo 27: Hallemos el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 7 & 4\\ 5 & 5 & 4\end{pmatrix}$ utilizando el primer método:

Lo primero es hacer el mayor menor posible, que es $|A|=56-20+4-40=0$. No ha habido suerte. Tenemos que seguir con uno de orden 2, por ejemplo: $\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 7 & 4\end{vmatrix}=-4\neq 0$. Así pues, concluimos que $\text{rg}A=2$.

Ejemplo 28: Hallemos ahora orlando el rango de $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 6 & 9\\ -3 & -6 & -9 & 1\end{pmatrix}$. Elegimos un menor de orden 1: $|1|=1\neq 0$. Orlamos: $\begin{cases}\text{Orlando con las fila 2 y columna 2: } \begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}=0\\ \text{Orlando con la fila 3 y la columna 2: } \begin{vmatrix}1 & 2\\ -3 & -9\end{vmatrix}=0\end{cases}$

Así pues, concluimos que la 2ª columna depende linealmente de la 1ª. Así pues:

$$\text{rg}B=\text{rg}\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 9\\ -3 & 1\end{pmatrix}=2 \text{ ya que } \begin{vmatrix}1 & 4\\ 2 & 9\end{vmatrix}=1\neq 0$$

Ejemplo 29: Hallemos el rango de A en función de los valores de un parámetro m:

$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & m & 3\\ 5 & -1 & m\end{pmatrix}$. Lo primero que es claro es que $\text{rg}A\geq 2$, ya que $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=2\neq 0$.

Ahora bien, $|A|\overset{Fácil}{=}m^2-3m-28=0\overset{Fácil}{\leftrightarrow}m_1=-4 \text{ ó } m_2=7$. Así pues, podemos concluir:

- Caso 1: Si $m\neq -4 \ y \ m\neq 7\to |A|\neq 0\to \text{rg}A=3$
- Caso 2: Si $m=-4\to |A|=0\to \text{rg}A=2$ (ya que no hay otro valor posible)
- Caso 3: Si $m=7\to |A|=0\to \text{rg}A=2$ (ya que no hay otro valor posible)

Se proponen las **actividades 27 y 28.**

15.- ACTIVIDADES.

ACTIVIDADES INTERCALADAS EN LA TEORÍA

Actividad 1: Escribe un ejemplo de cada tipo de matriz vista en la definición 6

Actividad 2: Determina las matrices traspuestas de: $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 5\\ 7 & -6\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 7 & 4\\ 7 & -1 & 0\\ 4 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

Actividad 3: Calcula $a, b, c, y\ d$ para que se cumpla la siguiente identidad entre matrices:

$$2\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & 7\\ -2 & 3d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & a+b\\ c+d & 4\end{pmatrix}.$$

Actividad 4: Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 0\\ -1 & -2\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix}$, calcula:

a) $A+B$ b) $A-B-C$ c) $3A+5B-6C$ d) $AB-BC$ e) $2AB+3AC-5BC$

Actividad 5: Para las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}4 & -1 & 2\\ 0 & 5 & 3\end{pmatrix}$, calcula $AB\ y\ BA$.

Actividad 6: Calcula los productos posibles de dos factores, sin repetir, de las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}\text{ y }C=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}.$$

Actividad 7: Si A y B son dos matrices cuadradas de orden n, ¿son ciertas, en general, las igualdades siguientes?

a) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$
b) $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$
c) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

Actividad 8: Sea A una matriz de dimensión $2x3$:

a) ¿Existe una matriz B tal que AB sea una matriz de una sola fila?
b) ¿Y para BA?

Pon un ejemplo para cada caso, siendo: $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

Actividad 9: Sea A una matriz de orden mxn con $m \neq n$. Razona si se puede calcular la expresión $AA^t - A^tA$.

Actividad 10: Si A es una matriz tal que $A^2 = A \quad y \quad B = 2A - I$, demuestra que $B^2 = I$.

Actividad 11: Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \; y \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, calcula $3A^t - B^2$.

Actividad 12: Para la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcula $A^{50} \; y \; A^{97}$. Encuentra los valores de a y b para que la matriz A conmute con la matriz $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$.

Actividad 13: Reduce por filas las matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

Actividad 14: Calcula las inversas de las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} \; y \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ utilizando el método de Gauss-Jordan. Comprueba después que los resultados son correctos utilizando la definición.

Actividad 15: Determina el rango de las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \; y \; B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 6 & -4 & -10 \\ -9 & 6 & 15 \end{pmatrix}$

Actividad 16: Resuelve las ecuaciones matriciales siguientes:

a) $2A = AX + B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \; y \; B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

b) $XA + X = 2B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \; y \; B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Actividad 17: Resuelve los siguientes sistemas matriciales:

a) $\begin{cases} 2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \end{cases}$ b) $\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$

Actividad 18: En un edificio hay tres tipos de viviendas: L3, L4 y L5. Las viviendas L3 tienen 4 ventanas pequeñas y 3 grandes; las L4 tienen 5 ventanas pequeñas y 4 grandes, y las L5, 6 pequeñas y 5 grandes. Cada ventana pequeña tiene 2 cristales y 4 bisagras, y las grandes, 4 cristales y 6 bisagras.

a) Escribe una matriz A que describa el número y tamaño de ventanas de cada vivienda y otra B que exprese el número de cristales y bisagras de cada tipo de ventana.
b) Calcula la matriz C que expresa el número de cristales y de bisagras de cada tipo de vivienda.

Actividad 19: Un industrial fabrica dos tipos de bombillas: transparentes (T) y opacas (O). De cada tipo se hacen cuatro modelos: M_1, M_2, M_3 y M_4. La siguiente tabla muestra la producción semanal de bombillas de cada tipo y modelo.

	T	O
M_1	300	200
M_2	400	250
M_3	250	180
M_4	500	300

El porcentaje de bombillas defectuosas es el 2% en el modelo M_1, el 5% en el M_2, el 8% en el M_3 y el 10% en el M_4. Calcula la matriz que expresa el número de bombillas transparentes y opacas, buenas y defectuosas, que se producen.

Actividad 20: Halla el valor de los siguientes determinantes de orden 2 y 3:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 7 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & 2 \end{vmatrix}$

Actividad 21: Calcula los determinantes de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 5 & -3 & m \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} m+1 & 1 & 0 \\ 0 & m+1 & 1 \\ 1 & 0 & m+1 \end{pmatrix}$

Actividad 22: Resuelve las ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & x \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & x & 7 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ 0 & 2 & x \\ 4 & 0 & -x \end{vmatrix} = 2$ c) $\begin{vmatrix} 1+x & 1-x \\ 1-x & 1+x \end{vmatrix} = 12$ d) $\begin{vmatrix} x-2 & 1-2x \\ x & x^2 \end{vmatrix} = 0$

Actividad 23: Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 7$, halla, sin desarrollar, el valor de:

a) $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$

Actividad 24: Calcula los determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} x & 2 & 2 & 2 \\ 2 & x & 2 & 2 \\ 2 & 2 & x & 2 \\ 2 & 2 & 2 & x \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix}$

Actividad 25: Halla las inversas de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 6 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$

Actividad 26: ¿Para qué valores de k la matriz $\begin{pmatrix} k & -2 \\ 6 & 1-k \end{pmatrix}$ no tiene inversa?

Actividad 27: Calcula el rango de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \\ 9 & 18 & 27 \end{pmatrix}$

Actividad 28: Determina el rango de las siguientes matrices en según los valores de a:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 1 \\ a & 2 & 3 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 & 6 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -4 & a \end{pmatrix}$

ACTIVIDADES DE DESARROLLO

Actividad 29: Sean A y B dos matrices regulares. ¿Es regular el producto AB?

Actividad 30: Se dice que una matriz A es idempotente si $A^2 = A$. Sea A idempotente.

a) ¿Debe ser A cuadrada?
b) ¿Es la identidad idempotente?
c) Calcula A^3, A^4 , A^5. ¿Cuánto vale A^n para cualquier n?
d) Demuestra que la inversa de $2A - I$ es ella misma.

Actividad 31: Sea A una matriz cuadrada. Demuestra que tanto $A + A^t$ como $A - A^t$ son simétricas.

Actividad 32: Demuestra que si A es una matriz antisimétrica, entonces A^2 y A^4 son simétricas mientras que A^3 y A^5 son antisimétricas.

Actividad 33: Sean A y B dos matrices simétricas. Demuestra que AB es simétrica si y solo si A y B conmutan.

Actividad 34: Determina los valores de m para los cuales $X=\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ verifique $X^2-\frac{5}{2}X+I=O$.

Actividad 35: Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, calcula $A^2, A^3, \ldots\ldots, A^{128}$.

Actividad 36: Comprueba que $A^2=2A-I$, siendo: $A=\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ e I la matriz unidad de orden 3. Utiliza esa igualdad para calcular A^4.

Actividad 37: Determina a y b de forma que la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}$ verifique $A^2=A$.

Actividad 38: Sean las matrices dadas por: $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Encuentra las condiciones que deben cumplir a, b y c para que A y B conmuten.

Actividad 39: Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, calcula:

a) $\frac{1}{2}(A+B)$ b) $(A-B)^2$ c) A^{-1}

Actividad 40: Obtén la matriz inversa de $A+A^t$, siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Actividad 41: Determina las matrices A y B, sabiendo que: $2A+B=\begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $3A+2B=\begin{pmatrix} 11 & 25 \\ 20 & 10 \end{pmatrix}$.

Actividad 42: Calcula A^n y B^n siendo: $A=\begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Actividad 43: Determina las matrices A y B que son solución del siguiente sistema matricial: $3A-2B=\begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix}$, $2A+B=\begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix}$.

Actividad 44: Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}2&1\\2&3\end{pmatrix}$, halla dos números reales m y n tales que $A+mA+nI=O$

Actividad 45: Dada $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1/10&1&0\\1/10&0&1\end{pmatrix}$:

a) Calcula $A+A^2$.

b) Resuelve el sistema: $A^5\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20\\5\\1\end{pmatrix}$

Actividad 46: Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}x&1\\2x&-1\\-x&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\y\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}z\\2z\\-z\end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix}1\\0\\1/3\end{pmatrix}$

a) Sabiendo que $AB+C=3D$, plantea un sistema de ecuaciones para determinar x, y, z.
b) Encuentra, si es posible, una solución.

Actividad 47: Calcula, si existen, las matrices inversas de las siguientes matrices utilizando el método de Gauss-Jordan:

a) $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}-1&1&2\\1&0&3\\4&1&1\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}1&2\\4&8\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}2&-1&0\\3&1&2\\4&0&1\end{pmatrix}$

Actividad 48: Calcula la matriz $B^{-1}A^2B$, siendo $A=\begin{pmatrix}-3&0\\0&-3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}4&5\\3&4\end{pmatrix}$.

Actividad 49: En una academia de idiomas se imparte inglés y alemán en cuatro niveles y dos modalidades: grupos normales y grupos reducidos.

La matriz $A=\begin{pmatrix}130&160\\120&80\\210&130\\100&60\end{pmatrix}$ expresa el número de personas por grupo, donde la primera columna corresponde a los cursos de inglés, la segunda a los de alemán y las filas, a los niveles primero, segundo, tercero y cuarto, respectivamente.

Las columnas de la matriz $B=\begin{pmatrix}0.2&0.25&0.4&0.75\\0.8&0.75&0.6&0.25\end{pmatrix}$ reflejan el porcentaje de estudiantes (común para ambos idiomas) que siguen curso reducido (primera fila) y curso normal (segunda fila) para cada uno de los niveles.

a) Obtén la matriz que proporciona el número de estudiantes por modalidad e idioma.
b) Sabiendo que la academia cobra 18 € por persona en los grupos reducidos y 12 € por persona en los grupos normales, halla los ingresos de la academia por cada idioma utilizando matrices.

Actividad 50: Tres escritores presentan a un editor, al acabar una enciclopedia, la minuta que se recoge en la tabla:

	Horas de trabajo	Conferencias dadas	Viajes
Escritor A	40	10	5
Escritor B	80	15	8
Escritor C	100	25	10

El editor paga la hora de trabajo a 45 €, la conferencia a 18 € y el viaje a 30 €. Si sólo piensa pagar, respectivamente, el 30%, el 20% y el 10% de lo que correspondería a cada escritor, ¿qué gasto tendría el editor? (hacer el ejercicio mediante cálculo con matrices).

Actividad 51: Una compañía de muebles fabrica butacas, mecedoras y sillas, y cada una de ellas en tres modelos: E (económico), M (medio) y L (lujo). Cada mes produce 20 modelos E, 15 M y 10 L de butacas; 12 modelos E, 8 M y 5 L de mecedoras, y 18 modelos E, 20 M y 12 L de sillas. Representa esta información en una matriz y calcula matricialmente la producción anual.

Actividad 52: Calcula el determinante dando el resultado factorizado: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$

Actividad 53: Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 7$, calcula el valor de los determinantes:

a) $\begin{vmatrix} c & a & b \\ r & p & q \\ z & x & y \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ a+p & b+q & c+r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a+2x & b+2y & c+2z \\ p & q & r \\ 2x+p & 2y+q & 2z+r \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} -b & c+b & 5a \\ -q & r+q & 5p \\ -y & z+y & 5x \end{vmatrix}$

Actividad 54: Determina el valor de x para el cual el determinante de la matriz 2B vale 160, siendo $B = \begin{pmatrix} x & 3 & 1 \\ x+1 & 4 & 2 \\ x & 2-x^2 & 1 \end{pmatrix}$.

Actividad 55: Calcula $\begin{vmatrix} a^2 & ab & ab \\ ab & a^2 & b^2 \\ ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix}$ sin utilizar la regla de Sarrus y dando el resultado factorizado.

Actividad 56: Sea B una matriz cuadrada de orden 3. Justifica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Si $\text{rg}B = 2 \to \text{rg}(B^2) = 2$

b) Si $\text{rg}B = 3 \to \text{rg}(B^3) = 3$

c) Si $\text{rg}B = 3 \to \text{rg}(B^{-1}) = 3$

Actividad 57: Obtén, en función de a, b y c, el valor del determinante $\begin{vmatrix} a & a & a \\ a+b & a & a \\ a & a+c & a \end{vmatrix}$.

Actividad 58:
a) La matriz A verifica $A^2 = A$. Halla los posibles valores del determinante de A.
b) La matriz A verifica $AA^t = I$. Halla los posibles valores del determinante de A.

Actividad 59: Sean C_1, C_2, C_3 y C_4 las columnas de un determinante que vale 3. ¿Cuánto vale el determinante que tiene por columnas $2C_1 - C_2$, C_3, $-C_2$, C_4?

Actividad 60: Sea A una matriz cuadrada regular de orden n y sea $\text{Adj}A$ su matriz adjunta. Halla el valor de $|\text{Adj}A|$ en función de $|A|$.

Actividad 61: Sean A y B matrices cuadradas de orden 3, inversas una de la otra. Si $|A| = 4$, ¿cuánto vale $|B|$? ¿Y $|3A|$?

Actividad 62: Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3$, calcula, sin desarrollar: $\begin{vmatrix} -i & -g & -h \\ f+c & d+a & e+b \\ 3c & 3a & 3b \end{vmatrix}$.

Actividad 63: Si A es una matriz cuadrada de orden n tal que $|A| = 2$, calcula: $|MAM^{-1}|$, $|5A|$ y $|2A^{-1}|$.

Actividad 64: Calcula la matriz inversa de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Actividad 65: Para la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$, halla el valor o valores de a para los que la matriz A no tiene inversa. Halla A^{-1} para $a = 2$.

Actividad 66: Si A es la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, calcula la matriz $B = \left(A^t A^{-1}\right)^2$. Halla el determinante de la matriz $B = \left(A^t A^{-1}\right)^{276}$.

Actividad 67: Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, calcula, si es posible:

a) Una matriz X tal que $XA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. b) Una matriz Y tal que $YA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Actividad 68: Resuelve matricialmente la ecuación: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Actividad 69: Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 17 & -8 & -5 & -5 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Actividad 70: Calcula el rango de las siguientes matrices en función del parámetro:

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix} \beta & 3 & -1 \\ 0 & +1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$

ACTIVIDADES DE SELECTIVIDAD

Actividad 71: (2003) Considera las matrices: $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & m & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, C=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores de m tiene solución la ecuación matricial $A\cdot X+2B=3C$?
b) Resuelve la ecuación matricial dada por $m=1$.

Actividad 72: (2003)

a) Se sabe que el determinante de una matriz cuadrada *A* de orden 3 vale -2. ¿Cuánto vale el determinante de la matriz 4*A*?

b) Dada la matriz $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, ¿para qué valores de λ la matriz $3B+B^2$ no tiene inversa?

Actividad 73: (2003) Dada las matrices: $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$, halla la matriz X que cumple que $A\cdot X=\left(B\cdot A^t\right)^t$.

Actividad 74: (2003) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m^2 & 1 & 1 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Determina los valores de m para los que la matriz A tiene inversa.
b) Calcula, si es posible, la matriz inversa de A para $m=2$.

Actividad 75: (2003) Sean C_1, C_2 y C_3 las columnas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz cuadrada A de orden 3 cuyo determinante vale 5. Calcula, indicando las propiedades que utilices:

a) El determinante de A^3.
b) El determinante de A^{-1}.
c) El determinante de 2A.
d) El determinante de una matriz cuadrada cuyas columnas primera, segunda y tercera son, respectivamente, $3C_1 - C_3$, $2C_3$ y C_2.

Actividad 76: (2003) Considera la matriz $M(x) = \begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donde x es un número real.

a) ¿Para qué valores de x existe $(M(x))^{-1}$? Para los valores de x obtenidos, calcula la matriz $(M(x))^{-1}$.
b) Resuelve, si es posible, la ecuación $M(3)\cdot M(x) = M(5)$.

Actividad 77: (2004) Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ a & b & c \end{vmatrix} = -6$, calcula, indicando las propiedades que utilices, los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} -3x & -y & -z \\ 3t & u & v \\ 3a & b & c \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -2x & y & z \\ -2t & u & v \\ -2a & b & c \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ 2x-a & 2y-b & 2x-c \end{vmatrix}$

Actividad 78: (2004) Denotamos por M^t la traspuesta de una matriz M.

a) Sabiendo que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y que $\det(A) = 4$, calcula los siguientes determinantes: $\det(-3A^t)$ y $\begin{vmatrix} 2b & 2a \\ -3d & -3c \end{vmatrix}$.
b) Sea I la matriz identidad de orden 3 y sea B una matriz cuadrada tal que $B^3 = I$. Calcula $\det(B)$.
c) Sea C una matriz cuadrada tal que $C^{-1} = C^t$ ¿Puede ser $\det(C) = 3$? Razona la respuesta.

Actividad 79: (2004) Se sabe que $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -2$. Calcula, indicando las propiedades que utilices, los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3a_{11} & 3a_{12} & 15a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3a_{11} & 3a_{12} & 3a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}-a_{31} & a_{22}-a_{32} & a_{23}-a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Actividad 80: (2004) Considera las matrices: $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\\1&0\end{pmatrix}$

a) Calcula $A{\cdot}B$, $A{\cdot}C$, $A^t{\cdot}B^t$ y $C^t{\cdot}A^t$, siendo A^t, B^t y C^t las matrices traspuestas de A, B y C, respectivamente.

b) Razona cuáles de las matrices A, B, C y AB tiene matriz inversa y en los casos que la respuesta sea afirmativa, halla la correspondiente matriz inversa.

Actividad 81: (2005) Sean las matrices: $A=\begin{pmatrix}2&1\\3&-2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\3&-1&2\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&1&4\end{pmatrix}$

a) ¿Tiene A inversa? En caso afirmativo, calcúlala.

b) Determina la matriz X que cumple que $A{\cdot}X+C{\cdot}B^t=B{\cdot}B^t$ tiene matriz inversa y en los casos que la respuesta sea afirmativa, halla la correspondiente matriz inversa.

Actividad 82: (2005) Halla la matriz X que cumple que $A{\cdot}X{\cdot}A-B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, siendo $A=\begin{pmatrix}3&1\\-2&-1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}5&-2\\1&3\end{pmatrix}$.

Actividad 83: (2005) Sea I la matriz identidad de orden 3 y sea $A=\begin{pmatrix}0&0&-1\\-1&1&-1\\1&0&b\end{pmatrix}$.

a) Determina el valor de b para que $A^2-2A+I=O$.

b) Para $b=2$ halla la matriz X que cumple que $A{\cdot}X-2A^t=O$, donde A^t denota la traspuesta de la matriz A.

Actividad 84: (2005) Sea I la matriz identidad de orden 2 y sea $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$.

a) Halla los valores de x para los que la matriz $A-xI$ no tiene inversa.

b) Halla los valores de *a* y *b* para los que $A^2-aA+bI=O$.

Actividad 85: (2005) Sabiendo que $|A|=\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}=2$, calcula, indicando las propiedades que utilices, los siguientes determinantes:

a) $|-3A|$ y $|A^{-1}|$ b) $\begin{vmatrix}c&b&a\\f&c&d\\2i&2h&2g\end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix}a&b&a-c\\d&e&d-f\\g&h&g-i\end{vmatrix}$

Actividad 86: (2006) Resuelve $AB^tX=-2C$ siendo B^t la matriz traspuesta de B y

$A=\begin{pmatrix}1&0&3\\2&-1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&3&0\\0&2&-2\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1&4\\0&-1\end{pmatrix}$

<u>Actividad 87:</u> (2006) Considera $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$, siendo a un número real.

a) Calcula el valor de a para que: $A^2-A=\begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$.

b) Calcula, en función de a, los determinantes de $2A$ y A^t siendo A^t la traspuesta de A.

c) ¿Existe algún valor de a para el que la matriz A sea simétrica? Razona la respuesta.

<u>Actividad 88:</u> (2006) Sea $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y sea I la matriz identidad de orden dos.

a) Calcula los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que $|A- \quad|=0$.

b) Calcula $A^2-7A+10I$

<u>Actividad 89:</u> (2006) Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$

a) Halla, si existe, la matriz inversa de $AB+C$.

b) Calcula, si existen, los números reales *x* e *y* que verifican: $C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

<u>Actividad 90:</u> (2007) Sea I la matriz identidad de orden dos y $A=\begin{pmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Encuentra los valores de m para los cuales se cumple que $(A-I)^2=O$.

b) Para $m=2$, halla la matriz X tal que $AX-2A^t=O$ donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

<u>Actividad 91:</u> (2007) Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$.

a) Determina la matriz $B=A^2-2A$.

b) Determina los valores de λ para los que la matriz B tiene inversa.

c) Calcula B^{-1} para $\quad =1$.

<u>Actividad 92:</u> (2007) Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Determina los valores de α para los que la matriz A tiene inversa.

b) Para $\alpha=1$, calcula A^{-1} y resuelve la ecuación matricial $AX=B$.

<u>Actividad 93:</u> (2007)

a) Calcula el valor de m para el que la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & m \end{pmatrix}$ verifica la relación $2A^2-A=I$ y determina A^{-1} para dicho valor de m.

b) Si M es una matriz cuadrada que verifica la relación $2M^2 - M = I$ determina la expresión de M^{-1} en función de M y de I.

<u>Actividad 94:</u> (2007) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3.

a) Calcula los valores de λ para los que el determinante de $A - 2I$ es cero.
b) Calcula la matriz inversa de $A - 2I$ para $\lambda = -2$.

<u>Actividad 95:</u> (2008) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Calcula la matriz P que verifica $AP - B = C^T$ (C^T es la traspuesta de C).

<u>Actividad 96:</u> (2008) Sea I la matriz identidad de orden 3 y $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Calcula, si existe, el valor de k para el cual $(A - kI)^2$ es la matriz nula.

<u>Actividad 97:</u> (2008) Dada las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcula, si existen, la matriz inversa de A y la de B.
b) Resuelve la ecuación matricial $AX + B = A + I$ donde I denota la matriz identidad de orden 3.

<u>Actividad 98:</u> (2008) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & k \\ k & 1 & 3 \\ 1 & 7 & k \end{pmatrix}$.

a) Estudia el rango de A en función de los valores del parámetro k.
b) Para $k = 0$, halla la matriz inversa de A.

<u>Actividad 99:</u> (2009) Sean A,B,C y X matrices cualesquiera que verifican $ABC = X$.

a) Si las matrices son cuadradas de orden 3, y se sabe que el determinante de A es 3, el de B es -1 y el de C es 6, calcula el determinante de las matrices X y $2X$.
b) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ calcula la matriz X.

<u>Actividad 100:</u> (2009) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Determina X para que: $AX - B^t = 2C$ (B^t es la matriz traspuesta de B).

Actividad 101: (2009) Sean F_1, F_2, F_3 las filas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz cuadrada B de orden 3 cuyo determinante vale -2. Calcula, indicando las propiedades que utilices:

a) El determinante de B^{-1}.
b) El determinante de $\left(B^t\right)^4$ (B^t es la matriz traspuesta de B).
c) El determinante de 2B.
d) El determinante de una matriz cuadrada cuyas filas primera, segunda y tercera son, respectivamente: $3F_1 - F_3$, $3F_3$, F_2.

Actividad 102: (2009) Dada las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calcula si existe la matriz inversa de A.
b) Calcula las matrices X e Y que satisfacen las ecuaciones $XA = A + 2B$ y $AY = A + 2B$.

Actividad 103: (2009) Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = A - kY$, donde k es un número constante e I es la matriz identidad de orden 2.

a) Determina los valores de k para los que B no tiene inversa.
b) Calcula B^{-1} para $k = -1$.
c) Determina los valores constantes de α y β para los que se cumple $A^2 + \quad = \quad$.

Actividad 104: (2010) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Indica los valores de m para los A es invertible.
b) Resuelve la ecuación matricial $XA - B^t = C$ para $m = 0$ (B^t es la traspuesta de B).

Actividad 105: (2010) Considera las siguientes matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcula A^{-1}.
b) Resuelve la ecuación matricial $AXA^t - B = 2I$, donde I es la matriz identidad de orden 2 y A^t es la matriz traspuesta de A.

Actividad 106: (2010) Obtén un vector no nulo $v = (a, b, c)$ de manera que las matrices siguientes tengan simultáneamente rango 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 1 & c \end{pmatrix}$.

Actividad 107: (2010) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Comprueba que se verifica $2A - A^2 = I$.
b) Calcula A^{-1}. (Sugerencia: Puedes usar la igualdad del apartado (a)).

Actividad 108: (2010) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Calcula la matriz X que cumpla $AXB = C$.

Actividad 109: (2010) De la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se sabe que el $\det(A) = 4$. Se pide:

a) Halla $\det(-3A^t)$ y $\det\begin{pmatrix} 2b & 2a \\ -3d & -3c \end{pmatrix}$. Indica las propiedades que utilizas.
b) Calcula $\det(A^{-1}A^t)$.
c) Si B es una matriz cuadrada tal que $B^3 = I$, siendo I la matriz identidad, halla el $\det(B)$.

Actividad 110: (2011) Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & 1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) ¿Hay algún valor λ de para el que A no tiene inversa?
b) Para $\lambda = 1$, resuelve la ecuación matricial $A^{-1}XA = B$.

Actividad 111: (2011) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcula el rango de A dependiendo de los valores de α.
b) Para $\alpha = 2$, resuelve la ecuación matricial $AX = B$.

Actividad 112: (2011) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -\alpha & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcula los valores de α para los que la matriz inversa de A es $\frac{1}{12}A$.

b) Para $\alpha = -3$, determina la matriz X que verifica la ecuación $A^tX = B$, siendo A^t la matriz traspuesta de A.

Actividad 113: (2011) Sean A y B dos matrices que verifican: $A+B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $A-B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Halla las matrices $(A+B)(A-B)$ y $A^2 - B^2$.

b) Resuelve la ecuación matricial $XA - XB - (A+B)^t = 2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y $(A+B)^t$ es la matriz traspuesta de $(A+B)$.

Actividad 114: (2011) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Determina los valores de λ para los que la matriz $A - 2I$ tiene inversa, siendo I la matriz identidad de orden 3.
b) Para $\lambda = -2$, resuelve la ecuación matricial $AX = 2X + I$.

Actividad 115: (2011) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Demuestra que $A^2 + 2A = I$ y que $A^{-1} = A + 2I$, siendo I la identidad de orden 2.
b) Calcula la matriz X que verifica la ecuación $A^2 + XA + 5A = 4I$.

Actividad 116: (2011) Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 3 cuyos determinantes son $|A| = \dfrac{1}{2}$ y $|B| = -2$. Halla:

a) $|A^3|$ b) $|A^{-1}|$ c) $|-2A|$ d) $|AB^t|$ e) $\mathrm{rg}B$

Actividad 117: (2011) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Demuestra que se verifica la igualdad $A^3 = -I$ siendo I la matriz identidad de orden 3.
b) Justifica que A es invertible y halla su inversa.
c) Calcula razonadamente A^{100}.

Actividad 118: (2011) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Determina los valores de λ para los que la matriz $A^2 + 3A$ no tiene inversa.
b) Para $\lambda = 0$, halla la matriz X que verifica la ecuación $AX + A = 2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.

Actividad 119: (2012) Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Determina, si existe, la matriz X que verifica $AXB = C^t$, siendo C^t la traspuesta de C.

Actividad 120: (2012) Encuentra la matriz X que satisface la ecuación $XA + A^2B = A$, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Actividad 121: (2012) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}$.

a) ¿Para qué valores del parámetro k no existe la inversa de la matriz A? Justifica la respuesta.
b) Para $k = 0$, resuelve la ecuación matricial $(X + I)A = A^t$, donde I denota la matriz identidad y A^t la matriz traspuesta de A.

Actividad 122: (2012) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, sea B la matriz que verifica que $AB = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Comprueba que las matrices A y B poseen inversa.
b) Resuelve la ecuación matricial $A^{-1}X - B = BA$.

16.- SOLUCIONES A LAS ACTIVIDADES.

Actividad 1: Respuesta libre

Actividad 2: $A^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ y $B^t = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 7 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Actividad 3: $a = 5$, $b = 12$, $c = -6$ y $d = -4$

Actividad 4:

a) $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 29 & -15 \\ 7 & -19 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 33 & -39 \\ -49 & 55 \end{pmatrix}$

Actividad 5: $AB = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -1 \\ 8 & 13 & 13 \\ 0 & 20 & 12 \end{pmatrix}$ y $BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 10 & 27 \end{pmatrix}$

Actividad 6: $AB = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $CA = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 7 & 15 & 8 \end{pmatrix}$ y $CB = \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \end{pmatrix}$

Actividad 7: Ninguna de las tres es cierta en general debido a la no comnutatividad del producto de matrices.

Actividad 8:

a) No, ya que, sea cual sea B, AB tendrá dos filas.
b) Sí, tomando B de dimensión 1x2.
Lo siguiente es de respuesta libre.

Actividad 9: No se puede, ya que el primer factor resulta una matriz cuadrada de dimensión m y el segundo de dimensión n. Para que se pudiesen restar, tendría que ser m = n, y, por hipótesis, son distintos.

Actividad 10: Basta hacerlo

Actividad 11: $\begin{pmatrix} 12 & 4 & 2 \\ 1 & 9 & 5 \\ 17 & 15 & 23 \end{pmatrix}$

Actividad 12: $a=1 \ y \ b=0$

Actividad 13: Respuesta libre.

Actividad 14: $A^{-1}=\begin{pmatrix} 7/4 & -1/4 \\ 3/4 & -1/4 \end{pmatrix} \ y \ B^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Actividad 15: $rg(A)=1 \ y \ rg(B)=1$

Actividad 16:

a) $X=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ b) $X=\begin{pmatrix} 4 & 3 & -6 \\ -2 & 5 & -8 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

Actividad 17:

a) $X=\begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$ $Y=\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$

b) $X=\begin{pmatrix} 4 & 3/2 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ $Y=\begin{pmatrix} -2 & -1/2 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

c) $X=\begin{pmatrix} 5/3 & 2/3 \\ 2/3 & -8/3 \end{pmatrix}$ $Y=\begin{pmatrix} -1/3 & -1/3 \\ -4/3 & 10/3 \end{pmatrix}$

Actividad 18:

a) $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \ y \ B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ b) $C=\begin{pmatrix} 20 & 34 \\ 26 & 44 \\ 32 & 54 \end{pmatrix}$

Actividad 19: $\begin{pmatrix} 1354 & 869{,}1 \\ 96 & 60{,}9 \end{pmatrix}$

Actividad 20:

a) 11 b) -19 c) 39 d) -2 e) 36

Actividad 21:

a) 2 b) 79 c) a^3-3a+2 d) $-m^2-4m+1$ e) m^3+3m^2+3m+2

Actividad 22:

a) $x=1$ b) $x_1=-1 \quad x_2=3$ c) $x=3$ d) $x_1=0 \quad x_2=1 \quad x_3=-1$

Actividad 23:
a) -21 b) 7 c) 7

Actividad 24:
a) -295 b) 2 c) $(x-2)^3(x+6)$ d) $(x+1)^2$

Actividad 25:
a) $A^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 3/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}$ b) $B^{-1}=\begin{pmatrix} -2/5 & 1/3 & -1/15 \\ 2/5 & 1/3 & -4/15 \\ 1/10 & -2/3 & 13/30 \end{pmatrix}$ c) No tiene inversa.

Actividad 26: No tiene inversa para $k_1=4 \;\; y \;\; k_2=-3$

Actividad 27:
a) $\text{rg}A=2$ b) $\text{rg}B=2$

Actividad 28:
a) $\begin{matrix} Si \;\; a\neq 1 \rightarrow \text{rg}A=3 \\ Si \;\; a=1 \rightarrow \text{rg}A=2 \end{matrix}$ b) $\begin{matrix} Si \;\; a\neq 1 \rightarrow \text{rg}A=3 \\ Si \;\; a=1 \rightarrow \text{rg}A=2 \end{matrix}$

Actividad 29: Sí.

Actividad 30:
a) Sí b) Sí c) Todos dan A d) Hacer

Actividad 31: Hacerlo.

Actividad 32: Hacerlo.

Actividad 33: Hacerlo.

Actividad 34: $m_1=2 \quad m_2=1/2$

Actividad 35: $A^{128}=A^2=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Actividad 36: Lo primero es trivial. $A^4=\begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$

Actividad 37: $a=2 \;\; y \;\; b=-1$

Actividad 38: $a=b=c$

Actividad 39:
a) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Actividad 40: $\begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/6 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix}$

Actividad 41: $A=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -12 & -6 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 28 & 14 \end{pmatrix}$

Actividad 42: $A^n=\begin{pmatrix} 1 & n/7 & n/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$

Actividad 43: $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

Actividad 44: $m=-1 \quad n=0$

Actividad 45:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3/10 & 2 & 0 \\ 3/10 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ b) $x=20$, $y=-5$, $z=-9$

Actividad 46:

a) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y+2z=0 \\ -x+y-z=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x=1-\lambda \\ y=2 \\ z=\lambda \end{cases}$

Actividad 47:

a) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -3/16 & 1/16 & 3/16 \\ 11/16 & -9/16 & 5/16 \\ 1/16 & 5/16 & -1/16 \end{pmatrix}$ c) Sin solución. d) $\begin{pmatrix} -1/3 & -1/3 & 2/3 \\ -5/3 & -2/3 & 4/3 \\ 4/3 & 4/3 & -5/3 \end{pmatrix}$

Actividad 48: $\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

Actividad 49:

a) $M=\begin{pmatrix} 215 & 149 \\ 345 & 281 \end{pmatrix}$ b) 8010 en inglés y 6054 en alemán.

Actividad 50: 1986 €

Actividad 51: $\begin{pmatrix} 20 & 15 & 10 \\ 12 & 8 & 5 \\ 18 & 20 & 12 \end{pmatrix}$. Se producen un total de 1440 artículos.

Actividad 52: $(y-x)(z-x)(z-y)$

Actividad 53:
a) 7 b) -21 c) 14 d) -35

Actividad 54: $x=3$

Actividad 55: $a^2(a+b)^2(a-b)^2$

Actividad 56:
a) Falso b) Verdadero c) Verdadero

Actividad 57: abc

Actividad 58:
a) 0 y –1 b) 1 y –1

Actividad 59: 6

Actividad 60: $|A|^{n-1}$

Actividad 61: $|B|=1/4 \quad |3A|=108$

Actividad 62: 27

Actividad 63: Son 2 , 5^n y 2^{n-1} respectivamente.

Actividad 64:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 \\ -3/10 & 1/10 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1/2 & -1/6 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ -1/2 & 1/6 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 2/5 & -1/5 & 0 \end{pmatrix}$

Actividad 65: $a_1=-1 \quad a_2=1. \quad A^{-1}=\begin{pmatrix} 2/3 & 0 & -1/3 \\ -1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & 1 & -2/3 \end{pmatrix}$

Actividad 66: $B=\begin{pmatrix} 5/4 & -3/4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. El determinante es 1.

Actividad 67:

a) $X=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ b) $Y=\begin{pmatrix} -3 & -7 & -3 \\ 6 & 12 & 5 \end{pmatrix}$

Actividad 68: $X=\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

Actividad 69: $\text{rg}A=3 \quad y \quad \text{rg}B=3$

Actividad 70:

a) $Si \quad \neq 1 \quad \neq -2 \rightarrow \text{rg} \quad = 3$
$Si \quad = 1 \rightarrow \text{rg} \quad = 1$
$Si \quad = -2 \rightarrow \text{rg} \quad = 2$

b) $\text{rg}B = 3 \ \forall \ \in \mathbb{R}$

c) $Si \quad \neq 1 \rightarrow \text{rg} \quad = 3$
$Si \quad = 1 \rightarrow \text{rg} \quad = 2$

Actividad 71:

a) $m \neq 0$

b) $X=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -5 & 5 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

Actividad 72:

a) -128

b) $\lambda_1 = 4 \quad , \quad \lambda_2 = 1/4$

Actividad 73: $X=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

Actividad 74:

a) $m_1 = 1 \ , \ m_2 = -1$

b) $A^{-1}=\begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & -1 \\ 2/3 & -2/3 & 1 \end{pmatrix}$

Actividad 75:

a) 125 b) 1/5 c) 40 d) -30

Actividad 76:

a) $\forall x \in \mathbb{R}$

b) $x=2 \quad , \quad M(x)^{-1}=\begin{pmatrix} 2^{-x} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Actividad 77:

a) 18 b) -12 c) 6

Actividad 78:

a) 36 y 24 b) 1 c) No

Actividad 79:

a) -30 b) 6 c) -2

Actividad 80:

a) $AB=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, AC=\begin{pmatrix}2&0\\2&2\end{pmatrix}, A^tB^t=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&2&0\end{pmatrix}, C^tA^t=\begin{pmatrix}2&2\\0&2\end{pmatrix}$ b) $(AB)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

Actividad 81:

a) $A^{-1}=\begin{pmatrix}2/7&1/7\\3/7&-2/7\end{pmatrix}$ b) $X=\begin{pmatrix}-4/7&6/7\\1/7&-26/7\end{pmatrix}$

Actividad 82: $X=\begin{pmatrix}4&3\\-3&2\end{pmatrix}$

Actividad 83:

a) $b=2$ b) $X=\begin{pmatrix}-2&-6&8\\-2&-2&6\\0&2&-2\end{pmatrix}$

Actividad 84:

a) $x_1=1$, $x_2=3$ b) $a=-4$, $b=3$

Actividad 85:

a) $|-3A|=-54$, $|A^{-1}|=1/2$ b) -4 c) -2

Actividad 86: $X=\begin{pmatrix}-1/7&-1\\5/14&3/2\end{pmatrix}$

Actividad 87:

a) $a=4$ b) $|2A|=-4a^2$, $|A^t|=-a^2$ c) No

Actividad 88:

a) $\lambda=5$ b) $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

Actividad 89:

a) $\begin{pmatrix}-4/3&-5/6\\5/3&7/6\end{pmatrix}$ b) $x=\lambda$, $y=-2\lambda$

Actividad 90:

a) $m=0$ b) $X=\begin{pmatrix}6&2\\-2&0\end{pmatrix}$

Actividad 91:

a) $\begin{pmatrix}-2&1-\lambda\\\lambda-1&\lambda^2-2\lambda-1\end{pmatrix}$ b) $\lambda\neq-1$ y $\lambda\neq3$ c) $B^{-1}=\begin{pmatrix}-1/2&0\\0&-1/2\end{pmatrix}$

Actividad 92:

a) $\alpha\neq 2/3$ b) $A^{-1}=\begin{pmatrix}3&-1\\-2&1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}7&-1\\-5&1\end{pmatrix}$

Actividad 93:

a) $m=-1/2$, $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1/2\end{pmatrix}$ b) $M^{-1}=2M-I$

Actividad 94:

a) $\lambda=-1$ b) $\begin{pmatrix}-1/3 & 0 & -2/3\\ 5/4 & -1/4 & 5/4\\ -2/3 & 0 & -1/3\end{pmatrix}$

Actividad 95: $\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 0 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

Actividad 96: $k=1$

Actividad 97:

a) $A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$, No existe B^{-1}

Actividad 98:

a) $\begin{matrix}k\neq\sqrt{3}\ \ y\ \ k\neq-\sqrt{3}\ \rightarrow \text{rg}A=3\\ k=\sqrt{3}\ \ o\ \ k=-\sqrt{3}\ \rightarrow \text{rg}A=2\end{matrix}$ b) $A^{-1}=\begin{pmatrix}7/4 & 0 & -3/4\\ -1/4 & 0 & 1/4\\ 1/12 & 1/3 & -1/12\end{pmatrix}$

Actividad 99:

a) $|X|=-2$, $|2X|=-16$ b) $X=\begin{pmatrix}-14 & 8\\ 8 & -5\end{pmatrix}$

Actividad 100: $X=\begin{pmatrix}-7/4 & -1/2\\ -5/4 & -9/2\\ -7/4 & -15/2\end{pmatrix}$

Actividad 101:

a) -1/2 b) 16 c) -16 d) 30

Actividad 102:

a) $A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 7\\ 1 & -3\end{pmatrix}$ b) $X=\begin{pmatrix}-9 & 32\\ 20 & -67\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}-59 & 40\\ 26 & -17\end{pmatrix}$

Actividad 103:

a) $k\neq-2+\sqrt{3}\ \ y\ \ k\neq-2-\sqrt{3}$ b) $B^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1/2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ c) $\alpha=4$, $\beta=-1$

Actividad 104:

a) $m\neq1\ \ y\ \ m\neq3$ b) $X=\begin{pmatrix}6 & 3 & 0\\ -3 & 0 & 0\end{pmatrix}$

Actividad 105:

a) $A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ b) $X=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Actividad 106: $\vec{v}=(c\ ,\ c/2\ ,c)$

Actividad 107:

a) Hacer b) $A^{-1}=\begin{pmatrix}-3 & 4 & -2\\ -2 & 3 & -1\\ 4 & -4 & 3\end{pmatrix}$

Actividad 108: $X=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 3 & -4 & -2\end{pmatrix}$

Actividad 109:

a) 36 y 24 b) 1 c) 1

Actividad 110:

a) No b) $X=\begin{pmatrix}0 & 1/2 & 1/2\\ 1 & 1/2 & -1/2\\ -1 & 1/2 & -1/2\end{pmatrix}$

Actividad 111:

a) $\begin{array}{l} Si\ \ \alpha\neq 1\ \ y\ \ \alpha\neq -2\ \rightarrow\ \text{rg}A=3\\ Si\ \ \alpha=1\ \rightarrow\ \text{rg}A=1\\ Si\ \ \alpha=-2\ \rightarrow\ \text{rg}A=2\end{array}$ b) $X=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$

Actividad 112:

a) $\alpha=-3$ b) $X=\begin{pmatrix}-1/2 & 1/4 & 1/4\\ -1/6 & 15/12 & 7/12\end{pmatrix}$

Actividad 113:

a) $(A+B)(A-B)=\begin{pmatrix}6 & 20\\ 4 & 16\end{pmatrix}$, $A^2-B^2=\begin{pmatrix}13 & 16\\ 3 & 9\end{pmatrix}$ b) $X=\begin{pmatrix}15/8 & -9/4\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

Actividad 114:

a) $\lambda\neq 2$, $\lambda\neq 1$ y $\lambda\neq -1$ b) $X=\begin{pmatrix}-1/3 & 0 & -2/3\\ 5/4 & -1/4 & 5/4\\ -2/3 & 0 & -1/3\end{pmatrix}$

Actividad 115:

a) Hacer b) $X=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 6 & 0\end{pmatrix}$

Actividad 116:

a) 1/8 b) 2 c) -4 d) -1 e) 3

Actividad 117:

a) Hacer b) $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ c) $A^{100}=\begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

Actividad 118:

a) $\lambda=-1$ o $\lambda=-4$ b) $X=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

Actividad 119: $X=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Actividad 120: $X=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Actividad 121:

a) $k=1/2$ b) $X=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

Actividad 122:

a) Hacer b) $X=\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -29 & 14 \end{pmatrix}$

NOTA IMPORTANTE: Las actividades de la 71 a la 122 son de Selectividad. En las dos páginas web siguientes se encuentran las soluciones de todos los exámenes de forma detallada:

- ***http://emestrada.wordpress.com/2010/02/20/matematicas-ii-problemas-selectividad-resueltos/***
- ***http://www.iesayala.com/selectividadmatematicas/***

Además de estas, una web con actividades interactivas que puedes utilizar es la siguiente: http://ntic.educacion.es/w3//eos/MaterialesEducativos/mem2000/algebra/index.html