MATRICES Y DETERMINANTES

1.1 DEFINICIÓN Y DESCRIPCIÓN DE MATRICES

Una matriz es una ordenación rectangular de elementos dispuestos en filas y columnas encerrados entre paréntesis, por ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Las matrices se nombran con letras mayúsculas **A, B, C, ...** y sus elementos con minúsculas con dos subíndices $\mathbf{a_{ij}}$, que indican respectivamente la fila y la columna en la que se sitúa el elemento

$$\begin{array}{ccc} & \text{Columnas } \Downarrow & \\ & \begin{array}{cccc} 1^a & 2^a & & \text{m-ésima} \end{array} & \\ A = \{a_{ij}\} = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ \dots \\ n-\text{ésima} \end{array} \quad \Leftarrow \text{filas} \end{array}$$

Una matriz de n filas y m columnas se dice que es una matriz de **orden n×m** y se representa por $A_{n\times m}$ siendo n el nº de filas y m el nº de columnas. Definimos **dimensión** *de una matriz como el número n× m de elementos que tiene*; bien claro que, no será igual una matriz n×m que una matriz m×n, aunque tengan igual dimensión:

$$A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Orden 2×3, dimensión 6 Orden 3×2, dimensión 6

Atendiendo al orden de una matriz, podemos definir:

i) Matriz cuadrada, matriz que verifica **n = m**, en este caso se escribe $\mathbf{A_n}$ **o** $\mathbf{A_{n\times n}}$ y se dice que es una matriz de orden n.

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

ii) Matriz rectangular, matriz en la que **n≠m**

$$A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_{4\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 7 & 4 \\ 3 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Casos notables:

ii-a) ***Matriz fila:*** es una matriz de orden **(1×m)**:

$$(a_{11} \ a_{12} \ ....a_{1m})$$

ii-b) ***Matriz columna:*** es una matriz de orden **(n×1)**:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

Atendiendo a sus elementos:

iii)

iii_a) ***Matriz real,*** sus elementos son **números reales**: $a_{ij} \in \mathbb{R}$

iii_b) ***Matriz compleja,*** sus elementos son **números complejos** $a_{ij} \in \mathbb{C}$

iii_c) ***Matriz nula,*** sus elementos son todos **nulos**

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.2 OPERACIONES CON MATRICES

Sea $M_{n\times m}$ el conjunto de las matrices de orden n×m con elementos reales

1.2.1 Igualdad de matrices

Decimos que dos matrices del mismo orden $A = \{a_{ij}\}$, $B = \{b_{ij}\}$ son iguales si

$$\mathbf{a_{ij} = b_{ij}} \qquad \forall i,j \in \mathbb{N}$$

Es decir, tienen todos los elementos iguales y en el mismo orden.

1.2.2 Suma y diferencia de matrices

Dadas las matrices $A = \{a_{ij}\}$, $B = \{b_{ij}\}$ se define **A ± B** como la matriz $C = \{c_{ij}\}$ tal que

$$\mathbf{c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}}$$

*Para realizar estas operaciones, las matrices deben ser del **mismo orden** y el resultado es **una matriz de ese mismo orden.***

Ejemplo 1.1

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad A - B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Propiedades de la suma:

i) Asociativa:

$$\forall\, A, B, C \in M_{n\times m} : \quad \mathbf{A + (B + C) = (A + B) + C}$$

ii) Conmutativa:

$$\forall\, A, B \in M_{n\times m} : \quad \mathbf{A + B = B + A}$$

iii) Elemento neutro:

$$\forall\, A \in M_{n\times m},\ \exists\, O \in M_{n\times m} \ / \ \mathbf{A + O = O + A = A}$$

iv) Elemento opuesto:

$$\forall\, A \in M_{n\times m}\ \exists\, -A \in M_{n\times m}\ /\quad \mathbf{A} + (\mathbf{-A}) = \mathbf{O}$$

*A la matriz **–A** se denomina **matriz opuesta** de A y resulta de considerar la matriz cuyos elementos son los opuestos de los elementos de A.*

1.2.3 Producto de un escalar por una matriz

Dado un escalar $\alpha\in\mathbb{R}$ y una matriz $A\in M_{n\times m}$, se define el producto $\alpha\ \ \mathbf{A} = \mathbf{A}\ \ \alpha$ como otra matriz del mismo orden, que resulta de multiplicar α por cada elemento de A:

$$\alpha\ \ \mathbf{A} = \alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\cdot a_{11} & \alpha\cdot a_{12} & \dots & \alpha\cdot a_{1m} \\ \alpha\cdot a_{21} & \alpha\cdot a_{22} & \dots & \alpha\cdot a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha\cdot a_{n1} & \alpha\cdot a_{n2} & \dots & \alpha\cdot a_{nm} \end{pmatrix} = \mathbf{A}\ \ \alpha$$

Ejemplo 1.2

$$5\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 1 & 5\cdot(-1) & 5\cdot 0 \\ 5\cdot 2 & 5\cdot 1 & 5\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 0 \\ 10 & 5 & 15 \end{pmatrix}$$

Propiedades del producto de un escalar por una matriz:

i) Asociativa respecto del producto por escalares: $\forall\, \alpha,\beta \in\mathbb{R}$ y $\forall A\in M_{n\times m}$

$$(\alpha\cdot\beta)\cdot\mathbf{A} = \alpha\cdot(\beta\cdot\mathbf{A})$$

ii) Conmutativa: $\forall\, \alpha \in\mathbb{R}$ y $\forall A\in M_{n\times m}$

$$\alpha\cdot\mathbf{A} = \mathbf{A}\cdot\alpha$$

iii) Distributiva respecto de la suma de matrices: $\forall\, \alpha \in\mathbb{R}$ y $\forall A, B \in M_{n\times m}$

$$\alpha\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \alpha\cdot\mathbf{A} + \alpha\cdot\mathbf{B}$$

iv) Distributiva respecto de la suma de escalares: $\forall\, \alpha,\beta \in\mathbb{R}$ y $\forall A\in M_{n\times m}$

$$\mathbf{A}\cdot(\alpha+\beta) = \mathbf{A}\cdot\alpha + \mathbf{A}\cdot\beta$$

1.2.4 Producto de matrices

Dadas dos matrices cualesquiera $A_{n\times m}$ y $B_{m\times p}$ compatibles para el producto, es decir, ***tales que el número de columnas de A coincide con el número de filas de B, se define el producto de A · B como otra matriz C que tiene tantas filas como A y columnas como B, siendo su elemento c_{ij} el resultado de sumar los productos de los elementos de la fila i de A por los de la columna j de B:***

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \{\mathbf{c_{ij}}\} \ / \ \mathbf{c_{ij}} = \sum_k a_{ik}\cdot b_{kj} \qquad \forall \mathbf{i}, \forall \mathbf{j}$$

El algoritmo puede entenderse fácilmente observando el siguiente esquema:

$$\begin{array}{cccc} & & \textbf{Columna j} \Downarrow & \\ \textbf{Fila i} \Rightarrow & \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \cdot & \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} & & \\ \cdots & & \\ & \mathbf{c_{ij}} = a_{i1}\cdot b_{1j} + \ldots\ldots + a_{im}\cdot b_{jn} & \\ \cdots & & \\ \cdots & & \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{n}\times\boxed{\mathbf{m} \qquad\qquad \mathbf{m}}\times \mathbf{p} \qquad\qquad\qquad\qquad \mathbf{n}\times\mathbf{p}$$

Ejemplo 1.3

i) Multiplicar las siguientes matrices

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 3\cdot(-1) + 1\cdot(-2) & 2\cdot 0 + 3\cdot 2 + 1\cdot 3 \\ 0\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) + (-2)\cdot(-2) & 0\cdot 0 + (-1)\cdot 2 + (-2)\cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$2\times\boxed{3 \qquad\quad 3}\times 2 \qquad \Rightarrow \qquad 2\times 2$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}$$

ii) Multiplicar las siguientes matrices

$$A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 2 & 1\cdot 1 & 1\cdot 3\\2\cdot 2 & 2\cdot 1 & 2\cdot 3\\3\cdot 2 & 3\cdot 1 & 3\cdot 3\end{pmatrix}$$

$$3\times\boxed{1\qquad 1}\times 3 \qquad\Rightarrow\qquad 3\times 3$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14\end{pmatrix}$$

$$1\times\boxed{3\quad 3}\times 1 \qquad\Rightarrow\qquad 1\times 1$$

Los demás productos $A\cdot C$, $C\cdot A$, $B\cdot C$, $C\cdot B$ no son compatibles y no se pueden realizar.

Propiedades del producto de matrices:

i) Asociativa: $\forall$ A, B, C $\in M_{n\times m}$

$$\mathbf{A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C}$$

ii) Distributiva respecto a la suma de matrices: $\forall$ A, B, C $\in M_{n\times m}$

$$\mathbf{A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C}$$

$$\mathbf{(B+C)\cdot A=B\cdot A+C\cdot A}$$

iii) El producto de matrices no siempre es conmutativo: $\forall$ A, B $\in M_{n\times m}$

$$\mathbf{A\cdot B\neq B\cdot A}$$

- Cuando dos matrices verifican que $\mathbf{A\cdot B=B\cdot A}$ se dicen **conmutativas**

Es condición obligada aunque no suficiente que las matrices sean cuadradas para que conmuten:

$A(n\times m)\cdot B(m\times p) = C(m\times m)$

$B(m\times p)\cdot A(n\times m) = C(n\times n)$ **siempre que sean compatibles** $\Rightarrow$ $\mathbf{n = p}$

Si conmutan, $C(m\times m) = C(n\times n)$ $\Rightarrow$ $\mathbf{n = m}$ $\Rightarrow$ **matrices cuadradas**

- Cuando dos matrices verifican $\mathbf{A\cdot B = - B\cdot A}$ **se dicen anticonmutativas**

iv) El producto de matrices tiene divisores de cero: $\forall$ A, B $\in M_{n\times m}$

$$\textbf{Si } \mathbf{A\cdot B = O} \Leftrightarrow \textbf{ no necesariamente } \mathbf{A = O} \text{ o } \mathbf{B = O}$$

Ejemplo 1.4

Dadas las matrices $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \mathbf{O}$ **y** $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \neq \mathbf{O}$

$$\mathbf{A\cdot B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{O}$$

v) El producto de matrices no verifica la propiedad de simplificación:
$\forall$ A, B, C $\in M_{n\times m}$

$$\textbf{Si } \mathbf{A\cdot B = A\cdot C} \Leftrightarrow \textbf{ no necesariamente } \mathbf{B = C}$$

Ejemplo 1.5

$$\mathbf{A\cdot B = A\cdot C \Leftrightarrow B \neq C}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = C$$

1.3 MATRICES CUADRADAS

*Definimos una **matriz cuadrada** como aquella que tiene igual número de filas que de columnas.*

1.3.1 Definiciones en las matrices cuadradas:

En una matriz cuadrada n×n se llama ***diagonal principal*** a la línea formada por los elementos cuyos subíndices de fila y columna coinciden: a_{11}, a_{22}, a_{33}, ...a_{nn}.

Se llama ***triángulo superior*** al formado por los elementos a_{ij} situados por encima de la diagonal principal.

Se llama ***triángulo inferior*** al formado por los elementos a_{ij} situados por debajo de la diagonal principal.

$$A = \{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} * & \Delta & \Delta & \Delta \\ \nabla & * & \Delta & \Delta \\ \nabla & \nabla & * & \Delta \\ \nabla & \nabla & \nabla & * \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \Delta = \text{Triángulo superior} \\ * = \text{diagonal principal} \\ \nabla = \text{Triángulo inferior} \end{array}$$

Se llama ***traza*** en una matriz cuadrada, a la suma de los elementos de la diagonal principal:

$$\mathbf{Tr(A)} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33} + ...a_{nn}$$

1.3.2 Tipos de matrices cuadradas:

Matiz triangular: *matriz cuadrada que tiene un triángulo superior (matriz triangular inferior) o inferior (matriz triangular superior) nulo.*

$$M_{\text{inferior}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_{\text{superior}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matiz estrictamente triangular: *es una matriz triangular cuya diagonal principal es nula*

$$M_{\text{estric. inferior}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad M_{\text{estric. superior}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz diagonal: *es aquella matriz cuadrada que es triangular superior e inferior a la vez.*

$$M_{\text{diagonal}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Matriz escalar: *es una matriz diagonal cuyos elementos son todos iguales.*

$$M_{\text{escalar}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La más usual de estas matrices escalares es la ***matriz identidad (unidad))***, cuya diagonal está formada por unos.

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ....etc}$$

Matriz inversa: *Dada una matriz cuadrada A decimos que tiene inversa B si:*

$$\mathbf{A \cdot B = B \cdot A = I}$$

A la inversa de A se le denota por $\mathbf{A^{-1}} = B$ y entonces la definición se convierte en

$$\mathbf{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I}$$

Hay matrices que tienen inversa, se les llama ***regulares o invertibles*** y otras que no tienen inversa, se dice ***singulares***.

Propiedades:

A^{-1} es única

$(A^{-1})^{-1} = A$

$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

$(\lambda \cdot A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \cdot A^{-1} \quad \forall \lambda \neq 0 \in \mathbb{R}$

Matriz simétrica: *Se dice que una matriz cuadrada es simétrica, cuando los elementos simétricos respecto a la diagonal principal son iguales.*

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & 0 & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & 3 \end{pmatrix}$$

Matriz antisimétrica: *Se dice que una matriz cuadrada es antisimétrica, cuando los elementos simétricos respecto a la diagonal principal son iguales pero opuestos y los elementos de la diagonal principal son nulos .*

$$\begin{pmatrix} 0 & -5 & -1 & -4 \\ 5 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1.3.3 Propiedades de las matrices cuadradas:

i) *El producto de dos matrices triangulares, ambas superiores o inferiores, es otra matriz superior o inferior.*

Ejemplo 1.6

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \\ 16 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

ii) El producto de dos matrices diagonales, es otra matriz diagonal.

Ejemplo 1.7

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

iii) Las matrices diagonales conmutan entre sí.

Ejemplo 1.8

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

iv) Para la matriz identidad se verifican las relaciones siguientes:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{n\times m}} \cdot \mathbf{I}_{\mathbf{m}} = \mathbf{A}_{\mathbf{n\times m}}$$
$$\mathbf{I}_{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{n\times m}} = \mathbf{A}_{\mathbf{n\times m}}$$

Ejemplo 1.9

$$\mathbf{A}_{2\times 3} \cdot \mathbf{I}_3 = \mathbf{A}_{2\times 3} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{I}_2 \cdot \mathbf{A}_{2\times 3} = \mathbf{A}_{2\times 3} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

1.3.4 Potencia de una matriz cuadrada A^k:

Se llama ***potencia k-ésima*** *de una matriz cuadrada A, donde $k \in \mathbb{N}$, un entero positivo, al producto de A por sí misma, repetido k veces.*

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \ldots\ldots^{\text{k veces}} \ldots\ldots \cdot \mathbf{A}$$

Se conviene en que:

$$\mathbf{A}^{-k} = (\mathbf{A}^{-1})^k \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}$$
$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$$

A partir de la definición de potencia tenemos:

i) Matriz periódica de periodo n es aquella matriz que verifica

$$\mathbf{A^n = A}$$

siendo n el menor entero positivo que cumple la igualdad.

Para n = 2, $\mathbf{A^2 = A}$ se dice que A es ***idempotente***.

ii) Matriz nilpotente de índice n, es aquella matriz tal que

$$\mathbf{A^n = O}$$

siendo n el menor entero positivo que cumple la igualdad.

iii) Matriz involutiva es aquella matriz que verifica:

$$\mathbf{A^2 = I \Leftrightarrow A \cdot A = I \Leftrightarrow A = A^{-1}}$$

1.4 TRANSPUESTA DE UNA MATRIZ

*Dada una matriz $A_{n\times m}$ se llama **transpuesta de A** y se escribe A^t, a la matriz que resulta de cambiar ordenadamente las filas por las columnas.*

$$A = A_{n\times m} \rightarrow \text{transposición} \rightarrow A_{m\times n} = A^t$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = A^t$$

Ejemplo 1.10

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \text{transpuesta} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \mathbf{A^t}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{transpuesta} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \mathbf{B^t}$$

Propiedades:

i) $\mathbf{(A^t)^t = A}$

ii) $(\lambda \cdot \mathbf{A^t}) = \lambda \cdot \mathbf{A^t} \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$

iii) **$(A \pm B)^t = A^t \pm B^t$**

iv) **$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$**

v) **Si A es simétrica $\Leftrightarrow$ $A = (A)^t$**

vi) **Si A es antisimétrica $\Leftrightarrow$ $-A = (A)^t$**

1.4.1 Teoremas relativos a matrices simétricas:

Teorema 1.- *Dada una matriz cuadrada A, $A + A^t$ es una matriz simétrica*

En efecto, sea $S = A + A^t$ comprobemos que S es simétrica:

$$S^t = (A + A^t)^t = A^t + A^{tt} = A^t + A = A + A^t = S$$

Ejemplo 1.11

Hallar una matriz simétrica a partir de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

$$S = A + A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Teorema 2.- *Dada una matriz cuadrada A_n, $A - A^t$ es una matriz antisimétrica*

En efecto, sea $T = A - A^t$ comprobemos que T es antisimétrica:

$$T^t = (A - A^t)^t = A^t - A^{tt} = A^t - A = -(A - A^t) = -T$$

Ejemplo 1.12

Hallar una matriz antisimétrica a partir de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

$$T = A\text{-}A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Teorema 3.- *Toda matriz cuadrada A se puede expresar como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica:*

$$A = S + T^t$$

En efecto:

$$\text{Sean}\begin{cases} S = A + A^t & \text{simétrica} \\ T = A - A^t & \text{antisimétrica} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = \dfrac{1}{2}(A + A^t) \text{ es también simétrica} \\ T = \dfrac{1}{2}(A - A^t) \text{ es también antisimétrica} \end{cases}$$

Sumando esas ecuaciones:

$$S + T = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t) = A$$

Ejemplo 1.13

Expresar la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

$$S = \frac{1}{2}(A + A^t) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$T = \frac{1}{2}(A - A^t) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Teorema 4.- *Dada una matriz cualquiera $A = A_{n\times m}$, $\boldsymbol{S = A \cdot A^t}$ y $\boldsymbol{R = A^t \cdot A}$ son matrices simétricas.*

Sea $S = A \cdot A^t$ para ver que es simétrica $\Leftrightarrow$ $\mathbf{S}^t = (A \cdot A^t)^t = (A^t)^t \cdot A^t = A \cdot A^t = \mathbf{S}$

$$R = A^t \cdot A \text{ simétrica} \Leftrightarrow \mathbf{R}^t = (A^t \cdot A)^t = A^t \cdot (A^t)^t = A^t \cdot A = \mathbf{R}$$

Ejemplo 1.14

Hallar una matriz simétrica a partir de $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

$$S = A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 17 \end{pmatrix}$$

$$R = A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$$

1.5 DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA

1.5.1 Definición:

A toda matiz cuadrada A_n le asociamos un número llamado **determinante,** $|A|$, simbolizado de la forma:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Dicho número es un resultado que se puede obtener de diferentes maneras. Según el orden y tipos de determinantes estudiaremos ciertos métodos para hallar el determinante.

1.5.2 Cálculo de un determinante:

I) Método de Sarrus

Cuando el determinante es de orden **dos o tres** se usa la regla de Sarrus, que consiste en sumar todos los productos que se obtienen al multiplicar dos o tres elementos de la matriz de todas las formas posibles, con la condición de que en cada producto exista un elemento de cada fila y uno de cada columna, con sus signos correspondientes y para ello se utiliza el esquema que sigue:

Para un determinante de orden 2:

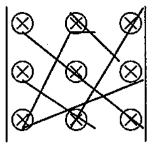
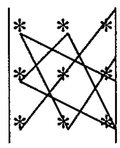
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \otimes & \\ & \otimes \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} & * \\ * & \end{vmatrix}$$

Para un determinante de orden 3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}\cdot a_{31}$$

$$-(a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} + a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32} + a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33})$$

La regla nos recuerda el desarrollo:

Con signo positivo , con signo negativo 

Ejemplo 1.15

Calcular los determinantes $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 1 - (-3)\cdot 1 = 5$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 1\cdot 3 + 1\cdot 0\cdot 0 + (-1)\cdot(-2)\cdot(-2) - [1\cdot 1\cdot(-2) + 2\cdot 0\cdot(-2) + (-1)\cdot 0\cdot 3] =$$

$$= 6 + 0 - 4 - (-2 + 0 + 0) = 0$$

II) Cálculo del determinante de orden n, por los adjuntos:

Cuando el orden de los determinantes es superior a 3 la regla de Sarrus no es fácilmente aplicable y entonces utilizamos el método de los adjuntos, que reduce el orden en una unidad cada vez que le utilizamos.

Para ello vamos a definir dos nuevos conceptos:

Menor complementario: *Dada una matriz A_n se llama menor complementario de un elemento a_{ij} al determinante de la matriz, que resulta de suprimir la fila i y la columna j en la matriz A_n: se llama* $\mathbf{m_{ij}}$.

Adjunto de un elemento: *Al producto de $(-1)^{i+j}$ por el menor complementario m_{ij} de a_{ij} se llama adjunto de un elemento a_{ij} y se escribe A_{ij}.*

$$\mathbf{A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot m_{ij}}$$

A partir de estas definiciones obtenemos otra forma de calcular un determinante: ***el valor de un determinante de orden n es igual a la suma de los productos de los elementos de una fila o columna por sus respectivos adjuntos.***

$$|\mathbf{A}| = \sum_{i\ o\ j=1}^{n} \mathbf{a}_{ij} \times \mathbf{A}_{ij} = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + a_{i3} \cdot A_{i3} + \ldots\ldots + a_{in} \cdot A_{in} =$$

$$a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + a_{3j} \cdot A_{3j} + \ldots\ldots + a_{nj} \cdot A_{nj}$$

Ejemplo 1.16

Calcular el valor del determinante $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & -3 & -2 \end{vmatrix}$

Elegimos la primera fila ya que tiene dos elementos nulos y eso va a simplificar el cálculo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{12} + 2 \cdot A_{13} + 0 \cdot A_{14} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} + 0 \cdot m_{12} + 2 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} + 0 \cdot m_{14} =$$

cuando llegamos a un determinante de orden tres, podemos aplicar Sarrus:

$$1 \cdot \left[(-16) + (-3) - [(-4) + 6]\right] + 2 \cdot \left[(-2) + 1 + (-6) - [3 + 1 + 4]\right] = -51$$

III) Método del pivote o de Chio

Si a los elementos de una fila o columna se suman los correspondientes de otras paralelas multiplicados por un número, el valor del determinante no varía. (Suma de una combinación lineal de otras filas o columnas)

Basándonos en esta propiedad, podemos obtener un determinante igual, pero con una fila o columna todos nulos salvo uno, que al aplicar el método anterior, se reduce su cálculo a un solo determinante de orden menor.

Ejemplo 1.17

Calcular por el método del pivote el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3^{a}\,\text{fila} - 1^{a}\,\text{fila} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= F_5 - F_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

desarrollamos el determinante por la 1ª columna:

$$1 \cdot A_{11} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

repito el proceso desarrollando el determinante por la ª columna:

$$(-1) \cdot A_{21} = (-1) \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = F_1 + F_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

y por último si aplico el proceso por la 3ª fila:

$$(-1) \cdot A_{31} = 1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

Antes de desarrollar el método siguiente, vamos a comentar las **propiedades** más singulares de los determinantes, para el cálculo del determinante:

Propiedades:

a) Si los elementos de una fila o columna son nulos el valor del determinante es nulo.

b) Un determinante con dos filas o columnas paralelas iguales es nulo.

c) Si un determinante tiene dos filas o columnas proporcionales su valor es nulo.

d) Si cambiamos dos filas o columnas el determinante cambia de signo.

e) Para multiplicar un número por un determinante se multiplica el número por los elementos de una fila o columna cualquiera.(En un determinante se puede sacar factor común, siempre que exista un número que multiplique a todos los elementos de una fila o columna)

f)

$$|A^t| = |A|$$
$$|\lambda \cdot A| = \lambda^n \cdot |A|$$
$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$
$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

IV) Método triangularizante

Cuando calculamos el determinante de matrices triangulares o diagonales observamos que se verifica que el resultado coincide con el producto de los elementos de la diagonal principal.

Con las propiedades anteriores podemos llegar a obtener un determinante que sea triangular y aplicar seguidamente el contenido expresado arriba:

Ejemplo 1.18

Calcular el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = F_3 - F_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = F_5 - F_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

cambiamos las filas 2ª y 3ª (cambia el signo)

$$-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = F_4 - F_3 = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= F_5 - F_4 = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

cambiamos 4ª y 5ª fila para dejarle triangular(el determinante cambia de signo):

$$= F_4 \leftrightarrows F_5 = (-)\cdot(-)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot 1\cdot(-2)\cdot 1 = 2$$

1.6 CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA DE UNA DADA

Dada una matriz cuadrada A_n se llama ***matriz adjunta****, $Adj(A_n)$ a la matriz que resulta de sustituir cada uno de los elementos de la matriz A_n por sus adjuntos respectivos.*

Ejemplo 1.19

Hallar la matriz adjunta de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ -10 & -4 & -2 \\ -7 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

Resultado:

$$\boxed{\mathbf{A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|}}}$$

$$\boxed{\textbf{\textit{Una matriz tiene inversa si y solo si}}\ \ \mathbf{|A| \neq 0}}$$

Ejemplo 1.20

Calcular la matriz inversa de $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

$$|A| = -14 \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ -10 & -4 & -2 \\ -7 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|}} = \frac{1}{-14} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ -10 & -4 & -2 \\ -7 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

1.7 MATRIZ ORTOGONAL

Definición: *Una matriz cuadrada es una matriz ortogonal si verifica*

$$A \cdot A^t = A^t \cdot A = I$$

Propiedades:

a) La inversa de una matriz ortogonal es su traspuesta y es ortogonal también:

Por definición se tiene :

$$A \cdot A^t = I \Leftrightarrow A^t = A^{-1}$$

$$(A^{-1}) \cdot (A^{-1})^t = A^t \cdot (A^t)^t = A^t \cdot A = I$$

$$(A^{-1})^t \cdot (A^{-1}) = (A^t)^t \cdot A^t = A \cdot A^t = I$$

b) El determinante de una matriz ortogonal vale **1 ó -1**

De $A \cdot A^t = I$ tomando determinantes:

$$|A \cdot A^t| = |I| \Rightarrow |A| \cdot |A^t| = |A|^2 = 1 \Rightarrow |A| = \pm 1$$

Ya que $|A^t| = |A|$

c) El producto de matrices ortogonales es ortogonal:

Sean A y B ortogonales: $A \cdot A^t = A^t \cdot A = I$ y $B \cdot B^t = B^t \cdot B = I$

$$(A \cdot B) \cdot (A \cdot B)^t = A \cdot B \cdot B^t \cdot A^t = A \cdot I \cdot A^t = A \cdot A^t = I$$

$$(A \cdot B)^t \cdot (A \cdot B) = B^t \cdot A^t \cdot A \cdot B = B^t \cdot I \cdot B = B^t \cdot B = I$$

1.8 MATRICES ELEMENTALES

1.8.1 Operaciones elementales

Definición 1:

Sobre una matriz $A_{n\times m}$ decimos que efectuamos una ***operación elemental*** *sobre una fila o columna, cuando realizamos cualquiera de estas transformaciones:*

i) *Cambiar entre sí dos filas o columnas : E_{ij}*

ii) Multiplicar una fila o columna por un número real $k \neq 0$: $E_i(k)$

iii)Sumar a la fila o columna i, la fila o columna j multiplicada por un número real $k \neq 0$: $E_{i,j}(k)$

Definición 2:

Se llama ***matriz elemental*** *a una matriz cuadrada, que resulta de efectuar una operación elemental sobre una fila o columna en la matriz identidad.*

Ejemplo 1.21

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow F_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_1 \quad \text{Cambiar dos filas}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow C_2(-3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2 \quad \text{Multiplicar la } 2^{a} \text{ columna por } (-3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow F_{3,2}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = E_3 \quad \text{Sumar a la } 3^{a} \text{ fila la } 2^{a} \text{ por } 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow C_{2,1}(-5) = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_4 \quad \text{Sumar a la } 2^{a} \text{ columna la } 1^{a} \text{ por } -5$$

Según el orden de la matriz unidad obtenemos una matriz elemental del mismo orden.

1.8.2 Teorema:

Si en una matriz A efectuamos una operación elemental por filas la matriz que obtenemos es E · A, donde E es la matriz elemental resultante de efectuar la misma operación elemental.

Si en una matriz A efectuamos una operación elemental por columnas la matriz que obtenemos es A · E, donde E es la matriz elemental resultante de efectuar la misma operación elemental.

Ejemplo 1.22

$$\text{Sea A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por filas:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to F_{2,1}(-2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz elemental obtenida al hacer la misma operación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to F_{2,1}(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Producto de E · A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por columnas:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to C_{2,1}(-2) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & 1 & -2 \\ 3 & -7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz elemental obtenida al hacer la misma operación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to C_{2,1}(-2) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Producto de $A \cdot E$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & 1 & -2 \\ 3 & -7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A partir de ahora, sólo consideraremos las matrices elementales resultado de efectuar operaciones elementales sobre las filas.

1.8.3 Operaciones elementales inversas

*Se llama **operación elemental inversa** aquella operación que nos anula la acción de cada operación elemental:*

Ejemplo 1.23

Sean las matrices elementales obtenidas como resultado de las siguientes operaciones elementales:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to F_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_1$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to F_2(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to F_{2,3}(-3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3$$

Existen otras operaciones sobre estas matrices elementales que nos anulan las operaciones anteriores y volvemos al punto de partida o sea a I_3.

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{F_{3,1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{F_2(\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{F_{2,3}(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

Estas operaciones se llaman ***operaciones inversas*** de las hechas en primer término.

Resumiendo:

OPERACIÓN ELEMENTAL	**OPERACIÓN INVERSA**
Cambiar la fila i por la j	Cambiar la fila j por la i
Multiplicar una fila por $k \neq 0$	Multiplicar una fila por $\frac{1}{k} \neq 0$
Sumar a la fila i, la j por $k \neq 0$	Sumar a la fila i, la j por $-k \neq 0$

1.8.4 Matrices elementales inversas

Cuando en la matriz I_n efectuamos una operación elemental obtenemos una ***matriz elemental*** E.

Cuando en la matriz I_n efectuamos la operación elemental inversa obtenemos la ***matriz elemental inversa*** de la matriz elemental E, E^{-1}.

Luego toda matriz elemental tiene inversa y es una matriz elemental

En efecto, cuando hacemos una operación elemental, obtenemos E y si efectuamos la operación elemental inversa sobre E volvemos al punto de partida I_n, luego se verifica:

$$I_n \longrightarrow \text{Operación elemental (E)} \longrightarrow \text{Operación inversa } (E_o) \longrightarrow I_n$$

$$E_o \cdot E \cdot I_n = E_o \cdot E = I_n$$
$$E \cdot E_o \cdot I_n = E \cdot E_o = I_n$$

Luego E_o es la inversa de E.

Ejemplo 1.24

Dadas las matrices elementales que se obtienen de realizar las operaciones elementales:

i) Cambiar las filas 1 y 3.
ii) Multiplicar la 2ª fila por 2.
iii) Sumar a la 2ª fila la 3ª por –3.

Hallar sus matrices inversas.

i) Matriz elemental que resulta de hacer la operación elemental F_{13}

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \mathbf{F_{13}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_1 \Leftrightarrow I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \mathbf{F_{3,1}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_1^{-1}$$

ii) Matriz elemental que resulta de hacer la operación elemental $F_2(2)$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \mathbf{F_2(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2 \Leftrightarrow I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \mathbf{F_2(\tfrac{1}{2})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2^{-1}$$

iii) Matriz elemental que resulta de hacer la operación elemental $F_{2,3}(-3)$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \mathbf{F_{2,3}(-3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3 \Leftrightarrow I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \mathbf{F_{2,3}(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3^{-1}$$

Ejemplo 1.25

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ hallar:

i) Las matrices elementales tales que $E_2 \cdot E_1 \cdot A = I$

ii) Las matrices elementales inversas de E_2 y E_1

iii) Escribir A como producto de matrices elementales.

iv) Escribir A^{-1} como producto de matrices elementales.

i) $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix} \to F_2(\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Leftrightarrow I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \to F_2(\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix} = E_1$

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \to F_{1,2}(1) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Leftrightarrow I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \to F_{1,2}(1) = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = E_2$$

luego:

$$E_2 \cdot E_1 \cdot A = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = I_2$$

ii) $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \to \mathbf{F_2(\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix} = E_1 \Leftrightarrow I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \to \mathbf{F_2(2)} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} = E_1^{-1}$

$$I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \to \mathbf{F_{1,2}(1)} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = E_2 \Leftrightarrow I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \to \mathbf{F_{1,2}(-1)} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = E_2^{-1}$$

iii)

$$E_2 \cdot E_1 \cdot A = I_2 \Leftrightarrow A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot I_2 = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1}$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

iv)

$$\mathbf{E_2 \cdot E_1 \cdot A = I_2} \Leftrightarrow E_2 \cdot E_1 \cdot A \cdot A^{-1} = I_2 \cdot A^{-1} \Leftrightarrow E_2 \cdot E_1 \cdot I_2 = A^{-1} \Leftrightarrow \mathbf{E_2 \cdot E_1 = A^{-1}}$$

$$\mathbf{A^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1.8.5 Matrices equivalentes por filas

*Si partiendo de una matriz A podemos llegar a otra B efectuando un número finito de operaciones elementales sobre las filas y, de la misma manera, podemos volver a A desde B, realizando las operaciones inversas y en orden inverso, se dice que **A y B son equivalentes por filas.***

$$E_k \cdot E_{k-1} \cdot \ldots\ldots\ldots\ldots E_2 \cdot E_1 \cdot A = B \Leftrightarrow A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot \ldots\ldots \cdot E_{k-1}^{-1} \cdot E_k^{-1} \cdot B$$

En efecto:

Si podemos llegar desde A a B por medio de operaciones elementales

$$E_k \cdot E_{k-1} \cdot \ldots\ldots\ldots\ldots E_2 \cdot E_1 \cdot A = B$$

Multiplicando por las matrices inversas obtenemos

$$E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot \ldots\ldots E_{k-1}^{-1} \cdot E_k^{-1} \cdot E_k \cdot E_{k-1} \cdot \ldots\ldots\ldots E_2 \cdot E_1 \cdot A = A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot \ldots\ldots - E_{k-1}^{-1} \cdot E_k^{-1} \cdot B$$

Si podemos llegar desde B a A por medio de operaciones elementales

$$E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot \ldots\ldots\ldots E_{k-1}^{-1} \cdot E_k^{-1} \cdot B = A$$

Multiplicando por las matrices elementales inversas obtenemos

$$E_k \cdot E_{k-1} \cdot \ldots\ldots\ldots E_2 \cdot E_1 \cdot E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot \ldots\ldots - E_{k-1}^{-1} \cdot E_k^{-1} \cdot B = B = \mathbf{E_k \cdot E_{k-1} \cdot \ldots\ldots\ldots E_2} \cdot \mathbf{E_1} \cdot A$$

Ejemplo 1.26

Demostrar que las matrices A y B son equivalentes por filas.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 3\\ 5 & -2 & 1\end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 0 & -1\\ 4 & -4 & -2\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 3\\ 5 & -2 & 1\end{pmatrix}\to F_{1,2}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 0 & -1\\ 5 & -2 & 1\end{pmatrix}\to F_{3,1}(-1)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 0 & -1\\ 4 & -4 & -2\end{pmatrix}=B$$

$$I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\to F_{1,2}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E_1$$

$$I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\to F_{3,1}(-1)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}=E_2$$

$$E_2\cdot E_1\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 3\\ 5 & -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 0 & -1\\ 4 & -4 & -2\end{pmatrix}=B$$

1.8.6 Cálculo de la matriz inversa por matrices elementales

Si A es equivalente por filas a la matriz I_n entonces A tiene inversa

En efecto: si A es equivalente por filas a I_n:

$$E_k\cdot E_{k-1}\cdot \ldots\ldots\ldots\ldots\, E_2\cdot E_1\cdot A = I_n \qquad \textbf{[1]}$$

Multiplicando por A^{-1} por la derecha los dos miembros obtenemos:

$$E_k\cdot E_{k-1}\cdot \ldots\ldots\, E_2\cdot E_1\cdot A\cdot A^{-1} = \mathbf{E_k}\cdot \mathbf{E_{k-1}}\cdot \ldots\ldots\, \mathbf{E_2}\cdot \mathbf{E_1}\cdot \mathbf{I_n} = I_n\cdot A^{-1} = \mathbf{A^{-1}} \qquad \textbf{[2]}$$

Luego A^{-1} viene como producto de matrices elementales.

El método para el cálculo de A^{-1} sale de observar **[1] y [2]**

$$\mathbf{E_k \cdot E_{k-1} \cdot \ldots\ldots\ldots\ldots E_2 \cdot E_1 \cdot A = I_n}$$

$$\mathbf{E_k \cdot E_{k-1} \cdot \ldots\ldots\ldots\ldots E_2 \cdot E_1 \cdot I_n = A^{-1}}$$

Las operaciones elementales que nos sirven para convertir A en la matriz unidad, efectuadas sobre la matriz unidad nos da la matriz inversa de A.

Ejemplo 1.27

Hallar la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to F_1(-1) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to F_{3,1}(-1) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to F_{3,2}(-1) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to F_3(\frac{1}{2}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\to F_{1,3}(1) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \to F_{1,2}(1) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

luego $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

1.9 FORMAS ESCALONADA Y REDUCIDA DE UNA MATRIZ

1.9.1 Forma escalonada

Se llama forma escalonada por filas de una matriz $A_{m\times n}$ a aquella matriz que se obtiene a partir de A mediante operaciones elementales y que verifica:

i) *Si tiene filas cuyos elementos son todos nulos, están en las filas inferiores.*

ii) *El primer elemento distinto de cero de una fila (empezando por la izquierda), se llama elemento pivote y a su columna, columna pivotal.*

iii) *Dadas dos filas sucesivas, el elemento pivote de la 2ª fila está más a la derecha que el elemento pivote de la 1ª fila.*

Ejemplo 1.28

Formas escalonadas:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 \\ 0 & \mathbf{3} \end{pmatrix};\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 4 & 5 \\ 0 & \mathbf{3} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} \mathbf{2} & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix};\begin{pmatrix} \mathbf{2} & 5 & 6 \\ 0 & \mathbf{1} & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

Formas no escalonadas:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

1.9.2 Forma reducida

Se llama forma reducida por filas de una matriz $A_{m\times n}$ a toda matriz escalonada con los pivotes unidad y los demás elementos de la columna del pivote, nulos.

Ejemplo 1.29

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 4 \end{pmatrix}$$

1.9.3 Obtención de una forma escalonada

El algoritmo para la obtención de una forma escalonada se llama eliminación de Gauss o gaussiana y consta de los siguientes pasos:

1º Partiendo de la izquierda, buscamos en la 1ª columna un elemento distinto de cero que llevaremos a la 1ª fila, si no le hay en la 1ª fila, (mediante operaciones elementales) y será el 1er pivote. Seguidamente con las operaciones elementales haremos ceros debajo del pivote.

2º Siguiendo a la derecha, buscamos en la 2ª columna un elemento distinto de cero en la 2ª fila o siguientes filas. Se opera para tener un 2ª pivote en la 2ª fila, si está en las siguientes filas. Seguidamente con las operaciones elementales haremos ceros debajo del 2ª pivote.

3º Seguimos sucesivamente moviéndonos hacia la derecha hasta no encontrar más pivotes.

Evidentemente, dependiendo de la manera de operar y el orden de actuación, obtendremos diferentes formas escalonadas (hay infinitas), mientras que la forma reducida solo hay una.

Ejemplo 1.30

Hallar la forma escalonada de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \to \left\{ \begin{array}{l} F_{2,1}(-1) \\ F_{3,1}(-2) \\ F_{4,1}(-1) \end{array} \right. = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 & -2 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \to F_{4,2} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{3} & -3 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \to F_{4,3}(-1) =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{3} & -3 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{5} \end{pmatrix}$$

1.9.4 Rango de una matriz

Llamaremos rango de una matriz el número de filas con algún elemento distinto de cero que hay en cualquier forma escalonada por filas o también el número de columnas pivotales que tiene.

Ejemplo 1.31

$$\text{rg}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 \\ 0 & \mathbf{3} \end{pmatrix} = 2 \ ; \ \text{rg}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 & -1 \\ 0 & \mathbf{-1} & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \ ; \ \text{rg}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{5} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

1.10 FACTORIZACIÓN L . U DE UNA MATRIZ

A partir del método de eliminación de Gauss, vamos a factorizar una matriz en producto de una triangular inferior unitaria **L** y otra triangular superior **U**,

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 \\ * & .. & 1 & 0 \\ * & ... & . & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & h & i \\ 0 & 0 & 0 & j \end{pmatrix}$$

Veremos también su aplicación a la resolución de determinantes.

Distinguimos tres casos:

1.10.1 Factorización $A = L \cdot U$ de una matriz regular

Veámoslo con un ejemplo:

$$\text{Sea la matriz } A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 1 & 1 \\ 4 & 13 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & -3 & 3 \\ -6 & -18 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para hallar la matriz triangular superior U transformaremos A en una matriz escalonada, triangular superior, mediante operaciones elementales:

1º paso

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 1 & 1 \\ 4 & 13 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & -3 & 3 \\ -6 & -18 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} E_{2,1}(-2) \\ E_{3,1}(1) \\ E_{4,1}(3) \end{cases} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Comprobemos que hacer una operación elemental sobre las filas de A, es lo mismo que multiplicar por la izquierda a la matriz A, por la matriz elemental que resulta de hacer esa operación elemental sobre I :

$$E_k \cdot E_{k-1} \cdot \ldots\ldots E_2 \cdot E_1 \cdot A = U \qquad (*)$$

En nuestro ejemplo:

$$E_{2,1}(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; E_{3,1}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; E_{4,1}(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E_{4,1}(3) \cdot E_{3,1}(1) \cdot E_{2,1}(-2) \cdot A} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Despejando A de la ecuación **(*)**, dado que las matrices elementales tienen inversa, tendremos :

$$A = (E_k \cdot E_{k-1} \cdot .....E_2 \cdot E_1)^{-1} \cdot U = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U} \; ; \quad L = (E_k \cdot E_{k-1} \cdot .....E_2 \cdot E_1)^{-1} =$$

$$\mathbf{E}_1^{-1} \cdot \mathbf{E}_2^{-1} \cdot .... \cdot \mathbf{E}_k^{-1}$$

$$E_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ .... & 1 & 0 & 0 \\ m_i & ... & 1 & 0 \\ ... & ... & ...... & 1 \end{pmatrix} \qquad E_i^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ .... & 1 & 0 & 0 \\ -m_i & ... & 1 & 0 \\ ... & ... & ...... & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz triangular inferior L se puede calcular mediante el siguiente algoritmo, sin necesidad de realizar los productos de las inversas de E_i:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & * & 1 & 0 \\ -3 & * & * & 1 \end{pmatrix}$$ donde los multiplicadores {-2, 1, 3 } se han cambiado de signo y colocados en la primera columna.

2º paso

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} E_{3,2}(1) \\ E_{4,2}(2) \end{cases} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & * & 1 \end{pmatrix}$$ donde los multiplicadores {1, 2 } se han cambiado de signo y colocados en la segunda columna.

3º paso

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{4,3}(4) = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$ donde el multiplicador$\{ 4 \}$ se han cambiado de signo y colocado en la tercera columna.

Luego ya tenemos:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 1 & 1 \\ 4 & 13 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & -3 & 3 \\ -6 & -18 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 8 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$$

Factorización de forma **única** para toda matriz que cumpla los requisitos de salida, es decir para matrices regulares y sin intercambios.

1.10.1 Factorización $\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$ de una matriz regular con intercambios

En el supuesto que la matriz tenga un cero en la posición deseada para alguno de los pivotes (recordemos que estos no pueden ser nulos), necesitaremos hacer una permutación de filas para evitar ese cero, de forma que introduciremos una matriz elemental $E_{i,j} = P$ que resulta de hacer esa operación elemental sobre I. El efecto sobre L es la permutación, simultáneamente, de los multiplicadores.

Veámoslo con un ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & -6 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} E_{2,1}(2) \\ E_{3,1}(-2) \end{cases} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{2,3}(P) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

$$\mathbf{L}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow \textit{despues de la permutación } P\Rightarrow L=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.32

$$\text{Factorizar A}=\begin{pmatrix}0&0&3\\2&4&-1\\6&5&5\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}0&0&3\\2&4&-1\\6&5&5\end{pmatrix}\Rightarrow \mathrm{E}_{2,1}(\mathrm{P}_1)=\begin{pmatrix}2&4&-1\\0&0&3\\6&5&5\end{pmatrix}\Rightarrow \mathrm{E}_{3,1}(-3)=\begin{pmatrix}2&4&-1\\0&0&3\\0&-7&8\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{L}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&*&1\end{pmatrix}\Rightarrow \textit{despues de la permutación } P_1\Rightarrow L=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&*&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&4&-1\\0&0&3\\0&-7&8\end{pmatrix}\Rightarrow \mathrm{E}_{2,3}(\mathrm{P}_2)=\begin{pmatrix}2&4&-1\\0&-7&8\\0&0&3\end{pmatrix}=\mathbf{U}$$

$$\mathbf{L}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&*&1\end{pmatrix}\Rightarrow E_{2,3}(P_2)\Rightarrow \mathbf{L}=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\ \text{y}\ \ \mathbf{P}=\mathbf{P_2}\cdot\mathbf{P_1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

En este caso, el resultado de la factorización **no es única** ya que existen varias matrices de permutación para hacer la descomposición.

1.10.2 Factorización de Cholesky: $\mathbf{A}=\mathbf{C}\cdot\mathbf{C}^t$

Es un caso particular para matrices simétricas y con pivotes positivos (matrices definidas positivas) resultando entonces que la factorización es en una matriz por su traspuesta.

Ejemplo 1.33

$$\text{Factorizar según Cholesky la matriz: A}=\begin{pmatrix}4&8&16\\8&20&44\\16&44&109\end{pmatrix}$$

Se basa en hallar U como una matriz escalonada pero reduciendo los pivotes en su raíz cuadrada en cada eliminación gaussiana en las columnas. Usaremos un algoritmo que simplifica su obtención:

i) Dividimos la 1ª fila por la raíz del primer pivote y reducimos la 1ª columna a ceros menos el pivote:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{4} & 8 & 16 \\ 8 & 20 & 44 \\ 16 & 44 & 109 \end{pmatrix} \Rightarrow E_1\left(\frac{1}{\sqrt{4}}\right)=\begin{pmatrix} \mathbf{2} & 4 & 8 \\ 8 & 20 & 44 \\ 16 & 44 & 109 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} E_{2,1}(-4) \\ E_{3,1}(-8) \end{cases} \Rightarrow$$

$$=\begin{pmatrix} \mathbf{2} & 4 & 8 \\ 0 & \mathbf{4} & 12 \\ 0 & 12 & 45 \end{pmatrix}$$

ii) Dividimos la 2ª fila por la raíz del 2º pivote y reducimos por debajo del pivote a ceros:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & 4 & 8 \\ 0 & \mathbf{4} & 12 \\ 0 & 12 & 45 \end{pmatrix} \Rightarrow E_2\left(\frac{1}{\sqrt{4}}\right)=\begin{pmatrix} \mathbf{2} & 4 & 8 \\ 0 & \mathbf{2} & 6 \\ 0 & 12 & 45 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{3,2}(-6)=\begin{pmatrix} \mathbf{2} & 4 & 8 \\ 0 & \mathbf{2} & 6 \\ 0 & 0 & \mathbf{9} \end{pmatrix}$$

iii) Dividimos la 3ª fila por la raíz del 3er pivote:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & 4 & 8 \\ 0 & \mathbf{2} & 6 \\ 0 & 0 & \mathbf{9} \end{pmatrix} \Rightarrow E_3\left(\frac{1}{\sqrt{9}}\right)=\begin{pmatrix} \mathbf{2} & 4 & 8 \\ 0 & \mathbf{2} & 6 \\ 0 & 0 & \mathbf{3} \end{pmatrix}=\mathbf{C}^t \;;\; \mathbf{C}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 8 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 4 & 8 & 16 \\ 8 & 20 & 44 \\ 16 & 44 & 109 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 8 & 6 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}=\mathbf{C}\cdot\mathbf{C}^t$$

Ejemplo 1.34

Calcular el valor del determinante de la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 8 & 1 & 1 \\ 4 & 13 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & -3 & 3 \\ -6 & -18 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Como sabemos la matriz A se puede factorizar (pag. 34)

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 8 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=L\cdot U$$

Luego:

$$|A|=|L|\cdot|U|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -4 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 8 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=1\cdot 12=12$$

Por ser matrices triangulares su determinante es el producto de los elementos de la diagonal.