EJERCICIOS DE REPASO DE ÁLGEBRA: Matrices y Determinantes

Hoja 1

1.- Calcula a, b, c y d para que se cumpla: $2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & a+b \\ c+d & 4 \end{pmatrix}$.

Solución: a=5, b=7, c=3/2, d=7/2

2.- Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, calcula:

a) A+B b) A-B-C c) 3A+5B-6C d) AB-BC e) 2AB+3AC-5BC

Solución: a) $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 29 & -15 \\ 7 & -19 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 33 & -39 \\ -49 & 55 \end{pmatrix}$

3.- Para las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, calcula AB y BA.

Solución: A·B= $\begin{pmatrix} 4 & -6 & -1 \\ 8 & 13 & 13 \\ 0 & 20 & 12 \end{pmatrix}$, B·A= $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 10 & 27 \end{pmatrix}$

4.- Calcula los productos posibles entre las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Solución: A·B= $\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, C·A= $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 7 & 15 & 8 \end{pmatrix}$, $C \bullet B = \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \end{pmatrix}$

5.- Si A y B son dos matrices cuadradas de orden n, ¿son ciertas, en general, las igualdades siguientes?:

a) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ b) $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$ c) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

6.- Encuentra todas las matrices, del orden correspondiente, que conmuten, respectivamente, con las matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Solución: a) $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & a & 0 \\ g & d & a \end{pmatrix}$

EJERCICIOS DE REPASO DE ÁLGEBRA: Matrices y Determinantes

Hoja 2

1.- Para las matrices: $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 4 & 0 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ -1 & -2 & 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0 & 1\\ -5 & 1 & 4 & -2\\ 1 & 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$,

realiza las siguientes operaciones: a) A+B b) 3A-4B c) AB d) AD
e) BC e) BC f) CD g) A^tC h) D^tA^t i)B^tA j) D^tD k) DD^t

Soluciones:

a) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 6\\ 3 & -2 & 0\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}3 & -15 & -10\\ 16 & 8 & -21\end{pmatrix}$ c) no d) $\begin{pmatrix}7\\ -1\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}-11 & 3 & 12 & -18\\ 11 & -5 & -8 & -6\end{pmatrix}$

f) imposible g) imposible h) $\begin{pmatrix}7 & -1\end{pmatrix}$ i) $\begin{pmatrix}-4 & 0 & 3\\ -5 & -3 & 12\\ 16 & -4 & -1\end{pmatrix}$ j) (14) k) $\begin{pmatrix}4 & 2 & 6\\ 2 & 1 & 3\\ 6 & 3 & 9\end{pmatrix}$

2.- Para la matriz $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, calcula A^{50} y A^{97}. Encuentra los valores de a y b para que la matriz A conmute con la matriz $\begin{pmatrix}a & 0\\ b & 1\end{pmatrix}$.

Solución: $A^{50}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $A^{50}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, a=1, b=0.

3.- Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$, obtén, si procede, $(BA)^{-1}$.

Solución: $(B\cdot A)^{-1}=\begin{pmatrix}4/15 & 1/15\\ -1/10 & 1/10\end{pmatrix}$

4.- Obtén las matrices X e Y que verifiquen los siguientes sistemas matriciales:

a) $\begin{cases}2X-3Y=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 4 & 2\end{pmatrix}\\ X-Y=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & 6\end{pmatrix}\end{cases}$ b) $\begin{cases}X+Y=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix}\\ X-Y=\begin{pmatrix}6 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\end{cases}$ c) $\begin{cases}2X+Y=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix}\\ X+2Y=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 4\end{pmatrix}\end{cases}$

Solución: a) $X=\begin{pmatrix}-4 & -5\\ 5 & 16\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}-3 & -5\\ 2 & 10\end{pmatrix}$ b) $X=\begin{pmatrix}4 & 3/2\\ 3/2 & 1/2\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}-2 & -1/2\\ 3/2 & -1/2\end{pmatrix}$

c) $X=\begin{pmatrix}5/3 & 2/3\\ 2/3 & -8/3\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}-1/3 & -1/3\\ -4/3 & 10/3\end{pmatrix}$

EJERCICIOS DE REPASO DE ÁLGEBRA: Matrices y Determinantes

Hoja 3

1.- Calcula A^n, para $n \in N$, siendo A las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución: a) $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$ b) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 1+2+3+\ldots+n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, calcula $(AB)^t$ y $(AB)^{-1}$.

Solución: $(A\cdot B)^t = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $(A\cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/14 & 1/2 \\ 3/14 & -1/2 \end{pmatrix}$

3.- Calcula la matriz $B^{-1}A^2B$, siendo $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. *Solución:* $\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

4.- Calcula las matrices inversas, si existen, de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$

Solución: a) $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) no existe c) $\begin{pmatrix} -3/16 & 1/16 & 3/16 \\ 11/16 & -9/16 & 5/16 \\ 1/16 & 5/16 & -1/16 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -1/3 & -1/3 & 2/3 \\ -5/3 & -2/3 & 4/3 \\ 4/3 & 4/3 & -5/3 \end{pmatrix}$ e) no existe

5.- Determina el valor de a para que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$ no tenga inversa. Calcula A^{-1} para los restantes valores de a.

Solución: $a=-1/7$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7a+1} & \frac{-2}{7a+1} & \frac{7}{7a+1} \\ \frac{2a}{7a+1} & \frac{1+3a}{7a+1} & \frac{-2}{7a+1} \\ \frac{-a}{7a+1} & \frac{2a}{7a+1} & \frac{1}{7a+1} \end{pmatrix}$

EJERCICIOS DE REPASO DE ÁLGEBRA: Matrices y Determinantes

Hoja 4

1.- Señala los valores de m para los cuales la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & 4 & -m\end{pmatrix}$ no tiene inversa.

Solución: m=9/5

2.- Calcula el rango de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 4 & 2\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}2 & 1 & 5 & -1 & 8\\ -1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 3 & 10 & 11 & 13\end{pmatrix}$

Solución: a) rg=2 b) rg=3

3.- Calcula el rango de las siguientes matrices según los valores del parámetro a:

a) $\begin{pmatrix}a-2 & a+2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 3 & 1\\ a & 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$

Solución: a) si a=6 $\Rightarrow$ rg=1, si a$\neq$6 $\Rightarrow$ rg=2 b) si a=4 $\Rightarrow$ rg=2, si a$\neq$4 $\Rightarrow$ rg=3

4.- ¿Es posible que para dos matrices A y B no cuadradas puedan existir AB y BA?

5.- Calcula los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix}4 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix}1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{3}\\ 2+\sqrt{3} & 1+\sqrt{2}\end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 7\\ -1 & 0 & 1\\ 4 & 5 & 7\end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ 5 & 7 & 12\\ -2 & 3 & -1\end{vmatrix}$ g) $\begin{vmatrix}5 & 3 & 1\\ 2 & 0 & -4\\ 6 & 5 & 9\end{vmatrix}$

Solución: a) -6 b) 0 c) -3 d) $2\left(1+\sqrt{2}\right)$ e) -18 f) -18 g) -16

6.- Resuelve las ecuaciones que se indican:

a) $\begin{vmatrix}5 & x & -2\\ 4 & 3 & -9\\ 1 & 0 & 7\end{vmatrix}=0$ b) $\begin{vmatrix}x-1 & -1 & -1\\ 0 & x+2 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}=0$

Solución: a) x=3 b) x=0 y x=1

EJERCICIOS DE REPASO DE ÁLGEBRA: Matrices y Determinantes

Hoja 5

1.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$:

a) Calcula $(A-I)^2(A-5I)$, siendo I la matriz identidad.
b) Obtén A^t y razona si existe la matriz inversa de A.

Solución: a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, si tiene inversa, por ser equivalente a la matriz A.

2.- Resuelve la ecuación matricial AX=B, con $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -10 \\ 11 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Solución: $X = \begin{pmatrix} 58/39 \\ -163/39 \\ 17/39 \end{pmatrix}$

3.- a) Averigua para qué valores del parámetro t la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & t & 4 \\ -1 & 3 & t \end{pmatrix}$ no tiene inversa.

b) Calcula la matriz inversa de A para t=1, si es posible.

Solución: a) t=2 y t=-6 b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 11/7 & -12/7 & 4/7 \\ 4/7 & -5/7 & -4/7 \\ -1/7 & 3/7 & -1/7 \end{pmatrix}$

4.- Resuelve la ecuación matricial $X\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Solución: $X = \begin{pmatrix} -3/2 & 1/4 \\ 2 & 3/2 \end{pmatrix}$

5.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ***y*** $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$***, calcula:***

---

a) (A+B)/2 (A-B)^2 c) A^{-1}

Solución: a) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

EJERCICIOS DE REPASO DE ÁLGEBRA: Matrices y Determinantes

Hoja 8

1.- Resuelve la ecuación: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & x & 1 \\ 1 & 3 & x \end{vmatrix} = 10$.

Solución: $x = \pm\sqrt{2}$.

2.- Calcula los determinantes de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Solución: a) -2 b) 22 c) -2 d) 2 e) 79

3.- Halla las matrices adjuntas de las matrices: a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Solución: a) $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -20 & -7 & 25 \\ -8 & -11 & 10 \\ 17 & 8 & -11 \end{pmatrix}$

4.- Resuelve las ecuaciones: a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & x \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & x & 7 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ 0 & 2 & x \\ 4 & 0 & -x \end{vmatrix} = 2$.

Solución: a) x=1 b) x=-1 y x=3.

5.- Calcula las matrices inversas de las matrices siguientes:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -2/3 & -1 \\ -1/3 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

6.- Determina, según los valores de m, el rango de la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 1 \\ m & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Solución: Si m=-6 $\Rightarrow$ rg(A)=2 y si m$\neq$-6 $\Rightarrow$ rg(A)=3.

5.- Calcula las matrices inversas de las matrices: $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ -2 & -2 & 2\end{pmatrix}$

<u>*Solución:*</u> $A^{-1}=\begin{pmatrix}1/3 & 1/3 & -4/3\\ -2/3 & 1/3 & 2/3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ $B^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -1 & -1/2\\ 1/3 & -2/3 & -1/2\\ 1/3 & -5/3 & -1/2\end{pmatrix}$

6.- a) Halla el valor o valores de a para los que la matriz $A=\begin{pmatrix}a & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & a & 0\end{pmatrix}$ no tiene inversa.

b)Halla A^{-1} para a=2.

<u>*Solución:*</u> a) a=-1 y a=1 b) $A^{-1}=\begin{pmatrix}2/3 & 0 & -1/3\\ -1/3 & 0 & 2/3\\ 1/3 & 1 & -2/3\end{pmatrix}$