Matrices

ÍNDICE

1. Introducción.

Las matrices aparecieron por primera vez hacia el año 1850, introducidas por el inglés J.J. Sylvester. Su desarrollo se debe a W.R. Hamilton y a A. Caley.

Además de su utilidad para el estudio de los sistemas de ecuaciones, las matrices aparecen de manera natural en geometría, estadística economía, etc. Nuestra cultura está llena de matrices de números: el horario de los trenes de cada una de las estaciones es una matriz de doble entrada, la tabla de cotizaciones de la Bolsa en cada uno de los días de la semana, las tablas de sumar y multiplicar, la disposición de los alumnos en clase, las casillas de un tablero de ajedrez, las apuestas de la quiniela.

Actualmente, muchos programas de ordenador utilizan el concepto de matriz. Así, las hojas de cálculo funcionan utilizando una inmensa matriz con cientos de filas y columnas en cuyas celdas se pueden introducir datos y fórmulas para realizar cálculos a gran velocidad. Esto requiere utilizar las operaciones con matrices.

2. Definición y Clasificación de Matrices.

- **DEFINICIÓN**: Una matriz es una tabla (Nº reales) de elementos dispuestos en filas y columnas .Se nombran con letras mayúsculas.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

m filas
n columnas

$$\text{Ejemplos}\begin{cases} B=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{D}=\begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & -9 & -2 \end{pmatrix} \\ C=\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & -7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{E}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- **ORDEN DE UNA MATRIZ:** es el número de filas y columnas de una matriz

$$B=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$
Orden = 2 x 2

$$\text{D}=\begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & -9 & -2 \end{pmatrix}$$
Orden = 3 x 3

$$C=\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & -7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$
Orden = 3 x 2

$$\text{E}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$
Orden = 1 x 3

- **CLASIFICACIÓN SEGÚN LA FORMA DE LA MATRIZ**

A) Matriz fila: tienen una única fila $A=\begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \end{pmatrix}$.

B) Matriz columna: tienen una sola columna $A=\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

C) Matriz cuadrada: tienen el mismo número de filas y columnas

$$\begin{cases} A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ -8 & -7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ B=\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \underset{\text{DIAGONAL PRINCIPAL}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -7 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & \\ & 0 \end{pmatrix}.$$

D) Matriz Rectangular: tienen distinto número de filas y columnas. $A=\begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

E) Matriz Traspuesta: es aquella que se obtiene cambiando filas por columnas. A^t

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 7 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -12 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 7 & -2 & -12 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Propiedades de la Matriz Traspuesta:

1) $(A^t)^t = A$

2) $(A+B)^t = A^t + B^t$

3) $(\alpha \text{A})^t = \alpha \text{A}^t \qquad \alpha \in \mathbb{R}$

4) $(\text{A}\cdot\text{B})^t = B^t \cdot A^t$

F) Matriz Simétrica: es la matriz cuadrada que coincide con su traspuesta ($A = A^t$)

G) Matriz Antisimétrica: es la matriz cuadrada que coincide con la opuesta de su traspuesta ($A = -A^t$)

- **CLASIFICACIÓN SEGÚN LOS ELEMENTOS DE LA MATRIZ**

A) Matriz nula: todos los elementos son cero $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

B) Matriz Diagonal: todos los elementos son cero excepto los de su diagonal principal. $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$

C) Matriz unidad: es diagonal con todos los elementos de la diagonal iguales a 1.

$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

D) - Matriz triangular superior: es una matriz cuadrada con todos los elementos nulos por debajo de la diagonal principal. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -9 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$

- Matriz triangular inferior : es una matriz cuadrada con todos los elementos nulos por encima de la diagonal principal. $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -9 \end{pmatrix}$

E) Matrices equidimensionales: son aquellas que tiene el mismo número de filas y columnas

3. Operaciones con Matrices.

A) SUMA: Deben ser matrices equidimensionales. Se suman los elementos que ocupan la misma posición.

$$\boxed{\begin{pmatrix} -2 & 7 & 8 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 5 \\ 6 & -1 & 6 \end{pmatrix}}$$

B) PRODUCTO DE UN NÚMERO POR UNA MATRIZ: se multiplica todos los elementos de la matriz por ese número.

$$\boxed{5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 0 \\ 10 & -15 & 25 \\ 5 & -10 & 20 \end{pmatrix}}$$

C) PRODUCTO: Para multiplicar dos matrices el número de columnas de la primera tiene que coincidir con el número de filas de la segunda. El resultado es otra matriz que tiene el número de filas de la primera y el número de columnas de la segunda, y cada elemento a_{ij} se obtiene multiplicando la fila i de la primera matriz por la columna j de la segunda.

$$\boxed{\underset{m\,x\,n}{A} \cdot \underset{n\,x\,p}{B} = \underset{m\,x\,p}{C}}$$

EJEMPLO

$$\boxed{\underset{3x3}{\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}} \cdot \underset{3x2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 3\cdot 0 + (-1)\cdot 5 & 1\cdot 2 + 3\cdot(-2) + (-1)\cdot 3 \\ 0\cdot 1 + 2\cdot 0 + (-5)\cdot 5 & 0\cdot 2 + 2\cdot(-2) + (-5)\cdot 3 \\ 1\cdot 1 + 2\cdot 0 + 3\cdot 5 & 1\cdot 2 + 2\cdot(-2) + 3\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -7 \\ -25 & -19 \\ 16 & 7 \end{pmatrix}}$$

IMPORTANTE: El producto de matrices **NO** cumple la propiedad conmutativa

$$A\cdot B \neq B\cdot A$$

4. EJERCICIOS RESUELTOS

1. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 7 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar A·B.

   Solución: Se pueden multiplicar $\underset{2\,x\,3}{A} \cdot \underset{3\,x\,2}{B} = \underset{2\,x\,2}{A{\cdot}B}$

$$\boxed{A{\cdot}B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 7 & 8 & 7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2{\cdot}2+3{\cdot}5+6{\cdot}(-1) & 2{\cdot}3+3{\cdot}7+6{\cdot}1 \\ 7{\cdot}2+8{\cdot}5+7{\cdot}(-1) & 7{\cdot}3+8{\cdot}7+7{\cdot}1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13 & 33 \\ 47 & 84 \end{pmatrix}}$$

2. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.Calcular A^n y B^n

   Solución:

- $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^2=A{\cdot}A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2{\cdot}A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$A^n=\begin{pmatrix} 1 & n & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$B^2=B{\cdot}B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B^3=B^2{\cdot}B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^2 & 2^2 \\ 2^2 & 2^2 \end{pmatrix}$$

$$B^4=B^3{\cdot}B=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^3 & 2^3 \\ 2^3 & 2^3 \end{pmatrix}$$

$$B^5=B^4{\cdot}B=\begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 16 & 16 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^4 & 2^4 \\ 2^4 & 2^4 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$B^n=\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

3. Encontrar todas las matrices X cuadradas de orden 2x2 que satisfagan la igualdad $\boxed{X\cdot A = A\cdot X}$ siendo $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$

Solución: Sea $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, siendo $a,b,c,d\in\mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} X\cdot A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & 3b\\ c & 3d\end{pmatrix}\\ A\cdot X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ 3c & 3d\end{pmatrix}\end{array}\right\} \underset{\boxed{X\cdot A=A\cdot X}}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{l} a=a\\ 3b=b\Rightarrow 3b-b=0\Rightarrow 2b=0\Rightarrow \boxed{b=0}\\ 3c=c\Rightarrow 3c-c=0\Rightarrow 2c=0\Rightarrow \boxed{c=0}\\ 3d=3d\end{array}\right. \Rightarrow \boxed{X=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & d\end{pmatrix}}$$

4. Hallar todas las matrices $X=\begin{pmatrix}a & 0\\ b & c\end{pmatrix}$, siendo $a,b,c\in\mathbb{R}$, distintas de la matriz nula, que cumpla $\boxed{X^2=2\cdot X}$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} X^2=X\cdot X=\begin{pmatrix}a & 0\\ b & c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & 0\\ b & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2 & 0\\ b\cdot a+c\cdot b & c^2\end{pmatrix}\\ 2\cdot X=2\cdot\begin{pmatrix}a & 0\\ b & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a & 0\\ 2b & 2c\end{pmatrix}\end{array}\right\} \underset{\boxed{X^2=2\cdot X}}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{l} a^2=2a\Rightarrow a^2-2a=0\Rightarrow a\cdot(a-2)=0\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}a=0\\ a=2\end{array}\right.\\ b\cdot a+c\cdot b=2b\Rightarrow b\cdot(a+c)=2b\Rightarrow a+c=2\Rightarrow \boxed{c=2-a}\\ c^2=c\end{array}\right.$$

$$\bullet Si\ \boxed{a=0}\Rightarrow c=2-0=2\Rightarrow \boxed{X=\begin{pmatrix}0 & 0\\ b & 2\end{pmatrix}}$$

$$\bullet Si\ \boxed{a=2}\Rightarrow c=2-2=0\Rightarrow \boxed{X=\begin{pmatrix}2 & 0\\ b & 0\end{pmatrix}}$$

5. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & -4 & -5\\ -1 & 3 & 4\end{pmatrix}$. $a)$ Comprobar que $A^3+I=0$ $b)$ Hallar A^{100}

Solución

$a)$ Se comprueba fácilmente.

$$b)A^3+I=0\Rightarrow \boxed{A^3=-I}\Rightarrow A^{100}=A^{3\cdot 33+1}=A^{3\cdot 33}\cdot A=(A^3)^{33}\cdot A \underset{\boxed{A^3=-I}}{=} (-I)^{33}\cdot A=-I\cdot A=-A$$

6. Resuelve el sistema $\left.\begin{array}{l}3X-5Y=A\\4X-3Y=B\end{array}\right\}$ siendo $A=\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-1&4\\2&0\end{pmatrix}$

Solución:

Lo resolvemos por doble reducción

- $$\left.\begin{array}{l}3X-5Y=A\\4X-3Y=B\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}{}_{x(-4)}3X-5Y=\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}\\{}_{x3}4X-3Y=\begin{pmatrix}-1&4\\2&0\end{pmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow+\left.\begin{array}{r}-12X+20Y=\begin{pmatrix}-8&0\\-4&-12\end{pmatrix}\\12X-9Y=\begin{pmatrix}-3&12\\6&0\end{pmatrix}\end{array}\right\}$$

$$11Y=\begin{pmatrix}-11&12\\2&-12\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{Y=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}-11&12\\2&-12\end{pmatrix}}$$

- $$\left.\begin{array}{l}3X-5Y=A\\4X-3Y=B\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}{}_{x(-3)}3X-5Y=\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}\\{}_{x5}4X-3Y=\begin{pmatrix}-1&4\\2&0\end{pmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow+\left.\begin{array}{r}-9X+15Y=\begin{pmatrix}-6&0\\-3&-9\end{pmatrix}\\20X-15Y=\begin{pmatrix}-5&20\\10&0\end{pmatrix}\end{array}\right\}$$

$$11X=\begin{pmatrix}-11&20\\7&-9\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{X=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}-11&20\\7&-9\end{pmatrix}}$$

5. EJERCICIOS SIN RESOLVER

1. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}2&0&1&-1\\2&-1&-3&4\\1&0&4&5\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2&3\\1&1\\0&2\\-1&1\end{pmatrix}$. Hallar A·B

Solución: $\boxed{A\cdot B=\begin{pmatrix}5&7\\-1&3\\-3&16\end{pmatrix}}$

2. Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}1&0&3\\2&-1&2\\2&2&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&1\\-2&-3\\0&4\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}2&1&4\\3&0&-1\\4&-1&5\end{pmatrix}$.

Calcular : 3A+2C , AC + CA, A·B

Solución:

$$\bullet 3A+2C=\begin{pmatrix}7&2&17\\12&-3&4\\14&4&13\end{pmatrix}\quad \bullet AC+CA=\begin{pmatrix}26&5&31\\10&-2&27\\26&12&26\end{pmatrix}\quad \bullet A\cdot B=\begin{pmatrix}1&13\\4&13\\-2&0\end{pmatrix}$$

3. Calcular A^n, B^n, C^n y D^n

siendo $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&2&-2\\2&2&-2\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Solución

$$A^n=\begin{pmatrix}1&0&0\\n&1&0\\n&0&1\end{pmatrix}\quad B^n=\begin{pmatrix}2^n&2^n&-2^n\\2^n&2^n&-2^n\\2^n&2^n&-2^n\end{pmatrix}\quad C^n=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}\quad D^n=\begin{cases}\begin{pmatrix}1&1&n\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \text{si n es impar}\\[2ex] \begin{pmatrix}1&0&n\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \text{si n es par}\end{cases}$$

4. Encontrar todas las matrices X tales que A·X=X·A, siendo $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & 2\end{pmatrix}$.

Solución

Si $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, siendo $a,b,c,d\in\mathbb{R}$

Las matrices X que cumplen A·X=X·A son $\begin{cases}b=0\\ c=4d-4a\end{cases}$ $\boxed{X=\begin{pmatrix}a & 0\\ 4d-4a & d\end{pmatrix}}$

5. A) Hallar todas las matrices $A=\begin{pmatrix}a & a\\ 0 & b\end{pmatrix}$ distintas de $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ tal que $A^2=A$

B) Para cualquiera de las matrices A obtenidas en el apartado A) calcular:

$$M = A+A^2+\ldots+A^{10}$$

Solución

A)
$\bullet Si\ \boxed{a=0}\Rightarrow b=1\Rightarrow \boxed{A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}$

$\bullet Si\ \boxed{a=1}\Rightarrow b=0\Rightarrow \boxed{A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}}$

B) M=10·A

6. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ y $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

a) Hallar dos constantes α y β tal que $A^2=\alpha\cdot A+\beta\cdot I$

b) Calcular A^5 utilizando la expresión obtenida en el apartado anterior.

c) Hallar todas las matrices X que satisfacen $(A-X)\cdot(A+X)=A^2-X^2$

Solución

a) $\alpha=2$ y $\beta=-1$

b) $A^5=5A-4I$

c) Si $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, siendo $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ Las matrices X deben cumplir que A·X=X·A para que sea cierta la igualdad $(A-X)\cdot(A+X)=A^2-X^2$. Esas matrices X son las siguientes $\begin{cases}c=0\\ a=d\end{cases}\Rightarrow \boxed{X=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}}$

7. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcular A^{86}.

Solución $\boxed{A^3=I \Rightarrow A^{86}=A^{3\cdot 28+2}=A^{3\cdot 28}\cdot A^2=(A^3)^{28}\cdot A^2 \underset{\boxed{A^3=I}}{=} I^{28}\cdot A^2=I\cdot A^2=A^2}$

8. Resuelve los siguientes sistemas

a) $\left.\begin{array}{l} X+2Y=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ 2X-3Y=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$. Solución: $\boxed{\begin{array}{l} X=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 8 & 13 \end{pmatrix} \\ Y=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 13 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \end{array}}$

b) $\left.\begin{array}{l} 2X+Y=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ X-3Y=\begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$. Solución: $\boxed{\begin{array}{l} X=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix} \\ Y=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 9 & 8 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}}$