PROBLEMAS RESUELTOS DE MATRICES Y DETERMINANTES

1) Calcular el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 & 5 \\ 4 & 7 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

Un determinante de orden 2 se obtiene muy fácilmente restando el producto de la diagonal principal menos el de la secundaria. Para orden 3, podemos aplicar la Regla de Sarrus. Pero para dimensiones superiores no hay una regla cómoda; aplicamos el Teorema que nos permite calcularlo multiplicando cada elemento de una línea cualquiera (fila o columna) por su adjunto respectivo y sumando los resultados (esto es, *desarrollar por adjuntos de una fila o columna*).

Para no hacer demasiados cálculos, simplificamos el determinante consiguiendo ceros en todas las posiciones de una misma línea (fila o columna) salvo una. Lo hacemos sumando a una fila (columna) otra multiplicada por un número adecuado, lo que no provoca cambios en el valor del determinante. Para ello, nos ayuda mucho localizar un 1 ó –1. Pero en este determinante no hay ninguno.

Una forma fácil de hacerlo es similar al procedimiento de triangularizar una matriz por Gauss. Elegimos una línea cualquiera. En este caso, vamos a hacerlo con la columna 3. Usando el 3 que está en la fila 1 de dicha columna, vamos a conseguir 0 en las restantes posiciones de la columna.

Para conseguir 0 donde está el $2 = a_{23}$, sustituimos la F_2 por el resultado de multiplicar la fila F_2 por un número y la fila F_1 por otro, de manera que ambos resultados sean idénticos (dicho resultado será el mcm de $a_{13} = 3$ y de $a_{23} = 2$); pero en uno queremos el resultado positivo y en el otro, negativo. Si alguno de los números por los que multiplicamos estas filas debe ser negativo, será el de la fila que *no* vamos a sustituir (F_1). La operación la escribimos colocando, en primer lugar, la fila a sustituir. Así, en este caso, haremos $3F_2 - 2F_1$.

Pero, al hacer esto, no estamos sumando a una fila (la F_2) una combinación lineal de otras, sino que lo hacemos al *triple* de esta fila. Así, como una fila del determinante ha sido multiplicada por 3, todo el determinante ha quedado multiplicado por 3. Para compensarlo, el resultado debe ser multiplicado por 1/3.

Procedemos del mismo modo con los elementos de la F_3 y F_4 dentro de la columna elegida (C_3). Así, la operación resultante es:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 & 5 \\ 4 & 7 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 3F_2 - 2F_1 \\ 3F_3 - 4F_1 \\ F_4 - F_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 & 5 \\ 6 & 25 & 0 & 5 \\ 6 & 17 & 0 & -11 \\ 2 & 6 & 0 & -2 \end{vmatrix} =$$

Desarrollando por adjuntos de C_3 y calculando por *Sarrus* el determinante de orden 3 resultante:

$$= \frac{1}{9}3\begin{vmatrix} 6 & 25 & 5 \\ 6 & 17 & -11 \\ 2 & 6 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}(-204 - 550 + 180 - 170 + 300 + 396) = \boxed{-16}$$

Veamos otra posibilidad para cuando nos encontremos en esta situación. Podemos usar la propiedad de los determinantes que permite sacar factor común de una sola fila o columna, y dicho factor multiplica al determinante completo. También dice, la misma propiedad, que un factor que multiplica a un determinante podemos introducirlo en el mismo multiplicando a una sola de las líneas (fila o columna).
Usando dicha propiedad, vamos a sacar 2 factor común de la primera fila, con lo que logramos un –1 en la columna 2 de dicha fila. Así, resulta:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 & 5 \\ 4 & 7 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3/2 & -1 & 3/2 & 5/2 \\ 4 & 7 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} =$$

Al hacer esto, introducimos fracciones. Pero usando la propiedad anterior vamos a eliminarlos. Multiplicamos por 2·1/2, es decir, por 1, con lo que el resultado es igual a lo que teníamos. Pero este nuevo 2 lo introducimos multiplicando a la columna 1, con lo que desaparece la fracción en dicha columna:

$$= 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\begin{vmatrix} 3/2 & -1 & 3/2 & 5/2 \\ 4 & 7 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & -1 & 3/2 & 5/2 \\ 8 & 7 & 2 & 5 \\ 12 & 3 & 4 & 3 \\ 10 & 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3/2 & 5/2 \\ 8 & 7 & 2 & 5 \\ 12 & 3 & 4 & 3 \\ 10 & 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} =$$

Repetimos el proceso para C_3 y C_4:

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\begin{vmatrix} 3 & -1 & 3/2 & 5/2 \\ 8 & 7 & 2 & 5 \\ 12 & 3 & 4 & 3 \\ 10 & 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 & 5/2 \\ 8 & 7 & 4 & 5 \\ 12 & 3 & 8 & 3 \\ 10 & 4 & 6 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 & 5/2 \\ 8 & 7 & 4 & 5 \\ 12 & 3 & 8 & 3 \\ 10 & 4 & 6 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 & 5 \\ 8 & 7 & 4 & 10 \\ 12 & 3 & 8 & 6 \\ 10 & 4 & 6 & 6 \end{vmatrix} =$$

A continuación efectuamos las transformaciones lineales en la C_2 usando la F_1 y desarrollamos por adjuntos de la C_1 y, después, por Sarrus ayudados de calculadora:

$$\begin{pmatrix} F_2 + 7F_1 \\ F_3 + 3F_1 \\ F_4 + 4F_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 & 5 \\ 29 & 0 & 25 & 45 \\ 21 & 0 & 17 & 21 \\ 22 & 0 & 18 & 26 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}[-(-1)]\begin{vmatrix} 29 & 25 & 45 \\ 21 & 17 & 21 \\ 22 & 18 & 26 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}(-64) = \boxed{-16}$$

2) *(Selectividad MII)* Sea C la matriz que depende de un parámetro m, dada por

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & m \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 17 \end{pmatrix}$$

a) ¿Para qué valores del parámetro m no tiene inversa la matriz C?

Una matriz tiene inversa si, y sólo si su determinante es distinto de cero. Veamos cuándo ocurre.

$$det(C) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & m \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 17 \end{vmatrix} \overset{\boxed{C_3+C_1}}{=} \begin{vmatrix} 2 & -1 & m+2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 15 \end{vmatrix} \overset{\boxed{\text{Adj de } F_2}}{=} -1\cdot\begin{vmatrix} -1 & m+2 \\ 1 & 15 \end{vmatrix} \overset{\boxed{F_1+F_2}}{=}$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & m+17 \\ 1 & 15 \end{vmatrix} = m+17$$

Se han aplicado propiedades de determinantes, pero también podía haberse desarrollado por la regla de Sarrus. Según eso, el determinante vale 0 si m = –17. Por tanto, no existe matriz inversa si, y sólo si m = –17.

b) Calcula la matriz inversa de C para m = 2

Si $m = 2 \Rightarrow |C| = 19$ y existe C^{-1}.

$$Adj(C) = \begin{vmatrix} 1 & -15 & 1 \\ 19 & 38 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow C^{-1} = \frac{1}{19}[Adj(C)]^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{19} & 1 & \frac{1}{19} \\ -\frac{15}{19} & 2 & \frac{4}{19} \\ \frac{1}{19} & 0 & \frac{1}{19} \end{pmatrix}$$

3) Resolver el siguiente sistema matricial: $\left.\begin{array}{r} 3X+Y=A \\ X-2Y=B \end{array}\right\}$, siendo $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\varepsilon_1\cdot 2$: $\left.\begin{array}{r} 6X+2Y=2A \\ X-2Y=B \end{array}\right\}$ Sumando las dos ecuaciones:

$$7X = 2A + B \Rightarrow X = \frac{1}{7}(2A+B) = \frac{1}{7}\left[\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{5}{7} \\ \frac{3}{7} & -1 \end{pmatrix}$$

$\varepsilon_2\cdot(-3)$: $\left.\begin{array}{r} 3X+Y=A \\ -3X+6Y=-3B \end{array}\right\}$ Sumando las dos ecuaciones:

$$7Y = A-3B \Rightarrow Y = \frac{1}{7}(A-3B) = \frac{1}{7}\left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & -9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{8}{7} \\ -\frac{2}{7} & 0 \end{pmatrix}$$

4) *(Selectividad MII)* El determinante $\begin{vmatrix} 2 & a & 5 \\ 4 & a^2 & 13 \\ 8 & a^3 & 35 \end{vmatrix}$ vale cero para a = 3. Comprueba esta afirmación sin desarrollarlo e indicando las propiedades de los determinantes que apliques.

Para a = 3, la tercera columna es suma de las dos primeras, por lo que el determinante vale cero (la tercera columna es combinación lineal de las otras dos).

5) *(Selectividad 2.005)* Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Halle la matriz X que verifique $A \cdot B \cdot X = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Llamamos $C = A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} -2\cdot1 - 1\cdot2 + 1(-2) & -2(-1) - 1\cdot0 + 1\cdot1 \\ -1\cdot1 + 0\cdot2 + 1(-2) & -1(-1) + 0\cdot0 + 1\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Entonces, $|C| = \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -12-(-9) = -12+9 = -3$ y $C^t = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ por lo que:

$Adj(C^t) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$. Entonces:

$$C^{-1} = \frac{1}{|C|} Adj(C^t) = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pues bien: $A \cdot B \cdot X = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow C \cdot X = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ Multiplicando, a la izquierda, los dos miembros de esta ecuación por C^{-1}:

$C^{-1} \cdot C \cdot X = C^{-1}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow I_2 \cdot X = C^{-1}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, donde I_2 es la matriz identidad 2x2 $\Rightarrow$

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}4 + 1\cdot2 \\ -1\cdot4 + 2\cdot2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{3} + 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{3} + \frac{6}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

6) (*Batería de Selectividad 2.004)* Sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\ \text{ y }\ C=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

a) Calcule $(A-I_2)\cdot B$, siendo I_2 la matriz identidad de orden 2.

$$(A-I_2)\cdot B = \left[\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}0 & 2 & -4\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}$$

b) Obtenga la matriz B^t (matriz traspuesta de *B*) y calcule, si es posible, $B^t\cdot A$.

$B^t = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Es posible efectuar el producto $B^t\cdot A$, porque B^t es de dimensión 3 x 2 y *A* es 2 x 2 (coincide el nº de columnas de la primera matriz con el de filas de la segunda):

$$B^t\cdot A = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$$

c) Calcule la matriz *X* que verifica $A\cdot X+B=C$.

$A\cdot X+B=C \Rightarrow A\cdot X = C-B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(C–B) \Rightarrow I_2X = A^{-1}(C–B) \Rightarrow$

$\Rightarrow X = A^{-1}(C–B)$.

Calculemos A^{-1}. En primer lugar, comprobamos que existe, calculando su determinante:

$|A| = –2$. Como es no nulo, existe A^{-1}.

$$A^t = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$X = A^{-1}(C–B) = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 3 & -3\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\ -1 & 5/2 & -2\end{pmatrix}$$

7) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 0\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}2 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$

a) Indique los productos matriciales que pueden efectuarse entre ellas, sin repetir factores.

Como las dimensiones son:

dim(*A*) = 3x2 dim(*B*) = 2x2 dim(*C*) = 2x3

Se pueden hacer (indicamos la dimensión entre paréntesis):

A·*B* (3x2), *A*·*C* (3x3), *B*·*C*(2x3)

C·*A* (2x2)

Y no se pueden hacer $B{\cdot}A$ ni $C{\cdot}B$, porque no coincide el número de columnas de la primera matriz con el número de filas de la segunda.

b) Calcule $B + C{\cdot}A$

$$B+C\cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

c) Calcule el determinante de $A{\cdot}C$. ¿Tiene inversa $A{\cdot}C$? En caso afirmativo, calcularla; en caso negativo, calcular la inversa de B, suponiendo que exista.

$$A\cdot C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Su determinante vale 0, porque tiene una columna de ceros (la tercera). Por tanto, no tiene inversa. Calculamos, entonces, la inversa de B.

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2–6 = –4 \quad \Rightarrow \quad \exists B^{-1}$$

$$B^t = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{Adj}(B^t) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$B^{-1} = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 & 3/4 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

8) a) *(Junio 2.001)* Determine los valores de x e y que hacen cierta la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Realizamos los productos matriciales indicados:

$$\begin{pmatrix} x-y \\ 3x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2x \\ 3y-2 \end{pmatrix}$$

Para que las dos matrices sean iguales, deben serlo componente a componente:

$$\begin{cases} x-y = 3+2x \\ 3x+2y = 3y-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x-y = 3 \\ 3x-y = -2 \end{cases} \Rightarrow \quad F_2 + 3F_1 : \begin{cases} -x-\ \ y = 3 \\ \quad -4y = 7 \end{cases} \Rightarrow$$

(Segunda ecuación): $y = –7/4 \Rightarrow$ (Sustituyendo en la 1ª): $–x + 7/4 = 3 \Rightarrow$
(Multiplicando por 4 los dos miembros): $–4x + 7 = 12 \Rightarrow 7–12 = 4x \Rightarrow$
$\Rightarrow –5 = 4x \Rightarrow x = –5/4$

Es decir, los valores solicitados son: $\boxed{x = –5/4 \text{ con } y = –7/4}$.

b) Determine la matriz X de dimensión 2x2 tal que:

$$X\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

X es una matriz, que intentaremos despejar realizando operaciones matriciales. De momento, multiplicamos 2 por la segunda matriz:

$$X\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}$$

Sumando la segunda matriz a ambos miembros de la ecuación:

$$X\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 5 & 1\end{pmatrix}$$

Si multiplicamos por la derecha los dos miembros de la ecuación por la inversa de la matriz primera:

$$X=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}^{-1}$$

Calculemos dicha matriz inversa, si existe. Llamémosla A:

$|A| = \begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{vmatrix} = 5–6 = –1 \;\Rightarrow\; \exists A^{-1}$ (el determinante es no nulo)

$$A^t=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \mathrm{Adj}(A^t)=\begin{pmatrix}5 & -3\\ -2 & 1\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; A^{-1}=-\frac{1}{1}\begin{pmatrix}5 & -3\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$X=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & -5\\ -23 & 14\end{pmatrix}$$

9) *(Propuesta para Select. 2.005)* Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}x & y\\ -y & x\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

a) Calcule, si existe, la matriz inversa de B.

Como $|B| = 0–2 = –2$ es no nulo, existe la inversa de B.

$$B^t=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \mathrm{Adj}(B^t)=\begin{pmatrix}0 & -2\\ -1 & -1\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; B^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -2\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}$$

b) Si $A\cdot B = B\cdot A$ y $A + A^t = 3\cdot I_2$, calcule x e y.

La primera igualdad equivale a:

$$\begin{pmatrix}x & y\\ -y & x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ -y & x\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}-x+y & 2x\\ y+x & -2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x-2y & -y+2x\\ x & y\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}-x+y=-x-2y\\ 2x=-y+2x\\ y+x=x\\ -2y=y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=2y \Rightarrow 0=2y-y \Rightarrow 0=y\\ 0=-y \Rightarrow 0=y\\ y=0\\ 0=3y \Rightarrow 0=y\end{cases}$$

Es decir, sólo con que $y = 0$ se verifica la igualdad matricial.

La segunda es:

$$\begin{pmatrix}x & y\\ -y & x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x & -y\\ y & x\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}2x & 0\\ 0 & 2x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}2x=3\\ 2x=3\end{cases} \Rightarrow x=3/2$$

(Hemos igualado sólo las posiciones de las dos matrices que diferían)

Luego la solución es: $\boxed{x=\frac{3}{2},\, y=0}$

10) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Encuentre el valor o valores de x de forma que $B^2 = A$.

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Para que esta matriz coincida con A, ambas deben tener todas las posiciones iguales:

$$\begin{cases} x = 1 \\ 1 = 1 \\ 1 = 1 \\ x+1 = 2 \end{cases} \quad \text{lo que sucede si, y sólo si } \boxed{x = 1}.$$

Recalcar que todas las ecuaciones deben cumplirse *a la vez*. Por tanto, el problema podría no haber tenidos solución, en el caso de que, por ejemplo la cuarta ecuación hubiera proporcionado $x = 2$ mientras que la primera nos dice que $x = 1$.

b) Igualmente para que $A - I_2 = B^{-1}$.

Hallemos la matriz inversa de B.

$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$; $B^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Adj(B^t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|} Adj(B^t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Por otro lado (I_2 es la matriz identidad de orden 2):

$$A - I_2 = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$$

Para que ambas matrices coincidan, todas sus posiciones deben ser iguales:

$$\begin{cases} -1 = x-1 \\ 1 = 1 \\ 1 = 1 \\ 0 = x \end{cases} \quad \text{lo que sucede si, y sólo si } \boxed{x = 0}.$$

c) Determine x para que $A \cdot B = I_2$.

Como $A \cdot B = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+1 \\ x+1 & x+2 \end{pmatrix}$, esta matriz coincidirá con I_2 si, y sólo si: $\begin{cases} 1 = 1 \\ x+1 = 0 \\ x+1 = 0 \\ x+2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x = -1}$.

11) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} -x \\ 2 \\ z \end{pmatrix}$.

a) Determine la matriz inversa de A.

Para que exista A^{-1}, debe ser $|A| \neq 0$. Como $|A| = 1$ (como se ve inmediatamente por Sarrus), existe la inversa de A.

$$A^{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Adj}(A^{T}) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{Adj}(A^{T}) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Halle los valores de x, y, z para los que se cumple $A \cdot X = Y$.

$$A \cdot X = Y \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 2 \\ z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{c} x - 2y - 2 = -x \\ y = 2 \\ -x + 3y = z \end{array}\right\}$$

La ecuación central ya nos ha proporcionado el valor de y. Sustituyendo en la primera y tercera:

$$\left.\begin{array}{c} x - 4 - 2 = -x \\ -x + 6 = z \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{c} 2x - 6 = 0 \\ -x + 6 = z \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} x = 3 \\ -3 + 6 = z \Rightarrow 3 = z \end{array}$$

Luego las soluciones son: $x = 3$, $y = 2$, $z = 3$.

12) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcule los valores de a y b para que $A \cdot B = B \cdot A$.

Se tiene que:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 3a & 3b \end{pmatrix} \qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b & 2a \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$$

Para que ambas matrices sean iguales, deben serlo posición a posición:

$$\begin{cases} 12 = 3b & \Rightarrow \quad b = 4 \\ 2 = 2a & \Rightarrow \quad a = 1 \\ 3a = 3 & \Rightarrow \quad a = 1 \\ 3b = 12 & \Rightarrow \quad b = 4 \end{cases}$$

Luego todo ocurre simultáneamente si $\boxed{a = 1 \text{ y } b = 4}$.

b) Para $a = 1$ y $b = 0$, resuelva la ecuación matricial $X \cdot B - A = I_2$.

Tenemos que:

$$X \cdot B - A = I_2 \;\Rightarrow\; X \cdot B - A + A = I_2 + A \;\Rightarrow\; X \cdot B = I_2 + A \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; X \cdot B \cdot B^{-1} = (I_2 + A) \cdot B^{-1} \;\Rightarrow\; X = (I_2 + A) \cdot B^{-1}$$

Para $a = 1$ y $b = 0$:

$$I_2 + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $|B| = 1 - 0 = 1$, por lo que existe su inversa (la condición para que exista la inversa de una matriz es que sea regular, es decir, que su determinante sea no nulo). La calculamos:

$$B^{t} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz resultante de sustituir cada elemento por su menor complementario es: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$. Cambiando en ella los signos de las posiciones necesarias (moviéndonos, bien horizontal, bien verticalmente, cambiamos una *no* y otra *si*, empezando por *no* en la esquina superior izquierda):

$$\mathrm{Adj}(B^{t}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad B^{-1} = \frac{1}{|B|}\mathrm{Adj}(B^{t}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$\boxed{X = (I_2 + A)\cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}}$$

13) (Sobr 07) Sea A la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3.

a) Calcula los valores de λ para los que el determinante de $A - 2I$ es cero.

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda - 2 & -5 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculemos su determinante. Desarrollamos por adjuntos de la segunda columna, y queda lo siguiente (desarrollar por adjuntos tiene la ventaja de que el resultado suele estar factorizado; por Sarrus quedaría una ecuación de tercer grado en λ, que habría que resolver descomponiendo por Ruffini):

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda - 2 & -5 \\ \lambda & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 1)$$

Para que este determinante valga cero, igualando el resultado obtenido a cero nos queda una ecuación ya factorizada. Para que un producto se anule, alguno de los factores debe valer 0, por lo que:

$$\begin{cases} \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \\ ó \\ \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = -1 \text{ ó } \lambda = 1 \end{cases}$$

b) Calcula la matriz inversa de $A - 2I$ para $\lambda = -2$.

Este valor no es ninguno de los que anula el determinante de la matriz, por lo que tiene inversa. Si llamamos $B = A - 2I$, entonces, sabemos que $B^{-1} = \frac{1}{|B|}\mathrm{Adj}(B^{t})$.

Pues bien: $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -5 & -4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ = – 4 + 16 = 12, por Sarrus.

Tenemos que $B^t = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

Sustituyendo cada elemento por su menor complementario, nos queda:

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 \\ -15 & -3 & -15 \\ -8 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Aplicando los signos que convierten los menores complementarios en adjuntos, obtenemos:

$$\text{Adj}(B^t) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 \\ 15 & -3 & 15 \\ -8 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Por consiguiente, $B^{-1} = \dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 \\ 15 & -3 & 15 \\ -8 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & -2/3 \\ 5/4 & -1/4 & 5/4 \\ -2/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$.

14) (Sobr 05) Sea I la matriz identidad de orden 3 y sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}$.

a) Determina el valor de b para el que $A^2 - 2A + I = O$.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -b \\ -2 & 1 & -b \\ b & 0 & -1+b^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 2A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -b \\ -2 & 1 & -b \\ b & 0 & -1+b^2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -b+2 \\ 0 & -1 & -b+2 \\ b-2 & 0 & -1+b^2-2b \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 2A + I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -b+2 \\ 0 & -1 & -b+2 \\ b-2 & 0 & -1+b^2-2b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -b+2 \\ 0 & 0 & -b+2 \\ b-2 & 0 & b^2-2b \end{pmatrix}$$

Para que coincida con la matriz nula de orden 3, cuyas posiciones valen 0 todas, debe ocurrir:

$$\begin{cases} -b+2=0 \\ b-2=0 \\ b^2-2b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2=b \\ b=2 \\ b(b-2)=0 \Rightarrow b=0 \text{ ó } b=2 \end{cases}$$

Las tres condiciones deben suceder simultáneamente, por lo que sólo $\boxed{b = 2}$ es solución válida.

b) Para $b = 2$ halla la matriz X que cumple que $A\cdot X - 2A^t = O$, donde A^t denota la matriz transpuesta de A.

Para $b = 2$, se tiene que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Desarrollando por adjuntos de la fila 1, obtenemos que $|A| = -1\ (0 - 1) = 1$, con lo que A es una matriz regular, es decir, que existe su matriz inversa. Por otra parte,

$$A\cdot X - 2A^t = O \;\Rightarrow\; A\cdot X - 2A^t + 2A^t = O + 2A^t \;\Rightarrow\; A\cdot X = 2A^t \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot 2A^t \;\Rightarrow\; I\cdot X = 2A^{-1}\cdot A^t \;\Rightarrow\; X = 2A^{-1}\cdot A^t$$

Calculamos la inversa de A. Se tiene que:

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sustituimos cada elemento por su menor complementario:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \mathrm{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, según lo anterior:

$$X = 2A^{-1}\cdot A^t = 2\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -1 & -3 & 4 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 8 \\ -2 & -2 & 6 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

15) (Sobr 06) Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & m-3 & 3 \\ m+1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determina los valores del parámetro $m \in \mathbb{R}$ para los que la matriz A tiene inversa.

Una matriz tiene inversa si su determinante es no nulo. Como:

$$|A| = 3m + 3 + (m - 3)(m + 1) - 6 = 3m - 3 + m^2 - 3m + m - 3 = m^2 + m - 6 = 0 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; m = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \left\langle \begin{array}{l} = \dfrac{-1-5}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3 \\ = \dfrac{-1+5}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \end{array} \right.$$

entonces, $\exists A^{-1} \;\Leftrightarrow\; m \neq -3$ y $m \neq 2$.

b) Para $m = 0$ y siendo $X = (x \;\; y \;\; z)$, resuelve $X \cdot A = (3 \;\; 1 \;\; 1)$.

Éste es uno de los valores para los que existe inversa. Entonces, multiplicando dicha ecuación matricial por A^{-1} por la derecha en ambos miembros, queda:

$$X \cdot A \cdot A^{-1} = (3 \;\; 1 \;\; 1)\cdot A^{-1} \;\Rightarrow\; X \cdot I = (3 \;\; 1 \;\; 1)\cdot A^{-1} \;\Rightarrow\; X = (3 \;\; 1 \;\; 1)\cdot A^{-1}$$

Calculemos A^{-1} para $m = 0$, para el cual:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Pues bien. Se tiene que: $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Sustituyendo cada elemento por su menor complementario tenemos la matriz:

$$\begin{pmatrix} -6 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Como $|A| = 3 - 3 - 6 = -6$, se tiene que:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}(A^t) = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -6 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, $X = -\frac{1}{6}(3 \quad 1 \quad 1)\begin{pmatrix} -6 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}(-12 \quad -6 \quad -6) = \boxed{(2 \quad 1 \quad 1)}$

16) (Sobr 03) Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Siendo I la matriz identidad de orden 3, calcula los valores de λ para los que la matriz $A + \lambda I$ no tiene inversa.

Observamos que en la matriz A, al sumar las tres filas obtenemos el mismo resultado.

$$A + \lambda I = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 1+\lambda & -2 \\ 1 & -2 & -2+\lambda \end{pmatrix}$$

La inversa no existirá cuando su determinante sea cero. Calculémoslo. Como al sumar las tres filas obtenemos el mismo resultado, usamos un procedimiento estándar para obtener su determinante. Sumamos a la fila 1 la suma de las filas 2 y 3:

$$|A + \lambda I| = \begin{vmatrix} -3+\lambda & -3+\lambda & -3+\lambda \\ -2 & 1+\lambda & -2 \\ 1 & -2 & -2+\lambda \end{vmatrix} = (-3+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1+\lambda & -2 \\ 1 & -2 & -2+\lambda \end{vmatrix} =$$

A las columnas 2 y 3 les resto la primera:

$$= (-3+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3+\lambda & 0 \\ 1 & -3 & -3+\lambda \end{vmatrix} = (-3+\lambda)(3+\lambda)(-3+\lambda) = 0 \quad \boxed{\Leftrightarrow \quad \lambda = -3 \text{ ó } \lambda = 3}.$$

17) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$.

a) Determina la matriz $B = A^2 - 2A$.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1-\lambda \\ 1+\lambda & -1+\lambda^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1-\lambda \\ -1+\lambda & \lambda^2-2\lambda-1 \end{pmatrix}$$

b) Determina los valores de λ para los que la matriz B tiene inversa.

Veamos cuándo se anula su determinante:

$$|B| = -2\lambda^2 + 4\lambda + 2 + 1 - \lambda - \lambda + \lambda^2 = -\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \left\langle \begin{matrix} = 3 \\ = -1 \end{matrix} \right.$$

Por tanto, B tiene inversa para todos los valores de λ distintos de 3 y de -1.

c) Calcula B^{-1} para $\lambda = 1$.

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; |B| = 4 \quad \text{y} \quad B^T = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \mathrm{Adj}(B^T) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

18) a) Calcula la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Como $|A| = 1+1+0-0-0-0 = 2$, tiene inversa. $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \mathrm{Adj}(A^T) =$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

b) Escribe en forma matricial el siguiente sistema y resuélvelo usando la matriz A^{-1} hallada en el apartado anterior,

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 1 \\ y + z &= -2 \\ x + z &= 3 \end{aligned}\right\}.$$

Matricialmente: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Multiplicando los dos miembros a la izquierda por A^{-1}: $A^{-1}A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Como $A^{-1}A = I$ (matriz identidad):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

19) Sean I la matriz identidad de orden 2 y $A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Encuentra los valores de m para los cuales se cumple que $(A - I)^2 = O$, donde O es la matriz nula de orden 2.

$A\text{–}I = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & m \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (A\text{–}I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & m \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & m \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$

Para que coincida con la matriz nula de orden 2, que tiene 0 en sus cuatro posiciones, basta con que m=0.

b) Para $m = 2$, halla la matriz X tal que $AX - 2\,A^T = O$, donde A^T denota la matriz traspuesta de A.

$AX - 2\,A^T = O \Rightarrow AX = O + 2\,A^T \Rightarrow AX = 2\,A^T \Rightarrow$ Multiplicando a la derecha por A^{-1}, supuesto que existe, y teniendo en cuenta que $A^{-1}A = I$, siendo ésta la matriz identidad de orden 2, que multiplicada por cualquier otra matriz resulta esa otra matriz, queda: $X = A^{-1}2\,A^T = 2\,A^{-1}A^T$.

Para $m = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 1\text{–}2 = \text{–}1$, por lo que existe A^{-1}. Como $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \text{Adj}(A^T) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Por tanto: : $X = 2\,A^{-1}A^T = 2\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

20) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{pmatrix}$.

a) Halla los valores del parámetro m para los que el rango de A es menor que 3.

$r(A) < 3 \Rightarrow |A| = 0$. Veamos qué valores anulan el determinante de A. Sacando factor común m de la segunda fila, y otra vez m factor común de la tercera fila, se tiene:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{vmatrix} = m^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = m^2(m^2 + m + 1 - m - m - m) = m^2(m^2 - 2m + 1) = m^2(m-1)^2$$

Por tanto, $|A| = 0 \iff \boxed{m = 0 \text{ ó } m = 1}$.

b) Estudia si el sistema $A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ tiene solución para cada uno de los valores de m obtenidos en el apartado anterior.

- $\underline{m = 0}$: El sistema es: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ 0=1 \\ 0=1 \end{array}\right\}$ que, evidentemente, es *incompatible*, puesto que las ecuaciones segunda y tercera no tienen solución para ningún valor de las incógnitas.

- $\underline{m = 1}$: El sistema es: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\} \iff x + y + z = 1$, que es una ecuación con infinitas soluciones. Por tanto, es un sistema compatible indeterminado. Las soluciones (que no piden) se obtendrían llamando $y = s$, $z = t \Rightarrow x = 1 - s - t \Rightarrow$ Las soluciones son: $(x, y, z) = (1 - s - t, s, t)$

21) Sean F_1, F_2, F_3 las filas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz B de orden 3, cuyo determinante vale -2. Calcula, indicando las propiedades que utilices:

a) El determinante de B^{-1}.

$$\det(B^{-1}) = \frac{1}{\det(B)} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

b) El determinante de $(B^t)^4$ (B^t es la matriz traspuesta de B).

$$\det[(B^t)^4] = \det(B^t \cdot B^t \cdot B^t \cdot B^t) = \det(B^t)\cdot\det(B^t)\cdot\det(B^t)\cdot\det(B^t) = \det(B)\cdot\det(B)\cdot\det(B)\cdot\det(B) = (-2)^4 = \boxed{16}$$

c) El determinante de $2B$.

Si una fila (o columna) de una matriz está multiplicada por un número, todo el determinante queda multiplicado por dicho número. Al multiplicar la matriz B por 2, todas las posiciones de la matriz deben multiplicarse por dicho número. Por tanto, cada una de las 3 filas se ha multiplicado por 2. Luego:

$$\det(2B) = 2\cdot2\cdot2\cdot\det(B) = 2^3(-2) = \boxed{-16}$$

d) El determinante de una matriz cuadrada cuyas filas primera, segunda y tercera son, respectivamente, $5F_1 - F_3$, $3F_3$, F_2.

Supongamos que la matriz es, escrita esquemáticamente: $\begin{pmatrix} 5F_1 - F_3 \\ 3F_3 \\ F_2 \end{pmatrix}$. Entonces, su determinante será:

$\det\begin{pmatrix}5F_1-F_3\\3F_3\\F_2\end{pmatrix}$ = Si a una fila se le suma una combinación lineal de otras, el determinante no varía. En esta matriz, a la fila primera, que era $5F_1$, se le ha sumado –1/3 de la segunda fila, que era $3F_3$.

$= \det\begin{pmatrix}5F_1\\3F_3\\F_2\end{pmatrix} =$ Si una fila está multiplicada por un número, todo el determinante queda multiplicado por dicho número.

$= 5\cdot 3\cdot\det\begin{pmatrix}F_1\\F_3\\F_2\end{pmatrix} = 15\cdot\det\begin{pmatrix}F_1\\F_3\\F_2\end{pmatrix} =$ Al intercambiar dos filas de un determinante, éste cambia de signo.

$= -15\cdot\det\begin{pmatrix}F_1\\F_2\\F_3\end{pmatrix} = -15\cdot\det(B) = -15(-2) = \boxed{30}$

22) Sea $M = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & m+1 & 0\\1 & 1 & m-1\end{pmatrix}$

a) Determina los valores de m para los que los vectores fila de M son linealmente independientes.

Basta, para ello, que el determinante sea no nulo, pues así el rango de M será 3, igual al número de filas (y columnas) linealmente independientes.

$|M| = (m+1)(m-1) + (m+1) = m^2 - 1 + m + 1 = m^2 + m = m(m+1) = 0 \iff m = 0$ ó $m = 1$

Es decir, deberá ser $\boxed{m \neq 0 \text{ y } m \neq 1}$.

b) Estudia el rango de M según los valores de m.

Tachando fila 2 y columna 3 nos queda un menor no nulo: $\begin{vmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Por tanto $r(M) \geq 2$, $\forall m$. Al orlar este menor, obtenemos la matriz completa M. Se calculó su determinante en el apartado anterior, por lo que sabemos los valores de m que lo hacen no nulo y para los cuales, por tanto, $r(M) = 3$. Luego, resumiendo:

Si $m = 0$ ó $m = 1 \Rightarrow |M| = 0 \Rightarrow r(M) = 2$ (por el menor no nulo antes citado).

Si $m \neq 0$ ó $m \neq 1 \Rightarrow |M| \neq 0 \Rightarrow r(M) = 3$

c) Para $m = 1$, calcula la inversa de M.

Para este valor, $M = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 2 & 0\\1 & 1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow |M| = 2 \neq 0 \Rightarrow \exists M^{-1}$.

$$M^t = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 2 & 1\\-1 & 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj}(M^t) = \begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\0 & 1 & 0\\-2 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

Recordemos que para formar la adjunta, calculamos el menor complementario de cada elemento (es decir, el determinante que resulta al tachar la fila y columna a la que pertenece cada elemento) y lo multiplicamos por +1 ó –1 según la posición del elemento en cuestión: empezamos por +1 para el m_{11} y moviéndonos horizontal o verticalmente (nunca en diagonal), cada vez que avanzamos una posición cambiamos el signo (–1, +1, etc). Para terminar:

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|}\text{Adj}(M^{t}) = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}}$$

23) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Comprueba que $A^2 = 2I$ y calcula A^{-1}.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2I$$

b) Calcula A^{2013} y su inversa.

$$A^{2013} = A^{2012}\cdot A = (A^2)^{1006}\cdot A = (2\text{I})^{1006}\cdot A = 2^{1006}\cdot I^{1006}\cdot A = 2^{1006}\cdot I\cdot A = 2^{1006}\cdot A =$$

$$= 2^{1006}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2^{1006} & 2^{1006} \\ 2^{1006} & -2^{1006} \end{pmatrix}}$$

Calculemos, ahora, su inversa. Llamemos $T = A^{2013}$. Al sacar factor común de cada fila, que es una de las propiedades de los determinantes, tendremos:

$$|T| = \begin{vmatrix} 2^{1006} & 2^{1006} \\ 2^{1006} & -2^{1006} \end{vmatrix} = 2^{1006}\cdot 2^{1006}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2^{2012}(-1-1) = 2^{2012}(-2) = -2^{2013}$$

$$T^{t} = T = \begin{pmatrix} 2^{1006} & 2^{1006} \\ 2^{1006} & -2^{1006} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj}(T^{t}) = \begin{pmatrix} -2^{1006} & -2^{1006} \\ -2^{1006} & 2^{1006} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T^{-1} = \frac{1}{|T|}\text{Adj}(T^{t}) = -\frac{1}{2^{2013}}\begin{pmatrix} -2^{1006} & -2^{1006} \\ -2^{1006} & 2^{1006} \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2^{-1007} & 2^{-1007} \\ 2^{-1007} & -2^{-1007} \end{pmatrix}}$$