1 Matrices

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

Los jardines cifrados

De la pared del fondo partía un largo pasillo débilmente iluminado; lo recorrí y, al final, me encontré ante una puerta con apertura de combinación: junto a la puerta, bajo una pequeña pantalla cuadrada, había nueve botones numerados, dispuestos en tres filas de tres. Me acordé del cuadrado mágico. El enano me había dicho que el contenido de la cajita me abriría más de una puerta, y no tenía por qué referirse sólo a la música. Saqué el cuadrado de metal [una reproducción del cuadrado de números que aparece en el grabado de Durero titulado *Melancolía*] y lo examiné a la débil luz del pasillo. Las combinaciones de las puertas solían tener cuatro cifras, y los números más significativos de aquel cuadrado eran el 15 y el 14 del centro de la última fila: 1514 era el año en que Durero había realizado su *Melancolía*, y El Bosco había muerto por esas fechas, tal vez ese mismo año. Marqué el 1514 y las cifras fueron apareciendo en la pantallita cuadrada: las tres primeras en la fila superior y el 4 debajo del primer 1. Tras unos segundos, las cifras desaparecieron sin que ocurriera nada. Entonces pensé que tenía que llenar la pantalla y marcar, por tanto, nueve cifras. La probabilidad de acertar era remotísima. Marqué las nueve primeras cifras de mi cuadrado mágico, y luego las nueve últimas. Luego probé con los números del 1 al 9 en el orden en que aparecían en el cuadrado: 3, 2, 5, 8, 9, 6, 7, 4, 1. Probé varias combinaciones más, pero sin éxito.

Entonces, cuando estaba a punto de renunciar, se me ocurrió otra posibilidad: el cuadrado mágico que tenía en la mano podía ser simplemente un modelo, un referente. Puesto que tenía que llenar una pantalla de tres por tres y había nueve botones numerados del 1 al 9, tal vez tuviera que componer con ellos un cuadrado mágico de orden tres: disponer los nueve dígitos de forma que todas sus filas, columnas y diagonales sumaran lo mismo. […] Estaba cansado y aturdido, y mi primer impulso fue intentar resolver el cuadrado mágico por tanteo. Pero mi reducida pizarra manual no permitía muchos ensayos... De pronto me acordé del método de Holmes: descartar lo imposible. ¿Qué pasaría si el 1 estuviera en la primera casilla?, me pregunté. En ese caso, como todas las filas y las columnas tenían que sumar 15, habría que poner en la primera fila dos números que sumaran 14, y... [...]

Marqué los números en ese orden y el cuadrado mágico se formó en la pantalla. Con un suave zumbido, la puerta se abrió.

CARLO FRABETTI

Los jardines cifrados
Carlo Frabetti

El narrador de esta novela es un hombre de mediana edad que ha sido abandonado por su mujer Nora. Un día conoce a otra mujer, Elena, de la que se enamora a pesar de que un amigo, que es profesor de matemáticas, le dice que esa mujer no le conviene porque también va a dejarlo. Él contesta:

–Al menos quisiera tener la oportunidad de comprobarlo. No hay muchas mujeres así; ni una en un millón…

–¡Alto ahí! –exclamó el amigo levantando las manos con gesto alarmado–. Si empiezas a tergiversar los aspectos matemáticos de la cuestión, estás perdido.

–¿Qué tienen que ver las matemáticas con esto?

–Mucho. Estás cayendo en la faIacia en la que caen todos los tontos enamorados, valga el pleonasmo, la absurda falacia de pensar que el objeto de su amor es único e irrepetible, o cuando menos un bien escasísimo.

–En toda mi vida sólo he conocido a dos mujeres como ellas.

–Supongamos, y es mucho suponer, que eso sea cierto. ¿A cuántas mujeres has conocido?

–Depende de lo que se entienda por conocer.

–¿Qué entiendes tú cuando dices que en toda tu vida sólo has conocido a dos como ellas?

–Bueno, he conocido a muchas mujeres lo suficiente como para darme cuenta de si, en principio, me interesaban o no.

–¿A cuántas?

–No las he contado, pero muchas… Varios cientos…

–Seamos generosos y consideremos que has conocido a mil mujeres Io suficiente como para darte cuenta de su posible adecuación como objeto amoroso. Bien, eso significa que la frecuencia estadística del tipo Nora-Elena es del dos por mil. Así que, para empezar, lo de «una en un millón» es pura hipérbole.

–Pero…

–Déjame seguir. Hay unos tres mil millones de mujeres en el mundo, de las cuales aproximadamente un tercio tendrán entre veinte y cincuenta años (por tu bien y el de ellas. espero que no te interesen las niñas ni las ancianas). Es decir, hay unos mil millones de mujeres con las que, en principio, podrías relacionarte. Si la incidencia del tipo Nora-Elena es del dos por mil, eso significa que hay unos dos millones de candidatas que se ajustan a tu concepto de mujer ideal. Como verás, es matemáticamente absurdo que te obsesiones con una de tan dudosa moralidad y oscuras intenciones como Elena, habiendo otros dos millones esperándote. […]

Construye el cuadrado mágico que le permitió al protagonista de esta novela abrir la puerta. Un cuadrado o un rectángulo de números como el anterior (aunque no cumpla ninguna propiedad especial) se llama matriz. Hay situaciones que se pueden representar mediante una matriz. Descubre alguna.

Si el 1 estuviera en la primera casilla haría falta encontrar tres parejas de números cuya suma fuera 14, y esto es imposible. Solo hay dos parejas que suman 14 : $9 + 5 = 8 + 6 = 14$.

Siguiendo el razonamiento si el 1 estuviera en la segunda casilla el cuadrado que formaría es:

6	1	8
7	5	3
2	9	4

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 **Resuelve estos sistemas.**

a) $\left.\begin{array}{r} x+\ y+3z=0 \\ 2x-2y-\ z=4 \\ x-3y+2z=4 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} -2y+\ z=-1 \\ 2x+\ y-3z=0 \\ x-5y\qquad =7 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} x+\ y+3z=0 \\ 2x-2y-\ z=4 \\ x-3y+2z=4 \end{array}\right\} \xrightarrow{x=-y-3z} \left.\begin{array}{r} 2(-y-3z)-2y-z=4 \\ -y-3z-3y+2z=4 \end{array}\right\} \to - \left.\begin{array}{r} -4y-7z=4 \\ -4y-\ z=4 \end{array}\right\}$

$\qquad -6z=0 \to z=0$

$-4y-z=4 \xrightarrow{z=0} y=-1$

$x+y+3z=0 \xrightarrow{y=-1,\, z=0} x=1$

La solución del sistema es $x=1$, $y=-1$ y $z=0$.

b) $\left.\begin{array}{r} -2y+\ z=-1 \\ 2x+\ y-3z=0 \\ x-5y\qquad =7 \end{array}\right\} \xrightarrow{z=2y-1} \left.\begin{array}{r} 2x+y-3(2y-1)=0 \\ x-5y=7 \end{array}\right\} \to - \left.\begin{array}{r} 2x-5y=-3 \\ x-5y=7 \end{array}\right\}$

$\qquad x\qquad =-10$

$x-5y=7 \xrightarrow{x=-10} y=-\dfrac{17}{5}$

$z=2y-1 \xrightarrow{y=-\frac{17}{5}} z=-\dfrac{34}{5}-1=-\dfrac{39}{5}$

La solución del sistema es $x=-10$, $y=-\dfrac{17}{5}$ y $z=-\dfrac{39}{5}$.

002 **Resuelve estos sistemas.**

a) $\left.\begin{array}{r} -x+2y=0 \\ 2x+\ y=5 \\ 2x-3y=1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x-\ y=0 \\ 2x+\ y=3 \\ 3x-4y=-1 \\ -x-2y=-3 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} -x+2y=0 \\ 2x+\ y=5 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x=2y \\ 2x+y=5 \end{array}\right\} \xrightarrow{x=2y} 4y+y=5 \to y=1$

$y=1 \xrightarrow{y=2y} x=2$

$2x-3y=1 \xrightarrow{x=2,\, y=1} 4-3=1$. En este caso, la solución del sistema es válida.

b) $+\left.\begin{array}{r} x-y=0 \\ 2x+y=3 \end{array}\right\}$

$\quad 3x\qquad =3 \to x=1 \to y=1$

$3x-4y=-1 \xrightarrow{x=1,\, y=1} 3-4=-1$

$-x-2y=-3 \xrightarrow{x=1,\, y=1} -1-2=-3$

En este caso, la solución del sistema es válida.

ACTIVIDADES

001 **Escribe una matriz que cumpla las siguientes condiciones.**

- **Su dimensión sea 3×2.**
- **$a_{32} = -a_{21} = a_{11} = 1$**
- **$a_{22} = a_{12} = -a_{31} = -2$**

La matriz es: $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

002 **Se venden listones con dos calidades y de dos longitudes. Los listones grandes de baja calidad cuestan 0,75 € y 1 € los de alta, mientras que los listones pequeños de baja calidad cuestan 0,45 € y 0,60 € los de alta. Anota estos datos en forma de matriz.**

La matriz será de dimensión 2×2. Las filas indican la calidad; las columnas, el tamaño y los elementos de la matriz, el precio:

$$\begin{pmatrix} 0{,}45 & 0{,}75 \\ 0{,}60 & 1 \end{pmatrix}$$

003 **Halla el valor de cada incógnita para que las dos matrices sean iguales.**

$$\begin{pmatrix} x+1 & 3 & 0 \\ z+1 & x+2 & z-1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & y+1 & 0 \\ y+2 & 3 & y \end{pmatrix}$$

Para que las matrices sean iguales deben tener la misma dimensión y ser iguales todos sus elementos.

Las dos matrices son de dimensión 2×3.

$x + 1 = 2 \rightarrow x = 1$ $\qquad$ $z + 1 = y + 2 \rightarrow z = y + 1 \rightarrow z = 3$

$3 = y + 1 \rightarrow y = 2$ $\qquad$ $x + 2 = 3 \rightarrow x = 1$

$0 = 0$ $\qquad$ $z - 1 = y \rightarrow z = 1 + 2 = 3$

Es decir, la solución es $x = 1$, $y = 2$ y $z = 3$.

004 **Escribe un ejemplo de las siguientes matrices.**

a) Una matriz fila con cuatro columnas.

b) Una matriz columna con cuatro filas.

c) Una matriz cuadrada de orden 4.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $A = (1 \quad 3 \quad -1 \quad 0)$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

005 Escribe matrices que cumplan las siguientes condiciones.

a) Matriz diagonal de orden 4 que cumple que $a_{ii} = 7$.

b) Matriz identidad con tres filas.

a) $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

006 Escribe matrices que cumplan estas condiciones.

a) Diagonal de orden 3.

b) Triangular superior con tres columnas, de forma que los elementos distintos de 0 cumplan que $a_{ij} = i + j$.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

007 Realiza la siguiente operación con matrices:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

008 Averigua los elementos que faltan si $A + B = C$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & a & b \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & c & d \\ e & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} f & 7 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & a & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & c & d \\ e & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 7 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 4+c & 5+d \\ 5+e & a+3 & b-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 7 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$f = 5$ $\qquad 4 + c = 7 \rightarrow c = 3$ $\qquad 5 + d = 6 \rightarrow d = 1$

$5 + e = 1 \rightarrow e = -4$ $\qquad a + 3 = -1 \rightarrow a = -4$ $\qquad b - 1 = 0 \rightarrow b = 1$

009 Haz la siguiente operación con matrices:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 6 & -12 \\ -1 & -2 & 5 \\ -1 & 15 & -13 \end{pmatrix}$$

010 Realiza las operaciones indicadas con estas matrices.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -3 & -1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$$

a) $2(A-B)+3C$

b) $(-2)(A-C)-3(B+2C)$

a) $2(A-B)+3C=2\cdot\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 3\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & 15\\ 7 & 0\end{pmatrix}$

b) $(-2)(A-C)-3(B+2C)=(-2)\cdot\begin{pmatrix}3 & 0\\ -2 & 4\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}-2 & 6\\ -1 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -18\\ 7 & 7\end{pmatrix}$

011 Calcula la siguiente operación con matrices:

$$2\cdot(3\quad 1\quad 4)\cdot 5\cdot\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -2\end{pmatrix}-3\cdot(3\quad 1\quad 4)\cdot\begin{pmatrix}5\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$$

$$2\cdot(3\quad 1\quad 4)\cdot 5\cdot\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -2\end{pmatrix}-3\cdot(3\quad 1\quad 4)\cdot\begin{pmatrix}5\\ -1\\ 0\end{pmatrix}=(6\quad 2\quad 8)\cdot\begin{pmatrix}0\\ 5\\ -10\end{pmatrix}-(9\quad 3\quad 12)\cdot\begin{pmatrix}5\\ -1\\ 0\end{pmatrix}=$$

$$=6\cdot 0+2\cdot 5-8\cdot 10-9\cdot 5+3\cdot 1-12\cdot 0=10-80-45+3=-112$$

012 Halla el valor de x en esta igualdad de matrices.

$$(1\quad -1)\cdot\begin{pmatrix}x\\ 1\end{pmatrix}-(1\quad x\quad 9)\cdot\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 0\end{pmatrix}=0$$

$$(1\quad -1)\cdot\begin{pmatrix}x\\ 1\end{pmatrix}-(1\quad x\quad 9)\cdot\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 0\end{pmatrix}=0\rightarrow x-1-(3-x)=0\rightarrow 2x=4\rightarrow x=2$$

013 Realiza los productos que sean posibles entre las matrices A, B y C.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -2 & 1 & -3\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 3 & 2\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}7 & -6\\ -13 & 11\end{pmatrix}\qquad B\cdot A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 6\\ -5 & 2 & -8\\ 8 & -3 & 13\end{pmatrix}$$

$$B\cdot C=\begin{pmatrix}-3 & 12\\ 7 & 0\\ -11 & 2\end{pmatrix}\qquad C\cdot A=\begin{pmatrix}-9 & 4 & -14\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

$A\cdot C$ no se puede multiplicar, ya que la dimensión de A es 2×3 y la de C es 2×2.

$C\cdot B$ no se puede multiplicar, pues la dimensión de C es 2×2 y la de B es 3×2.

014 Determina la dimensión de la matriz resultante de esta operación y, después, compruébalo efectuando las operaciones.

$$2\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 5 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

La dimensión de la matriz resultante es 2×3.

$$2\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 5 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ 6 & 0 & 2\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}6 & 9 & -1\\ 12 & 15 & 3\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}22 & 25 & -3\\ 42 & 45 & 11\end{pmatrix}$$

015 Comprueba si se cumple que $A\cdot(B+C)=B\cdot A+C\cdot A$, siendo las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

Si no es cierto, aplica correctamente la propiedad.

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 0\\ 4 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 3\\ -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

La igualdad correcta es: $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 12 & -5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 1\\ -9 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$$

016 Realiza la operación $B\cdot A+C\cdot A$, sacando previamente factor común a la matriz A.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & -3\\ 0 & 2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 4\\ -1 & 3 & -5\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 2\\ 2 & 0 & -3\\ 1 & -1 & 5\end{pmatrix}$$

¿Qué propiedad has aplicado al sacar factor común?

Para sacar factor común aplicamos la propiedad distributiva por la derecha.

$B\cdot A+C\cdot A=(B+C)\cdot A$

$$(B+C)\cdot A=\left[\begin{pmatrix}2 & 0 & 4\\ -1 & 3 & -5\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 3 & 2\\ 2 & 0 & -3\\ 1 & -1 & 5\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & -3\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -1 & -25\\ 8 & 12\end{pmatrix}$$

017 Calcula $(A\cdot B)^t$, siendo A y B las siguientes matrices.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 7\\ 0 & 3\\ 5 & -4\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 5 & 8\end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix}1 & 7\\ 0 & 3\\ 5 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 5 & 8\end{pmatrix}\right]^t=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 5 & 8\end{pmatrix}^t\cdot\begin{pmatrix}1 & 7\\ 0 & 3\\ 5 & -4\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}-4 & 5\\ 1 & 8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 5\\ 7 & 3 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}31 & 15 & -40\\ 57 & 24 & -27\end{pmatrix}$$

018 **Realiza esta operación con matrices:**

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 9 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}^t \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 8 & 2 & 0 \end{pmatrix}^t \right]$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 9 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}^t \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 8 & 2 & 0 \end{pmatrix}^t \right] = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 0 & 9 & 7 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -1 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 0 & 9 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -4 & 6 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 60 \\ 27 & 33 \end{pmatrix}$$

019 **Completa la siguiente matriz para que sea antisimétrica.**

$$\begin{pmatrix} a & 1 & b \\ c & 0 & -3 \\ 2 & d & e \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} a & 1 & b \\ c & 0 & -3 \\ 2 & d & e \end{pmatrix}$ es antisimétrica si: $a = 0, b = -2, c = -1, d = 3, e = 0$.

020 **Estudia si la matriz $A + B$ es simétrica.**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & -6 & 0 \end{pmatrix}$ no es simétrica.

021 **Completa los elementos que faltan en la matriz para que sus filas sean linealmente dependientes.**

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & b & 2 \\ -9 & a & 0 & c \end{pmatrix}$$

Para que sus dos filas sean dependientes tienen que ser proporcionales, $F_2 = \lambda F_1$.

$$\left.\begin{aligned} -9 &= 3\lambda \\ a &= -\lambda \\ 0 &= b\lambda \\ c &= 2\lambda \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} \lambda &= -3 \\ a &= 3 \\ 0 &= b \\ c &= -6 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & b & 2 \\ -9 & a & 0 & c \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 \\ -9 & 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

022 **Determina el rango de las siguientes matrices.**

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 7 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 6 \\ 3 & -3 & 9 \end{pmatrix}$

a) Ninguna de las tres filas es proporcional a otra.
Comprobamos si alguna fila es combinación lineal de las otras dos:

$$F_1 = \lambda F_2 + \mu F_3 \rightarrow \left.\begin{array}{r} 1 = 2\lambda \\ -1 = \lambda + \mu \\ 3 = -\lambda + \mu \\ 0 = \lambda - \mu \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} \lambda = \frac{1}{2} \\ -1 = \frac{1}{2} + \mu \\ 3 = -\frac{1}{2} + \mu \\ 0 = \frac{1}{2} - \mu \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = \frac{1}{2} \\ \mu = -\frac{3}{2} \\ \mu = \frac{7}{2} \\ \mu = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Como los valores de μ son diferentes, el sistema no tiene solución. Ninguna fila es combinación lineal de las otras dos, entonces las tres filas son linealmente independientes y, por tanto, el rango de la matriz es 3.

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 7 & -1 \end{pmatrix} = 3$$

b) Como $F_2 = 2F_1$ y $F_3 = 3F_1$, todas las filas son proporcionales. Luego el número de filas linealmente independientes es 1 y, por tanto, el rango de la matriz es 1.

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 6 \\ 3 & -3 & 9 \end{pmatrix} = 1$$

023 **Calcula el rango utilizando el método de Gauss:** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 = F_3 + \frac{5}{3}F_1]{} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & \frac{19}{3} & \frac{35}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 = F_3 + \frac{19}{3}F_2]{} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{73}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

024 **Halla el rango mediante el método de Gauss:** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 7 \\ 8 & -3 & -2 & 14 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 7 \\ 8 & -3 & -2 & 14 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 = F_2 - 8F_1 \\ F_3 = F_3 - 2F_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 7 \\ 0 & 21 & -42 & -42 \\ 0 & 7 & -14 & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 = F_3 - \frac{1}{3}F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 7 \\ 0 & 21 & -42 & -42 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 7 \\ 8 & -3 & -2 & 14 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

025 **Calcula, si es posible, la inversa de estas matrices utilizando la definición.**

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{array}{r} a+2c=1 \\ b+2d=0 \\ 2a+4c=0 \\ 2b+4d=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} a+2c=1 \\ b+2d=0 \\ 2(a+2c)=0 \\ 2(b+2d)=1 \end{array}\right\}$

El sistema no tiene solución, luego no existe matriz inversa.

b) $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \left.\begin{array}{r} 3a-5c=1 \\ 3b-5d=0 \\ -a+2c=0 \\ -b+2d=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3a-5c=1 \\ 3b-5d=0 \\ a=2c \\ b=2d-1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 6c-5c=1 \\ 6d-3-5d=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=2 \\ b=5 \\ c=1 \\ d=3 \end{array}\right.$

Comprobamos que $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ es la matriz inversa:

$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

026 **Halla, si es posible, la inversa de esta matriz:** $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \left.\begin{array}{r} 2a-3d+g=1 \\ 2b-3e+h=0 \\ 2c-3f+i=0 \\ 3a+d+g=0 \\ 3b+e+h=1 \\ 3c+f+i=0 \\ d=0 \\ e=0 \\ f=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2a+g=1 \\ 2b+h=0 \\ 2c+i=3 \\ 3a+g=0 \\ 3b+h=1 \\ 3c+i=-1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2a+g=1 \\ 3a+g=0 \\ 2b+h=0 \\ 3b+h=1 \\ 2c+i=3 \\ 3c+i=-1 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=-1 \\ b=1 \\ c=-4 \\ g=3 \\ h=-2 \\ i=11 \end{array}\right.$

Comprobamos que $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 11 \end{pmatrix}$ es la matriz inversa:

$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

027 Calcula, por el método de Gauss-Jordan, la inversa de estas matrices.

a) $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

a) $$\left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 2 & 1 & 0 \\ 12 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=F_2-2F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1=F_1-2F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1=\frac{1}{6}F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{5}{6} & -\frac{2}{6} \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

b) $$\left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 7 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=F_2+\frac{2}{3}F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1=F_1+21F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 0 & 15 & 21 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_1=-\frac{1}{3}F_1 \\ F_2=-3F_2}]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & -7 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

028 Halla, por el método de Gauss-Jordan, la inversa de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=F_2-\frac{2}{3}F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_3=F_3-\frac{1}{3}F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{3} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{F_1=F_1+\frac{9}{4}F_3 \\ F_2=F_2-\frac{15}{4}F_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 3 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{9}{4} & -\frac{15}{4} \\ 0 & 0 & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{3} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{F_1=\frac{1}{3}F_1 \\ F_2=\frac{1}{3}F_2 \\ F_3=\frac{9}{4}F_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{9}{4} \end{array}\right)$$

029 **Clasifica las matrices y determina su dimensión.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$ Matriz fila de dimensión 1×3

$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow$ Matriz columna de dimensión 3×1

$C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ Matriz cuadrada de orden 3

$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$ Matriz diagonal de orden 2

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ Matriz unidad de orden 2

$F = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ Matriz triangular inferior de orden 3

$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$ Matriz rectangular de dimensión 2×3

$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$ Matriz triangular superior de orden 3

$J = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow$ Matriz triangular inferior de orden 2

030 **Una empresa de autobuses tiene tres líneas: *A*, *B* y *C*.**
El lunes salieron 5 autobuses en la línea *A*, 3 en la *B* y 4 en la *C*. El martes salieron 2 autobuses en la línea *A*, 1 en la *B* y 4 en la *C*. El miércoles salió 1 autobús en la línea *A*, 3 en la *B* y 5 en la *C*. Represéntalo en forma de matriz.

Lo representamos en una matriz de dimensión 3×3. Las filas representan los días de la semana: lunes, martes y miércoles. Las columnas corresponden a las líneas *A*, *B* y *C*, respectivamente. Cada elemento de la matriz es el número de autobuses.

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

031 Una fábrica elabora dos tipos de productos, *X* e *Y*, que vende a tres empresas *A*, *B* y *C*. Inicialmente distribuía 1.000 unidades de cada producto a cada una, pero en este mes la empresa *A* recibió 600 unidades de *X* y 300 de *Y*; la empresa *B* recibió 400 unidades de *X* y 800 de *Y*, y la empresa *C* recibió 900 unidades de *X* y 700 de *Y*. Representa mediante una matriz las disminuciones porcentuales que se han producido en la distribución de los productos a estas empresas.

Las filas corresponden a cada tipo de empresa, *A*, *B* y *C*, y las columnas corresponden al tipo de producto, *X* e *Y*. Cada elemento de la matriz es la disminución porcentual de la producción.

$$100 - 100 \cdot \frac{600}{1.000} = 40 \qquad 100 - 100 \cdot \frac{300}{1.000} = 70$$

$$100 - 100 \cdot \frac{400}{1.000} = 60 \qquad 100 - 100 \cdot \frac{800}{1.000} = 20$$

$$100 - 100 \cdot \frac{900}{1.000} = 10 \qquad 100 - 100 \cdot \frac{700}{1.000} = 30$$

$$\begin{pmatrix} 40 & 70 \\ 60 & 20 \\ 10 & 30 \end{pmatrix}$$

032 ¿Son triangulares las siguientes matrices? ¿Por qué?

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ No, porque ni todos los elementos situados por encima de la diagonal principal, ni todos los situados por debajo, son cero.

$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ No, porque no es cuadrada.

$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Sí, porque todos los elementos situados por encima de la diagonal son cero.

033 Pon dos ejemplos de estas matrices:

a) Matriz columna
b) Matriz fila
c) Matriz diagonal
d) Matriz cuadrada
e) Matriz triangular superior
f) Matriz triangular inferior

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $\begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $(3 \quad -2 \quad 9)$ d) $\begin{pmatrix} -4 & 9 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

034 Halla los valores de a y b para que las matrices sean iguales.

$$A=\begin{pmatrix}1 & b & 3\\ 3 & 1 & 0\\ 9 & 4 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 5 & 3\\ 1-a & 1 & 0\\ 9 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & b & 3\\ 3 & 1 & 0\\ 9 & 4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 5 & 3\\ 1-a & 1 & 0\\ 9 & 4 & 1\end{pmatrix}\rightarrow b=5,\ a=-2$$

035 Considera las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 6\\ -1 & 4 & 3\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}9 & 1 & 6\\ 1 & 8 & -9\end{pmatrix}$$

Comprueba con esas matrices la propiedad conmutativa de la suma.

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 6\\ -1 & 4 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}9 & 1 & 6\\ 1 & 8 & -9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 2 & 12\\ 0 & 12 & -6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}9 & 1 & 6\\ 1 & 8 & -9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1 & 6\\ -1 & 4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 2 & 12\\ 0 & 12 & -6\end{pmatrix}$$

036 Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}0 & 5\\ -4 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}5 & 5\\ 4 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$.

¿Qué relación hay entre $A-B$ y $B-A$?

$$A-B=\begin{pmatrix}0 & 5\\ -4 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5 & 5\\ 4 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 0\\ -8 & 3\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

$$B-A=\begin{pmatrix}5 & 5\\ 4 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 5\\ -4 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 8 & -3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$A-B$ y $B-A$ son matrices opuestas.

037 Considera las matrices: $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 4\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\\ -1 & 4 & 3\end{pmatrix}$

Calcula.

a) $A+B-C$
b) $A-B+C$
c) $-A-B+C$
d) $-A+B+C$
e) $A-(B-C)$
f) $C-(A+B)$

a) $A+B-C=\begin{pmatrix}3 & -1 & 4\\ 0 & -5 & 3\end{pmatrix}$

b) $A-B+C=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 4\\ 0 & 3 & 3\end{pmatrix}$

c) $-A-B+C=\begin{pmatrix}-3 & 1 & -4\\ 0 & 5 & -3\end{pmatrix}$

d) $-A+B+C=\begin{pmatrix}-3 & 3 & 0\\ -2 & 5 & 3\end{pmatrix}$

e) $A-(B-C)=A-B+C=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 4\\ 0 & 3 & 3\end{pmatrix}$

f) $C-(A+B)=-A-B+C=\begin{pmatrix}-3 & 1 & -4\\ 0 & 5 & -3\end{pmatrix}$

038 Determina una matriz X que verifique: $A + X = B$, siendo $A = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 9 & 3 \end{pmatrix}$.

$$A + X = B \rightarrow X = B - A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 9 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & -1 \end{pmatrix}$$

039 Considera las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Realiza, si es posible, los siguientes productos.

a) AB b) BA c) AC d) BC

a) $AB = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & -20 \end{pmatrix}$

b) No se pueden multiplicar B y A, ya que la dimensión de B es 2×3 y la de A es 2×2.

c) No se pueden multiplicar A y C, ya que la dimensión de A es 2×2 y la de C es 3×3.

d) $B \cdot C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 8 \end{pmatrix}$

040 Comprueba que, en general, el producto de matrices no cumple la propiedad conmutativa multiplicando estas matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 26 & 7 & -20 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} 6 & 10 & -6 \\ 5 & 5 & -19 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

041 Comprueba que se cumple la propiedad distributiva del producto de matrices con respecto de la suma utilizando estas matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A(B + C) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 12 & -8 \end{pmatrix}$$

$$AB + AC = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 12 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 12 & -8 \end{pmatrix}$$

042 Expresa la condición que tienen que cumplir dos matrices M y N para que pueda realizarse su suma. Y, si lo que pretendemos es multiplicarlas, ¿qué condición deben cumplir las matrices?

(Galicia. Septiembre 2004. Bloque 1. Pregunta 2)

- Para que se puedan sumar dos matrices estas deben tener la misma dimensión.
- Para que se puedan multiplicar dos matrices el número de columnas de la primera debe ser igual al número de filas de la segunda.

043 Con las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, calcula, si es posible:

a) $2A - 3B$ b) $2A \cdot 3B$ c) $A(B + C)$ d) $A - 3B$

a) $2A - 3B = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & -16 \end{pmatrix}$

c) $A(B + C) = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 9 & -10 \end{pmatrix}$

b) $2A \cdot 3B = \begin{pmatrix} 6 & -24 \\ 24 & -48 \end{pmatrix}$

d) $A - 3B = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 0 & -14 \end{pmatrix}$

044 Con las siguientes matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, calcula, si es posible:

a) ABC b) $2AB$ c) $A(B - C)$ d) $B \cdot 3C$

a) $ABC = (AB)C = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 9 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -17 \\ 28 & 75 \end{pmatrix}$

b) $2AB = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 18 & 28 \end{pmatrix}$

c) No se puede realizar esta operación ya que B y C no se pueden restar por no tener la misma dimensión.

d) $B \cdot 3C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 6 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 39 \\ 30 & 90 \\ 48 & 135 \end{pmatrix}$

045 Calcula AB y BA, siendo las matrices: $A = (1 \quad -3 \quad -1 \quad 2)$ $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

(La Rioja. Septiembre 2000. Propuesta A. Ejercicio 2)

$$AB = (1 \quad -3 \quad -1 \quad 2) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -4$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot (1 \quad -3 \quad -1 \quad 2) = \begin{pmatrix} 3 & -9 & -3 & 6 \\ 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

046 Sea A una matriz $m \times n$.

a) ¿Existe una matriz B tal que BA sea una matriz fila? Si existe, ¿qué dimensión tiene?

b) ¿Se puede encontrar una matriz B tal que AB sea una matriz fila? Si existe, ¿qué dimensión tiene?

c) Busca una matriz B tal que $BA = (0 \quad 0)$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(Asturias. Junio 2001. Bloque 2)

a) Para que BA sea una matriz fila, la matriz B tiene que ser una matriz de dimensión $1 \times m$, y la dimensión del producto es $1 \times n$.

b) El número de filas de la matriz AB no depende de la matriz B, sino que es igual al número de filas de la matriz A, que es m. Solo es posible obtener una matriz fila si A es también una matriz fila.

c) La dimensión de la matriz B es $1 \times 3 \rightarrow B = (a \quad b \quad c)$.

$$BA = (a \quad b \quad c) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (a \quad a+b)$$

$$(a \quad a+b) = (0 \quad 0) \rightarrow a = 0,\ b = 0$$

$$B = (a \quad b \quad c) = (0 \quad 0 \quad c) \text{ con } c \in \mathbb{R}.$$

047 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$:

a) Calcule AB y BA.

b) Compruebe que $(A + B)^2 = A^2 + B^2$.

(Cataluña. Junio 2006. Cuestión 3)

a) $AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

b) $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

Como en este caso, $AB = -BA$, entonces se cumple $(A + B)^2 = A^2 + B^2$.

048 Con las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

calcula $(A + B)^2$ y $A^2 + 2AB + B^2$. ¿Por qué no coinciden los resultados? ¿Cuál sería la fórmula correcta para el cuadrado de una suma de matrices?

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 6 & 5 & -4 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 6 & 5 & -4 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -6 \\ 22 & 31 & -34 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 2 & 16 & -6 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -8 \\ 40 & 10 & -26 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 5 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -9 \\ 47 & 32 & -36 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Como el producto de matrices no es conmutativo, el cálculo correcto sería: $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

Lo comprobamos calculando de nuevo el segundo miembro:

$$A^2 + AB + BA + B^2 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 2 & 16 & -6 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 20 & 5 & -13 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -5 & 4 & -11 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 5 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -6 \\ 22 & 31 & -34 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

049 **Se consideran las matrices:** $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Se pide:

a) Hallar $(A - I)^2$.

b) Calcular A^4 haciendo uso del apartado anterior.

(Madrid. Año 2006. Modelo. Opción B. Ejercicio 4)

a) $(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $(A - I)^2 = A^2 - 2A + I^2 = 0 \rightarrow A^2 = 2A - I \rightarrow A^4 = (2A - I)^2$

$$A^4 = (2A - I)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -2 & -3 & 2 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -2 & -3 & 2 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ -4 & -7 & 4 \\ -4 & -8 & 5 \end{pmatrix}$$

050 **Sean** $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **y** $N = M + I$**, donde** I **denota la matriz identidad de orden** n**.**

Calcula N^2 **y** M^3**.**

(Galicia. Junio 2001. Bloque 1. Pregunta 1)

$$N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

051 **Sean** A **una matriz de dimensión** 5×3**,** B **una matriz de dimensión** $m \times n$ **y** C **una matriz de dimensión** 4×7**. Si sabemos que se puede obtener la matriz** ABC**, ¿cuáles son las dimensiones de** B **y de** ABC**?**

Para poder obtener el producto, B tiene que tener tantas filas como columnas tenga A y tantas columnas como filas tenga C. Es decir, la dimensión de B es 3×4 y la dimensión del producto ABC es 5×7.

052 Dadas tres matrices A, B y C, se sabe que ABC es una matriz de dimensión 2×3 y que BC es una matriz de dimensión 4×3. ¿Cuál es el orden de A?

(Galicia. Junio 2002. Bloque 1. Pregunta 1)

La dimensión de ABC es $2 \times 3 \rightarrow$ El número de filas de A es 2 y el número de columnas de C es 3.

La dimensión de BC es $4 \times 3 \rightarrow$ El número de filas de B es 4 y el número de columnas de C es 3.

Las matrices se pueden multiplicar si el número de columnas de A es igual al número de filas de $B \rightarrow$ La dimensión de A es 2×4.

053 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular A^{10}.

(Madrid. Año 2008. Modelo. Opción B. Ejercicio 3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En general: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

054 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y sea n un número natural cualquiera.

Encuentra el valor de A^n para cada n y halla $A^{350} - A^{250}$.

(País Vasco. Junio 2003. Bloque A. Cuestión A)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$$

En general: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3n & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{350} - A^{250} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1.050 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 750 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 300 & 0 \end{pmatrix}$

055 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Encuentra la regla del cálculo de las potencias sucesivas de A, es decir, de A^n para cualquier número natural n.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \qquad A^4 = IA = A$$

Así, si dividimos n entre 3 tenemos $n = 3p + q$, donde q, el resto al dividir n entre 3, es un número natural menor que 3.

$$A^n = A^{3p+q} = A^{3p}A^q = IA^q = A^q \quad \text{y} \quad A^q = \begin{cases} A & \text{si } q = 1 \\ A^2 & \text{si } q = 2 \\ I & \text{si } q = 0 \end{cases}$$

056 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, halla A^3, A^5 y A^n.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En general: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

057 Calcula $A^{2.000}$, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = 2^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2^3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En general:

- Si n es un número par resulta: $A^n = 2^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Si n es un número impar resulta: $A^n = 2^n \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Así, tenemos que: $A^n = 2^{2.000} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

058 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Comprobar que $A^3 - 2A^2 = 0$. b) Hallar A^n.

(Madrid. Año 2005. Modelo. Opción B. Ejercicio 2)

a) $A^3 - 2A^2 = 0 \rightarrow A^2(A - 2I) = 0$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \qquad A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A^2(A - 2I) = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $A^3 = 2A^2$

$A^4 = AA^3 = A2A^2 = 2A^3 = 2 \cdot 2A^2 = 2^2A^2$

$A^5 = 2^3A^2 \ldots$

En general: $A^n = 2^{n-2}A^2 = 2^{n-2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix} = 2^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

059 Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calcula A^n.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ $\qquad A^4 = A^3A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 15 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

En general: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

060 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

a) Para cada número natural n, hallar A^n.

b) Calcular $A^{22} - 12A^2 + 2A$.

(País Vasco. Junio 2006. Bloque A. Cuestión A)

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

En general: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A^{22} - 12A^2 + 2A = \begin{pmatrix} 1 & 22a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 12 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$

061 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Hallar A^n para todo entero positivo n.

(Aragón. Junio 2001. Opción A. Cuestión 1)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{cases} A & \text{si } n = 1 \\ A^2 & \text{si } n = 2 \\ 0 & \text{si } n \geq 3 \end{cases}$$

062 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Halla el valor o los valores de a para que se cumpla la identidad $A^2 + 2A + I = 0$, siendo I la matriz identidad de orden 3 y 0 la matriz nula de orden 3.

(Aragón. Junio 2000. Opción A. Cuestión 1)

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$2A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2a & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + 2A + I = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2a & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+2a+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow a^2 + 2a + 1 = 0 \rightarrow a = -1$$

063 Sean A, I y B las matrices dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Contestar razonadamente a la siguiente pregunta: ¿Existe algún valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que la igualdad $(A - \lambda I)^2 = B$ sea cierta?

En caso afirmativo, hallar dicho valor de λ.

(País Vasco. Julio 2007. Bloque A. Cuestión A)

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda I)^2 = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2+2 & -2\lambda+1 & -2\lambda \\ -2\lambda+1 & \lambda^2-2\lambda+2 & 1 \\ -2\lambda & 1 & \lambda^2+1 \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda I)^2 = B \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda^2+2 & -2\lambda+1 & -2\lambda \\ -2\lambda+1 & \lambda^2-2\lambda+2 & 1 \\ -2\lambda & 1 & \lambda^2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Igualando el elemento a_{13} de las dos matrices: $-2\lambda = -4 \rightarrow \lambda = 2$

Comprobamos el resultado para los demás elementos.

$$\begin{pmatrix} \lambda^2+2 & -2\lambda+1 & -2\lambda \\ -2\lambda+1 & \lambda^2-2\lambda+2 & 1 \\ -2\lambda & 1 & \lambda^2+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\lambda=2} \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

064 Demuestra que la matriz $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ verifica una ecuación del tipo $A^2+\alpha A+\beta I=0$, determinando α y β (I denota la matriz identidad).

(Galicia. Septiembre 2003. Bloque 1. Pregunta 1)

$$A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\qquad A^2=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&4\\4&5\end{pmatrix}$$

$$A^2+\alpha A+\beta I=0\rightarrow\begin{pmatrix}5&4\\4&5\end{pmatrix}+\alpha\cdot\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}+\beta\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}5+2\alpha+\beta&4+\alpha\\4+\alpha&5+2\alpha+\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\left.\begin{array}{r}5+2\alpha+\beta=0\\4+\alpha=0\end{array}\right\}\rightarrow\begin{cases}\alpha=-4\\\beta=3\end{cases}$$

065 Sean I y A las matrices cuadradas:

$$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\qquad A=\begin{pmatrix}17&29\\-10&-17\end{pmatrix}$$

Calcular, escribiendo las operaciones necesarias:

a) Las matrices A^2 y A^5.

b) Los números reales α y β para los que se verifica $(I+A)^3=\alpha I+\beta A$.

(C. Valenciana. Junio 2008. Bloque 1. Problema 2)

a) $$A^2=\begin{pmatrix}17&29\\-10&-17\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}17&29\\-10&-17\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-I$$

$$A^5=A^2A^2A=(-I)\cdot(-I)\cdot A=A=\begin{pmatrix}17&29\\-10&-17\end{pmatrix}$$

b) $$(I+A)^3=(I+A)\cdot(I+A)\cdot(I+A)=(I+A)\cdot(I+2A+A^2)=I+3A+3A^2+A^3=$$
$$=I+3A+3A^2-A=I+2A-3I=2A-2I$$

$(I+A)^3=\alpha I+\beta A$, siendo $\alpha=2$ y $\beta=-2$

066 Calcula la matriz traspuesta de cada una de estas matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1&7&2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}0\\1\\7\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}5&-4&3\\-4&3&1\\2&8&9\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}\qquad E=\begin{pmatrix}0&1&7\\-1&9&3\end{pmatrix}$$

$$A^t=\begin{pmatrix}1\\7\\2\end{pmatrix}\qquad B^t=\begin{pmatrix}0&1&7\end{pmatrix}\qquad C^t=\begin{pmatrix}5&-4&2\\-4&3&8\\3&1&9\end{pmatrix}$$

$$D^t=\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}\qquad E^t=\begin{pmatrix}0&-1\\1&9\\7&3\end{pmatrix}$$

067 Con las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\0 & 4\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\3 & 1\end{pmatrix}$, comprueba que se cumplen las siguientes propiedades.

a) $(A^t)^t = A$

b) $(A+B)^t = A^t + B^t$

c) $(AB)^t = B^tA^t$

a) $(A^t)^t = \begin{pmatrix}2 & 0\\-1 & 4\end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix}2 & -1\\0 & 4\end{pmatrix} = A$

b) $(A+B)^t = \begin{pmatrix}2 & -2\\3 & 5\end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix}2 & 3\\-2 & 5\end{pmatrix}$

$A^t + B^t = \begin{pmatrix}2 & 0\\-1 & 4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 3\\-1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 3\\-2 & 5\end{pmatrix}$

c) $(AB)^t = \begin{pmatrix}-3 & -3\\12 & 4\end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix}-3 & 12\\-3 & 4\end{pmatrix}$

$B^tA^t = \begin{pmatrix}0 & 3\\-1 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2 & 0\\-1 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3 & 12\\-3 & 4\end{pmatrix}$

068 Determina qué matrices son simétricas o antisimétricas, y realiza los cálculos que se indican, si es posible.

$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\1 & 5 & 3\\-2 & 3 & 2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\-1 & 0 & -3\\2 & 3 & 0\end{pmatrix}$ $D=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$ $E=\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}$

a) A^tC

b) CD^t

c) $(B+E)^t$

d) DD^t

e) A^tC^t

f) $(3E)^t$

Son simétricas las matrices A y B, y es antisimétrica la matriz C.

a) $A^tC = \begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\1 & 5 & 3\\-2 & 3 & 2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\-1 & 0 & -3\\2 & 3 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5 & -4 & -7\\1 & 10 & -17\\1 & 4 & -5\end{pmatrix}$

b) No se puede multiplicar CD^t ya que la dimensión de C es 3×3 y la de D^t es 2×3.

c) $(B+E)^t = \begin{pmatrix}3 & 1\\-1 & 3\end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix}3 & -1\\1 & 3\end{pmatrix}$

d) $DD^t = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\1 & 1 & 2\end{pmatrix}$

e) $A^tC^t = \begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\1 & 5 & 3\\-2 & 3 & 2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\1 & 0 & 3\\-2 & -3 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 4 & 7\\-1 & -10 & 17\\-1 & -4 & 5\end{pmatrix}$

f) $(3E)^t = \begin{pmatrix}3 & 3\\-3 & 3\end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix}3 & -3\\3 & 3\end{pmatrix}$

069 **Responde a estas preguntas.**

a) ¿Existe siempre el producto $A^t \cdot A$, siendo A una matriz cualquiera? ¿Por qué?

b) ¿El producto de dos matrices simétricas de la misma dimensión es también una matriz simétrica? ¿Por qué?

a) Sí, porque si la dimensión de A es $m \times n$ entonces la de A^t será $n \times m$, y por tanto, la dimensión de la matriz producto A^tA será $n \times n$.

b) En general, no, porque $(AB)^t = B^tA^t = BA$.

070 **Sean A, B y C tres matrices tales que su producto ABC es una matriz de dimensión 3×2 y su producto AC^t es una matriz cuadrada, siendo C^t la traspuesta de C. Calcula, razonando la respuesta, las dimensiones de A, B y C.**

(Galicia. Septiembre 2006. Bloque 1. Opción 1)

dimensión $(A) = m \times n$ dimensión $(B) = p \times q$ dimensión $(C) = r \times s$

dimensión $(ABC) = 3 \times 2 \rightarrow m = 3$ y $s = 2$, $n = p$ y $q = r$

La matriz AC^t es una matriz cuadrada $\rightarrow n = s$ y $m = r$.

dimensión $(A) = 3 \times 2$ dimensión $(B) = 2 \times 3$ dimensión $(C) = 3 \times 2$

071 **En cada una de las matrices, determina mentalmente cuál es el mayor número de filas y de columnas linealmente independientes.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$ 1 fila y 1 columna

$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow$ 1 fila y 1 columna

$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow$ 2 columnas (1.ª y 2.ª) y 2 filas

$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$ 2 columnas y 2 filas

$E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow$ 1 fila y 1 columna

$F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow$ 1 columna y 1 fila

072 **Calcula el rango de las siguientes matrices.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 porque la segunda columna es proporcional a la primera.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_2 = C_2 - 4C_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_3 = C_3 - \frac{2}{7}C_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 0 \\ 2 & -6 & \frac{12}{7} \end{pmatrix}$$

Como esta matriz es escalonada por columnas, Rango $(B) = 3$.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_2 \leftrightarrow C_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_3 = F_3 - 3F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 = F_3 + 2F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ luego Rango } (C) = 2.$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_2 \leftrightarrow C_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 = F_3 - 4F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_3 = F_3 + 5F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Rango } (D) = 3.$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 = F_3 - F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Como esta matriz es escalonada, Rango $(E) = 3$.

073 **¿Cuál es el mayor número de columnas linealmente independientes de la matriz** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$**?**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_3 = C_3 - 2C_1 - C_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como el rango por columnas es 2, solo hay dos columnas linealmente independientes.

074 **Sabiendo que el rango de la siguiente matriz es 2, determina el valor de *a*.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & -1 \\ -11 & -4 & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & -1 \\ -11 & -4 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[C_3=C_3-C_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & -8 \\ -11 & -4 & a+11 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_3=C_3+4C_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 0 \\ -11 & -4 & a-5 \end{pmatrix}$$

Para que el rango sea 2, como esta matriz es escalonada por columnas, el término $a-5$ debe ser cero; luego $a=5$.

075 **Obtener el valor de *a* para que el rango de la matriz *A* sea igual a 2.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 6 & a \end{pmatrix}$$

(La Rioja. Junio 2003. Propuesta A. Ejercicio 1)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 6 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2=F_2-2F_1 \\ F_3=F_3-4F_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & -6 & -1 \\ 0 & 7 & -6 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3=F_3-F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

Para que el rango sea 2, el término $a+1$ tiene que ser cero, luego $a=-1$.

076 **Halla el valor de *k*, si existe, para que el rango de la matriz** $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 6 \\ 5 & k & -10 \\ 1 & 1/3 & -2 \end{pmatrix}$ **sea 1.**

La tercera columna es proporcional a la primera, luego el rango es, a lo más, 2.
Para que sea 1, la segunda debe ser proporcional a la primera, pero esto es imposible porque: $\frac{1}{-3} \neq \frac{1/3}{1}$.
Luego no hay ningún valor de k para el cual el rango sea 1.

077 **Discútase, según el valor de *a*, el rango de la matriz:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

(Castilla y León. Septiembre 2005. Prueba A. Cuestión 2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2=F_2-2F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3=F_3+\frac{1}{3}F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & a+\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

- Si $a = -\frac{1}{3} \rightarrow$ Rango de la matriz A es 2.
- Si $a \neq -\frac{1}{3} \rightarrow$ Rango de la matriz A es 3.

078 Calcula el rango de A, según los valores del parámetro a.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&a\\2&4&6&8\\3&6&9&12\end{pmatrix}$$

(Extremadura. Junio 2007. Opción A. Ejercicio 3)

$$\begin{pmatrix}1&2&3&a\\2&4&6&8\\3&6&9&12\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{F_2=F_2-2F_1\\F_3=F_3-3F_1}]{}\begin{pmatrix}1&2&3&a\\0&0&0&8-2a\\0&0&0&12-3a\end{pmatrix}$$

- Si $a=4\rightarrow$ Rango de la matriz A es 1.
- Si $a\neq 4\rightarrow$ Rango de la matriz A es 2. El rango no puede ser 3, pues las dos últimas filas de la matriz son proporcionales.

079 Calcule el rango de la matriz A en función de los valores del parámetro k.

$$A=\begin{pmatrix}1&k&1&2\\2&0&-1&1\\-1&1&1&0\end{pmatrix}$$

(Murcia. Septiembre 2006. Bloque 1. Cuestión A)

$$\begin{pmatrix}1&k&1&2\\2&0&-1&1\\-1&1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[F_1\leftrightarrow F_3]{}\begin{pmatrix}-1&1&1&0\\2&0&-1&1\\1&k&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{F_2=F_2+2F_1\\F_3=F_3+F_1}]{}\begin{pmatrix}-1&1&1&0\\0&2&1&1\\0&k+1&2&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[C_2\leftrightarrow C_4]{}\begin{pmatrix}-1&0&1&1\\0&1&1&2\\0&2&2&k+1\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3=F_3-F_2]{}\begin{pmatrix}-1&0&1&1\\0&1&1&2\\0&0&0&k-1\end{pmatrix}$$

- Si $k=1\rightarrow$ Rango de la matriz A es 2.
- Si $k\neq 1\rightarrow$ Rango de la matriz A es 3.

080 Discute el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix}k&1&1\\1&2&k\\-1&3&0\end{pmatrix}$ según los valores de k.

(Baleares. Junio 2006. Opción B. Cuestión 4)

$$\begin{pmatrix}k&1&1\\1&2&k\\-1&3&0\end{pmatrix}\xrightarrow[F_1\leftrightarrow F_3]{}\begin{pmatrix}-1&3&0\\1&2&k\\k&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{F_2=F_2+F_1\\F_3=F_3+kF_1}]{}\begin{pmatrix}-1&3&0\\0&5&k\\0&1+3k&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_3=F_3-\frac{1+3k}{5}F_2]{}\begin{pmatrix}-1&3&0\\0&5&k\\0&0&-\frac{3}{5}k^2-\frac{1}{5}k+1\end{pmatrix}$$

$$-\frac{3}{5}k^2-\frac{1}{5}k+1=0\rightarrow 3k^2+k-5=0\rightarrow k=\frac{-1\pm\sqrt{61}}{6}$$

- Si $k=\dfrac{-1+\sqrt{61}}{6}$ o $k=\dfrac{-1-\sqrt{61}}{6}\rightarrow$ Rango de la matriz A es 2.
- Si $k\neq\dfrac{-1+\sqrt{61}}{6}$ y $k\neq\dfrac{-1-\sqrt{61}}{6}\rightarrow$ Rango de la matriz A es 3.

081 Calcula el rango de A según los distintos valores del parámetro real a.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

(Madrid. Junio 2002. Opción A. Ejercicio 2)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_2 \leftrightarrow C_4]{} \begin{pmatrix} 2 & 2 & a & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & -4 & a+4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_1 \leftrightarrow F_2]{} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & a & 0 \\ 5 & 3 & -4 & a+4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2=F_2+2F_1 \\ F_3=F_3+5F_1}]{} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & a-2 & 0 \\ 0 & 18 & -9 & a+4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_3=F_3-\frac{9}{4}F_2]{} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & a-2 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{9}{4}(a-6) & a+4 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es siempre 3. El parámetro a no puede ser al mismo tiempo igual a 6 e igual a 4, entonces los elementos de la última fila nunca serán todos cero.

082 Discutir, en función del número real m, el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & m \\ 1+m & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(Castilla y León. Septiembre 2007. Prueba B. Cuestión 1)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & m \\ 1+m & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 \leftrightarrow F_3]{} \begin{pmatrix} 2 & 1 & m \\ -2 & -1 & 2 \\ 1+m & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_1 \leftrightarrow C_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1+m & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{F_2=F_2+F_1 \\ F_3=F_3-2F_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 0 & 0 & m+2 \\ 0 & m-3 & 3-2m \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 \leftrightarrow F_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 0 & m-3 & 3-2m \\ 0 & 0 & m+2 \end{pmatrix}$$

- Si $m=-2 \rightarrow$ Rango $(A)=2$, todos los elementos de la última fila son 0.
- Si $m=3 \rightarrow$ Rango $(A)=2$, las filas 2.ª y 3.ª son proporcionales.
- Si $m \neq -2$ y $m \neq 3 \rightarrow$ Rango $(A)=3$

083 Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -m \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix}$. Determine los valores de m para que los Rango $(A)<3$. ¿Puede ser Rango $(A)=1$ para algún valor de m?

(Cataluña. Año 2006. Serie 3. Cuestión 4)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -m \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2=F_2-4F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4-m \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3=F_3-mF_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4-m \\ 0 & 0 & m^2-4m+3 \end{pmatrix}$$

$$m^2-4m+3=0 \rightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=3 \end{cases}$$

- Si $m = 1$ o $m = 3 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$
- Si $m \neq 1$ y $m \neq 3 \rightarrow$ Rango $(A) = 3$

El rango de la matriz no puede ser 1, ya que sus tres filas no son proporcionales para ningún valor del parámetro m.

084 **Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{pmatrix}$. Halla los valores de m para los que el rango de A es menor que 3.**

(Andalucía. Junio 2008. Opción B. Ejercicio 3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 = F_3 - mF_1]{F_2 = F_2 - mF_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m^2 - m & m^2 - m \\ 0 & 0 & m^2 - m \end{pmatrix}$$

$$m^2 - m = 0 \rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$$

- Si $m = 0$ o $m = 1 \rightarrow$ Rango $(A) = 1$
- Si $m \neq 0$ o $m \neq 1 \rightarrow$ Rango $(A) = 3$

085 **Sea $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ b+1 & a & 0 & 0 \\ 0 & b+1 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & b \end{pmatrix}$.**

a) Prueba que, para cualquier valor de a y b, Rango $(A) \geq 2$.

b) Determina un par de valores reales de a y b para que Rango $(A) = 3$, y otro par de valores a y b de forma que Rango $(A) = 4$.

(Cantabria. Junio 2001. Bloque 2. Opción A)

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ b+1 & a & 0 & 0 \\ 0 & b+1 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & b \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 = F_2 - \frac{b+1}{a}F_1]{} \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & -\dfrac{b(b+1)}{a} & 0 \\ 0 & b+1 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & b \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_3 = F_3 - \frac{b+1}{a}F_2]{} \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & -\dfrac{b(b+1)}{a} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{b(b+1)^2}{a^2} & a \\ 0 & 0 & a & b \end{pmatrix} \xrightarrow[C_3 \leftrightarrow C_4]{} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & -\dfrac{b(b+1)}{a} \\ 0 & 0 & a & \dfrac{b(b+1)^2}{a^2} \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_4 = F_4 - \frac{b}{a}F_3]{} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & -\dfrac{b(b+1)}{a} \\ 0 & 0 & a & \dfrac{b(b+1)^2}{a^2} \\ 0 & 0 & 0 & a - \dfrac{b^2(b+1)^2}{a^3} \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4 = a^3F_4]{} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & -\dfrac{b(b+1)}{a} \\ 0 & 0 & a & \dfrac{b(b+1)^2}{a^2} \\ 0 & 0 & 0 & a^4 - b^2(b+1)^2 \end{pmatrix}$$

a) • Si $a \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) \geq 3$.

• Si $a = 0 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b & 0 \\ b+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ para cualquier valor de b al menos

hay 2 filas distintas de cero y que no son proporcionales $\rightarrow$ Rango $(A) \geq 2$.

b) • Si $a = \sqrt{2}$ y $b = 1$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & -\dfrac{b(b+1)}{a} \\ 0 & 0 & a & \dfrac{b(b+1)^2}{a^2} \\ 0 & 0 & 0 & a^4 - b^2(b+1)^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{a=\sqrt{2},\, b=1} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rango $(A) = 3$, pues $a^4 - b^2(b+1)^2 = 0$.

• Si $a = 1$ y $b = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & -\dfrac{b(b+1)}{a} \\ 0 & 0 & a & \dfrac{b(b+1)^2}{a^2} \\ 0 & 0 & 0 & a^4 - b^2(b+1)^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{a=1,\, b=0} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

En este caso el rango de la matriz es 4.

086 **Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.**

Vemos que ambas tienen rango máximo, o sea 2. Determinar los valores de c tales que la matriz $A + cB$ no tenga rango 2. ¿Cuál es el rango que tienen las respectivas matrices suma?

(Aragón. Septiembre 2003. Opción B. Cuestión 1)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+c & -1 \\ 4(1+c) & 2-c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1+c & -1 \\ 4(1+c) & 2-c \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 = F_2 - 4F_1]{} \begin{pmatrix} 1+c & -1 \\ 0 & 6-c \end{pmatrix}$$

• Si $c = -1$ o $c = 6$, el rango de la matriz no es 2.

– Si $c = -1 \rightarrow$ Rango de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ es 1.

– Si $c = 6 \rightarrow$ Rango de la matriz $\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 28 & -4 \end{pmatrix}$ es 1.

• Si $c \neq -1$ y $c \neq 6 \rightarrow$ Rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1+c & -1 \\ 4(1+c) & 2-c \end{pmatrix}$ es 2.

087 Sean A y B las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&1&0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

Es fácil comprobar que ambas tienen el máximo rango, o sea 3. Pero ¿qué ocurre si las combinamos linealmente? En concreto, estudia el rango de la matriz $A+\lambda B$ según los valores del parámetro λ.

(Aragón. Septiembre 2002. Opción A. Cuestión 1)

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&1&0\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\lambda&1+\lambda\\\lambda&2+\lambda&0\\1&1&2\lambda\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&\lambda&1+\lambda\\\lambda&2+\lambda&0\\1&1&2\lambda\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{F_2=F_2-\lambda F_1\\F_3=F_3-F_1}]{}\begin{pmatrix}1&\lambda&1+\lambda\\0&2+\lambda-\lambda^2&-\lambda-\lambda^2\\0&1-\lambda&\lambda-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[C_2=C_2+C_3]{}\begin{pmatrix}1&1+2\lambda&1+\lambda\\0&2-2\lambda^2&-\lambda-\lambda^2\\0&0&\lambda-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1+2\lambda&1+\lambda\\0&2-2\lambda^2&-\lambda-\lambda^2\\0&0&\lambda-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1+2\lambda&1+\lambda\\0&2(1+\lambda)(1-\lambda)&-\lambda(1+\lambda)\\0&0&\lambda-1\end{pmatrix}$$

- Si $\lambda=1\rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix}1&3&2\\0&0&-2\\0&0&0\end{pmatrix}=2$
- Si $\lambda=-1\rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\0&0&-2\end{pmatrix}=2$
- Si $\lambda\neq1$ y $\lambda\neq-1\rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix}1&\lambda&1+\lambda\\\lambda&2+\lambda&0\\1&1&2\lambda\end{pmatrix}=3$

088 Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\\2&2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-2&2&0\\3&-1&1\end{pmatrix}$, ¿es cierto que

Rango (AB) = Rango $(A)\cdot$ Rango (B)? Justifica tu respuesta.

(Canarias. Junio 2002. Opción A. Cuestión 3)

$$AB=\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\\2&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&2&0\\3&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&2&0\\-5&3&-1\\2&2&2\end{pmatrix}$$

Rango $(AB)\leq 3$, Rango $(A)=2$ y Rango $(B)=2\rightarrow$ Es imposible que se verifique la igualdad.

089 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Encuentra dos matrices, B y C, de tamaño 3×2 y de rango 2, tales que el rango de AB sea 2 y el rango de AC sea 1.

(Navarra. Septiembre 2007. Grupo 1. Opción B)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Respuesta abierta.

- Si $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$ Rango $(AB) = 2$
- Si $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ Rango $(AC) = 1$

090 Una matriz cuadrada de orden 3 tiene rango 2.

a) ¿Cuál es el rango de la matriz que resulta al quitar una fila?

b) ¿Cuál es el rango de la matriz que resulta al eliminar una columna?

c) ¿Qué sucedería en los casos anteriores si el rango de la matriz inicial fuera 3?

a) El rango de la matriz es 2 si eliminamos una fila que depende linealmente de las otras y es 1 si las dos filas que dejamos son proporcionales.

b) El rango de la matriz es 2 si eliminamos una columna que depende linealmente de las otras y es 1 si las dos columnas que dejamos son proporcionales.

c) En este caso, el rango siempre sería 2, porque las dos líneas que dejamos son siempre linealmente independientes.

091 Calcula la matriz inversa de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicamos el método de reducción o de Gauss-Jordan:

a) $$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 = \frac{1}{2}F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1/2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 = F_2 + F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 2 & 1/2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_2 = \frac{1}{2}F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & 1/2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 = F_1 + 2F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/4 & 1/2 \end{array}\right)$$

La inversa de la matriz A es: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$

b) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2=F_2+F_1 \\ F_3=F_3-2F_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[\substack{F_2=\frac{1}{2}F_2 \\ F_3=-\frac{1}{3}F_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 0 & -1/3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_1=F_1-F_3 \\ F_2=F_2-2F_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -5/6 & 1/2 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 0 & -1/3 \end{array}\right)$

La inversa de la matriz B es: $\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ -5/6 & 1/2 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$

c) Como la matriz C es la unidad, su inversa es ella misma.

092 **Halla la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.**

(Navarra. Junio 2004. Grupo 1. Opción B)

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3=F_3-2F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[\substack{F_1=F_1-2F_2 \\ F_3=F_3+3F_2}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_1=F_1+F_3 \\ F_2=F_2-F_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right)$

La matriz inversa de A es: $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

093 **Calcular, si es posible, la inversa de la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$**

(Murcia. Junio 2008. Bloque 1. Cuestión A)

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=F_2+F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[\substack{F_1=F_1-\frac{2}{5}F_2 \\ F_3=F_3+\frac{2}{5}F_2}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4/5 & 3/5 & -2/5 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/5 & 2/5 & 2/5 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_1=F_1-4F_3 \\ F_2=F_2-15F_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 5 & 0 & -5 & -5 & -15 \\ 0 & 0 & -1/5 & 2/5 & 2/5 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[\substack{F_2=\frac{1}{5}F_2 \\ F_3=-5F_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1/5 & -2 & -2 & -5 \end{array}\right)$

La matriz inversa de A es: $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -1 & -3 \\ -2 & -2 & -5 \end{pmatrix}$

094 Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$, calcula $(A^{-1})^{-1}$ y $B^{-1}B$.

¿Por qué se obtiene este resultado?

Por la definición de matriz inversa: $(A^{-1})^{-1}A^{-1}=I$; multiplicando a la derecha por A los dos miembros, se obtiene $(A^{-1})^{-1}=A$.

Por definición de matriz inversa: $B^{-1}B=I$.

095 Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & -4\\ -1 & 4\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Comprueba que $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

b) Calcula $(B^2)^{-1}$, de la manera más rápida posible.

a) $(AB)^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1/2 & 0\\ 1/4 & 1/2\end{pmatrix}$ $\qquad B^{-1}A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1/4 & 1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2 & 0\\ 1/4 & 1/2\end{pmatrix}$

b) $(B^2)^{-1}=(BB)^{-1}=B^{-1}B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -4\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

096 Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, calcula $(A^tA^{-1})^2\,A$.

(Andalucía. Junio 2000. Opción A. Ejercicio 4)

$$(A^tA^{-1})^2A=A^tA^{-1}A^tA^{-1}A=A^tA^{-1}A^t$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[F_2=F_2-3F_1]{}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -3 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[F_1=F_1+F_2]{}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -2 & 1\\ 0 & -2 & -3 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_2=-\frac{1}{2}F_2]{}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2\end{array}\right)\rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3/2 & -1/2\end{pmatrix}$$

$$A^tA^{-1}A^t=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3/2 & -1/2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5/2 & -1/2\\ 2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3/2 & 11/2\\ 2 & 6\end{pmatrix}$$

097 Comprueba que la inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ es la matriz

$A^{-1}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -3 & 5\\ -1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & -2\end{pmatrix}$.

(Baleares. Junio 2005. Opción B. Cuestión 4)

Para comprobar que una matriz es la inversa de otra, basta con multiplicar las matrices y ver que el resultado es la identidad.

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1 & 3 & 5\\ -1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & -2\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}A=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1 & 3 & 5\\ -1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

098 Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & 1 & m \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donde $m \in \mathbb{R}$. Determina para qué valores de m la matriz A es regular (inversible).

(Cantabria. Septiembre 2007. Bloque 2. Opción B)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & m & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & m & 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2 = F_2 - F_1 \\ F_3 = F_3 - mF_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & m & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2m & 1-m^2 & -m & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{F_1 = F_1 + 2F_2 \\ F_3 = F_3 - 2mF_2}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & m & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-m^2 & m & -2m & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1 = F_1 - \frac{m}{1-m^2}F_3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/(1-m^2) & 2/(1-m^2) & -m/(1-m^2) \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-m^2 & m & -2m & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{F_2 = -F_2 \\ F_3 = \frac{1}{1-m^2}F_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/(1-m^2) & 2/(1-m^2) & -m/(1-m^2) \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & m/(1-m^2) & -2m/(1-m^2) & 1/(1-m^2) \end{array}\right)$$

La inversa, si existe, de la matriz A es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/(1-m^2) & 2/(1-m^2) & -m/(1-m^2) \\ 1 & -1 & 0 \\ m/(1-m^2) & -2m/(1-m^2) & 1/(1-m^2) \end{pmatrix}$$

Para poder calcular la inversa tenemos que dividir entre $(1 - m^2)$, luego esta expresión no puede ser cero. Es decir, la matriz A es invertible cuando $(1 - m^2) \neq 0 \rightarrow m \neq 1$ y $m \neq -1$.

099 **Estudia para qué valores de m la matriz siguiente tiene inversa:**

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ m & 0 & m \end{pmatrix}$$

En caso de ser posible, halla su inversa para $m = -1$.

(Castilla-La Mancha. Año 2005. Supuesto 4. Bloque 3. Pregunta B)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} m & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & m & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 = F_3 - F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} m & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m-1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{F_1 = F_1 - \frac{1}{m-1}F_3 \\ F_2 = F_2 - \frac{1}{m-1}F_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} m & 0 & 0 & m/(m-1) & 0 & -1/(m-1) \\ 0 & 1 & 0 & 1/(m-1) & 1 & -1/(m-1) \\ 0 & 0 & m-1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{F_1 = \frac{1}{m_1}F_1 \\ F_3 = \frac{1}{m-1}F_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/(m-1) & 0 & -1/(m(m-1)) \\ 0 & 1 & 0 & 1/(m-1) & 1 & -1/(m-1) \\ 0 & 0 & 1 & -1/(m-1) & 0 & 1/(m-1) \end{array}\right)$$

100 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Estudia, en función de los valores reales de k, si la matriz BA tiene inversa.

b) Haz lo mismo para la matriz AB.

(Asturias. Septiembre 2006. Bloque 1)

a) $BA = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & -1 \\ 3 & k+2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} k & -1 \\ 3 & k+2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1 \leftrightarrow F_2]{} \begin{pmatrix} 3 & k+2 \\ k & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 = F_2 - \frac{k}{3}F_1]{} \begin{pmatrix} 3 & k+2 \\ 0 & -\frac{k^2}{3} - \frac{2k}{3} - 1 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{k^2}{3} - \frac{2k}{3} - 1 = 0 \to k^2 + 2k + 3 = 0$$

$$\to k = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2} \to \text{No tiene solución.}$$

Como BA es una matriz de orden 2 y su rango siempre es 2, tiene matriz inversa siempre.

b) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 3k & k & 2k-2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 3k & k & 2k-2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1 \leftrightarrow F_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3k & k & 2k-2 \\ k & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 = F_2 - 3kF_1 \\ F_3 = F_3 - kF_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2k & -4k-2 \\ 0 & -k & -2k-1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_3 = F_3 - \frac{1}{2}F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2k & -4k-2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como AB es una matriz de orden 3 y su rango es $2 < 3$, esta matriz no tiene inversa.

101 Se consideran las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, donde m es un número real. Encuentra los valores de m para los que AB tiene inversa.

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2005. Bloque 3. Pregunta B)

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2m & 2+2m \\ 1-m & 0 \end{pmatrix}$$

- Si $m = 1 \to \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ no tiene inversa ya que su rango es 1.
- Si $m = -1 \to \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ no tiene inversa ya que su rango es 1.
- Si $m \neq 1$ y $m \neq -1$ el rango de la matriz es 2, y por tanto, la matriz tiene inversa.

102 **En la matriz A determina a, b y c para que su traspuesta coincida con su inversa.** $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ a & b & c\end{pmatrix}$

$A^t=A^{-1}\rightarrow AA^t=AA^{-1}\rightarrow AA^t=I$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ a & b & c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & a\\ 0 & 1/\sqrt{2} & b\\ 0 & 1/\sqrt{2} & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & a\\ 0 & 1 & \dfrac{b+c}{\sqrt{2}}\\ a & \dfrac{b+c}{\sqrt{2}} & a^2+b^2+c^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Multiplicando e igualando términos se obtiene este sistema de ecuaciones.

$$\left.\begin{aligned}a&=0\\ \frac{b+c}{\sqrt{2}}&=0\\ a^2+b^2+c^2&=1\end{aligned}\right\}\xrightarrow{a=0}\left.\begin{aligned}b&=-c\\ b^2+c^2&=1\end{aligned}\right\}\xrightarrow{a=0,\,b=-c}c^2+c^2=1\rightarrow c=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Hay dos soluciones: $c=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ b=-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ a=0$ $\qquad c=-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ b=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ a=0$

103 **Comprueba y contesta.**

a) Si A es una matriz no singular y $(B-C)A=0$, siendo 0 la matriz nula, comprueba que $B=C$.

b) Según el resultado del apartado anterior, cuando $A=\begin{pmatrix}2 & -6\\ -1 & 3\end{pmatrix}$, la única matriz X que verifica la ecuación $XA=0$ es la matriz nula. ¿Es cierta esta afirmación? ¿Por qué?

Nota: Matriz singular es aquella que no tiene inversa.

(Asturias. Junio 2003. Bloque 2)

a) $(B-C)A=0\rightarrow BA-CA=0\rightarrow BA=CA\rightarrow BAA^{-1}=CAA^{-1}\rightarrow B=C$

b) La afirmación es falsa, pues el apartado a) requiere la condición de que la matriz A sea no singular, sin embargo, en este caso Rango $(A)=1$, con lo que la matriz es singular.

$$\begin{pmatrix}2 & -6\\ -1 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow[F_2=F_2+\frac{1}{2}F_1]{}\begin{pmatrix}2 & -6\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

104 **Despeja la matriz X de la ecuación $AX=B$ y calcúlala siendo $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$.**

Se multiplican por la izquierda por la inversa de A los dos miembros de la ecuación, que existe por ser Rango $(A)=2$.

$A^{-1}AX=A^{-1}B\rightarrow X=A^{-1}B$

Por lo tanto: $X=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 5\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$

105 Dadas las matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, hállese razonadamente la matriz B sabiendo que $BP = A$.

(Castilla y León. Junio 2006. Prueba B. Cuestión 1)

$$BP = A \rightarrow B = AP^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2 = F_2 + F_1 \\ F_3 = F_3 + F_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1 = F_1 - F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_1 = F_1 + F_3 \\ F_2 = F_2 - F_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$B = AP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

106 Calcula la matriz A que haga que: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

(La Rioja. Septiembre 2006. Propuesta A. Ejercicio 3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 = F_2 - \frac{5}{2}F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 = F_1 - 2F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{F_1 = \frac{1}{2}F_1 \\ F_2 = 2F_2}]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

107 Calcula la matriz X tal que $A^2X = A$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(Extremadura. Septiembre 2007. Opción B. Ejercicio 3)

$$A^2X = A \rightarrow AX = I \rightarrow X = A^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 = F_2 - F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 = F_1 + 2F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_2 = -F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$X = A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

108 Hallar una matriz X tal que $A^{-1}XA = B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(Madrid. Junio 2005. Opción B. Ejercicio 2)

$$A^{-1}XA = B \rightarrow XA = AB \rightarrow X = ABA^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=F_2+\frac{2}{3}F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1=F_1+3F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1=F_1+3F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_1=\frac{1}{3}F_1 \\ F_2=-3F_2}]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

$$X = ABA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$$

109 Determina, si existe, una matriz A que verifique: $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1=F_1-\frac{1}{3}F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_1=-F_1 \\ F_2=\frac{1}{3}F_2}]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=F_2+2F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1=F_1-\frac{1}{2}F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_2=\frac{1}{4}F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/4 \end{array}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2/3 & -2 \\ 2/3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5/6 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$

110 Encuentra una matriz X que verifique $AX + B = I$, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad.

$$AX + B = I \rightarrow AX = I - B \rightarrow X = A^{-1}(I - B)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 \leftrightarrow F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=-F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$X = A^{-1}(I - B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

111 Considera las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Calcula la matriz X que verifica $AX + B = I$, donde I representa la matriz identidad.

(Baleares. Septiembre 2007. Opción A. Cuestión 1)

$$AX + B = I \rightarrow AX = I - B \rightarrow X = A^{-1}(I - B)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 = F_2 - 2F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1 = F_1 + \frac{1}{3}F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 = F_1 - F_3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_2 = \frac{1}{3}F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$X = A^{-1}(I - B) = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & -1 \\ -2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & -1 \\ -2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 & 1 & -2/3 \\ -2/3 & 0 & 1/3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

112 Resuelve la ecuación matricial $XA + B = C$, donde $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$.

$$XA + B = C \rightarrow XA = C - B \rightarrow X = (C - B)A^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 \leftrightarrow F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 = F_3 + F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1 = F_1 - \frac{1}{2}F_3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_1 = \frac{1}{2}F_1 \\ F_2 = \frac{1}{3}F_2 \\ F_3 = \frac{1}{2}F_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/4 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$X = (C - B)A^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -1 & 4 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -1/4 & 1/2 & -1/4 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ -6 & 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/4 & 1/2 & -1/4 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41/12 & -3/2 & 11/4 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

113 Resuelve la ecuación matricial $AX + C = B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

(Galicia. Septiembre 2005. Bloque 1. Pregunta 1)

$$AX + C = B \rightarrow AX = B - C \rightarrow X = A^{-1}(B - C)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 \leftrightarrow F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 = F_2 + 4F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1 = -F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$X = A^{-1}(B - C) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 & 0 \\ -11 & -1 & 14 & -2 \end{pmatrix}$$

114 Razona si existe la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y, en caso afirmativo, calcúlala.

Resuelve la ecuación matricial $AX + 2A = I$, donde X es una matriz de orden 3 e I es la matriz identidad de orden 3.

(Castilla-La Mancha. Año 2007. Supuesto 3. Bloque 3. Pregunta A)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_1 = C_1 + 2C_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Rango }(A) = 3 \rightarrow \text{La matriz } A \text{ tiene inversa.}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 = F_3 - 2F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{F_1 = F_1 - F_2 \\ F_3 = F_3 + 2F_2}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 = -F_3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$AX + 2A = I \rightarrow AX = I - 2A \rightarrow X = A^{-1}(I - 2A)$$

$$X = A^{-1}(I - 2A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

115 Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7\\2\\-2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ y $E=\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}$. Calcular $M=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ para que verifique la ecuación $(AB^t+C)M=E$.

(Castilla y León. Junio 2007. Prueba B. Problema 1)

$$(AB^t+C)M=E$$

$$\left[\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7&2&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]\cdot M=\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}\rightarrow\left[\begin{pmatrix}7&2&-2\\14&4&-4\\21&6&-6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]\cdot M=\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}7&2&-2\\14&5&-4\\21&6&-5\end{pmatrix}\cdot M=\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}\rightarrow M=\begin{pmatrix}7&2&-2\\14&5&-4\\21&6&-5\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}7&2&-2&1&0&0\\14&5&-4&0&1&0\\21&6&-5&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{F_2=F_2-2F_1\\F_3=F_3-3F_1}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}7&2&-2&1&0&0\\0&1&0&-2&1&0\\0&0&1&-3&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1=F_1-2F_2]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}7&0&-2&5&-2&0\\0&1&0&-2&1&0\\0&0&1&-3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_1=F_1+2F_3]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}7&0&0&-1&-2&2\\0&1&0&-2&1&0\\0&0&1&-3&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1=\frac{1}{7}F_1]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1/7&-2/7&2/7\\0&1&0&-2&1&0\\0&0&1&-3&0&1\end{array}\right)$$

$$M=\begin{pmatrix}7&2&-2\\14&5&-4\\21&6&-5\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/7&-2/7&2/7\\-2&1&0\\-3&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12/7\\1\\-3\end{pmatrix}$$

116 Sean X una matriz 2×2, I la matriz identidad 2×2 y $B=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}$. Hallar X sabiendo que $BX+B=B^2+I$.

(Castilla y León. Septiembre 2007. Prueba A. Cuestión 1)

$$BX+B=B^2+I\rightarrow B(X+I)=B^2+I\rightarrow X+I=B^{-1}(B^2+I)\rightarrow X=B^{-1}(B^2+I)-I$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}2&1&1&0\\0&1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_1=F_1-F_2]{}\left(\begin{array}{cc|cc}2&0&1&-1\\0&1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_1=\frac{1}{2}F_1]{}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1/2&-1/2\\0&1&0&1\end{array}\right)$$

$$X=B^{-1}(B^2+I)-I=\begin{pmatrix}1/2&-1/2\\0&1\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right]-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1/2&-1/2\\0&1\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}4&3\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right]-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1/2&-1/2\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5&3\\0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}5/2&1/2\\0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3/2&1/2\\0&1\end{pmatrix}$$

117 Resolver la ecuación matricial $B(2A+I)=AXA+B$, siendo:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix} \qquad I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

(Canarias. Septiembre 2007. Opción A. Cuestión 3)

$$B(2A+I)=AXA+B \to 2BA+B-B=AXA \to 2B=AX \to 2A^{-1}B=X$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow[F_1=F_1+F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$X=2A^{-1}B=2\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & -2\end{pmatrix}$$

118 Calcular una matriz cuadrada X sabiendo que verifica $XA^2+BA=A^2$, siendo:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}0 & 0 & -2\\ 0 & -2 & 0\\ -2 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

(Madrid. Septiembre 2007. Opción B. Ejercicio 1)

$$XA^2+BA=A^2 \to XA^2=A^2-BA \to XA=A-B \to X=I-BA^{-1}$$

$$B=\begin{pmatrix}0 & 0 & -2\\ 0 & -2 & 0\\ -2 & 0 & 0\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}=2A$$

$$X=I-BA^{-1} \to I-2AA^{-1}=I-2I=-I=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

119 Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & x\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

Halla x para que se cumpla $A^2+B^2=\begin{pmatrix}8 & 8\\ 6 & 12\end{pmatrix}$.

$$A^2+B^2=\begin{pmatrix}8 & 8\\ 6 & 12\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & x\\ 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & x\\ 2 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 8\\ 6 & 12\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}1+2x & 2x\\ 4 & 1+2x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 8\\ 6 & 12\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}2x+2 & 2x+2\\ 6 & 2x+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 8\\ 6 & 12\end{pmatrix} \to \left.\begin{array}{l}2x+2=8\\ 2x+6=12\end{array}\right\} \to x=3$$

120 Resolver los sistemas matriciales.

a) $\left.\begin{array}{r}2X+Y=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\\ X-Y=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 5 & -4\end{pmatrix}\end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r}X+Y=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -4 & 2\end{pmatrix}\\ 3Y-X=\begin{pmatrix}-2 & 8\\ 12 & 2\end{pmatrix}\end{array}\right\}$

a)
$$\left.\begin{aligned} 2X+Y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ + \quad X-Y &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$
$$3X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 4/3 & -1 \end{pmatrix}$$
$$Y = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 4/3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & -2 \\ -11/3 & 3 \end{pmatrix}$$

b)
$$\left.\begin{aligned} X+Y &= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \\ + \quad -X+3Y &= \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 12 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$
$$4Y = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ -16 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow Y = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ -16 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$
$$X = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

121 Resolver el siguiente sistema matricial:

$$\left.\begin{aligned} 2A+3B &= \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 7 & 11 \end{pmatrix} \\ 5A-2B &= \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 8 & 18 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$

(Canarias. Septiembre 2006. Opción A. Cuestión 3)

$$\left.\begin{aligned} 2A+3B &= \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 7 & 11 \end{pmatrix} \\ 5A-2B &= \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 8 & 18 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 4A+6B &= 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 7 & 11 \end{pmatrix} \\ + \quad 15A-6B &= 3 \cdot \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 8 & 18 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$
$$19A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 7 & 11 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 8 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 & 19 \\ 38 & 76 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$
$$2B = 5A - \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 8 & 18 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 8 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

122 Razona si las soluciones de las siguientes ecuaciones matriciales son correctas. Consideramos 0 como la matriz nula.

a) $X^2 = 0 \longrightarrow$ Solución $X = 0$

b) $XA = 0 \longrightarrow$ Solución $X = 0$

c) $X^2 = AX \rightarrow$ Solución $X = A$

a) No es correcta porque hay matrices no nulas que multiplicadas por sí mismas dan la matriz cero; por ejemplo, las matrices de orden 2 del tipo $\begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Si la matriz A tiene inversa, la única solución es $X = 0$. Si no existe A^{-1} puede haber otras soluciones, tal como sucede en el caso anterior.

c) Escribiendo la ecuación en la forma:

$$X^2 - AX = 0 \rightarrow X(X - A) = 0$$

se ve que puede haber otras soluciones.

123 **Si una matriz cuadrada A verifica $A^2 + 7A = I$, siendo I la matriz unidad, calcula A^{-1} en función de A.**

$$A^2 + 7A = I \rightarrow A(A + 7I) = I \rightarrow A^{-1} = A + 7I$$

124 **Sean A una matriz cuadrada de orden n tal que $A^2 = A$, I la matriz unidad de orden n y $B = 2A - I$. Calcula B^2.**

$$B = 2A - I \rightarrow B^2 = (2A - I)(2A - I) = 4A^2 - 2A - 2A + I = 4A - 4A + I = I$$

125 **Si A y B son dos matrices cuadradas de orden 3 y A es diagonal, ¿se verifica $AB = BA$ para cualquier matriz B? ¿Cómo debería ser A para que se cumpliera esta igualdad?**

No siempre se verifica $AB = BA$; por ejemplo:

$$AB = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Veamos cómo debe ser A para que se verifique siempre la igualdad:

$$AB = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab_{11} & ab_{12} & ab_{13} \\ bb_{21} & bb_{22} & bb_{23} \\ cb_{31} & cb_{32} & cb_{33} \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab_{11} & bb_{12} & cb_{13} \\ ab_{21} & bb_{22} & cb_{23} \\ ab_{31} & bb_{32} & cb_{33} \end{pmatrix}$$

La igualdad de estas matrices implica $a = b = c$. Luego la matriz A debe ser de la forma $A = aI$.

PREPARA TU SELECTIVIDAD

1 Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & k & t \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Hallar A^{10}.

b) Calcular la matriz inversa de B.

c) En el caso particular $k = 0$, hallar B^{10}.

(Madrid. Septiembre 2005. Opción B. Ejercicio 4)

a) $$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En general: $A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ para $n \geq 3 \rightarrow A^{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & k & t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 = F_1 - kF_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & t-k^2 & 1 & -k & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{F_1 = F_1 - (t-k^2)F_3 \\ F_2 = F_2 - kF_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -k & k^2 - t \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -k & k^2 - t \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En general: $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & nt \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow B^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2 Sea A la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Para cada número natural n, hallar A^n.

Calcular $A^{22} - 12A^2 + 2A$.

(País Vasco. Junio 2006. Bloque A. Cuestión A)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En general: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A^{22} - 12A^2 + 2A = \begin{pmatrix} 1 & 22a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 12 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix} = -9I$$

3 Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, hállense las matrices X que satisfacen $XC + A = C + A^2$.

(Castilla y León. Junio 2005. Prueba B. Cuestión 1)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

La matriz C tiene inversa por ser de rango 3.

$$XC + A = C + A^2 \rightarrow XC = C + A^2 - A \rightarrow X = (C + A^2 - A)C^{-1}$$

$$\rightarrow X = CC^{-1} = I \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4 Encuentra las matrices A y B, sabiendo que verifican las ecuaciones matriciales:

$$\left.\begin{array}{r} 2A + 3B = M \\ -A + \ \ B = N \end{array}\right\}, \text{ siendo } M = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 18 & 11 & -6 \\ 8 & 3 & 13 \end{pmatrix} \text{ y } N = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 6 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$

(Castilla-La Mancha. Año 2005. Supuesto 3. Bloque 3. Cuestión B)

$$\left.\begin{array}{r} 2A + 3B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 18 & 11 & -6 \\ 8 & 3 & 13 \end{pmatrix} \\ -A + \ \ B = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 6 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 4 & 13 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 2A + 3B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 18 & 11 & -6 \\ 8 & 3 & 13 \end{pmatrix} \\ + \quad -2A + 2B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 9 & -2 & 6 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 4 & 13 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

$$5B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 18 & 11 & -6 \\ 8 & 3 & 13 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 9 & -2 & 6 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 4 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 0 & 19 \\ 52 & 13 & -26 \\ 26 & 11 & 39 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 26/5 & 0 & 19/5 \\ 52/5 & 13/5 & -26/5 \\ 26/5 & 11/5 & 39/5 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} 2A+3B=\begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 18 & 11 & -6 \\ 8 & 3 & 13 \end{pmatrix} \\ -3A+3B=3\cdot\begin{pmatrix} 9 & -2 & 6 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 4 & 13 \end{pmatrix} \end{array}\right\} -$$

$$5A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 18 & 11 & -6 \\ 8 & 3 & 13 \end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix} 9 & -2 & 6 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 4 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 & 10 & -11 \\ -33 & 8 & 24 \\ -19 & -9 & -26 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -19/5 & 10/5 & -11/5 \\ -33/5 & 8/5 & 24/5 \\ -19/5 & -9/5 & -26/5 \end{pmatrix}$$

5 Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Comprueba que verifica que $A^3 - I = 0$, con I matriz identidad y 0 matriz nula.

b) Calcula A^{13}.

c) Basándote en los apartados anteriores y sin recurrir al cálculo de inversas, halla la matriz X que verifica la igualdad $A^2X + I = A$.

(Asturias. Septiembre 2007. Bloque 1)

a) $$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego se verifica que $A^3 - I = 0$.

b) $A^3 = I \rightarrow A^{12} = I \rightarrow A^{13} = A^{12}A = A$

c) $A^2X + I = A \rightarrow A^2X = A - I \rightarrow A^3X = A(A - I)$

$$X = A^2 - A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6 Sean A, B e I las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Estudiar si existe algún valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ para el cual se satisfaga $(A - \lambda I)^2 = B$.

(Aragón. Junio 2008. Bloque 1. Opción A)

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda^2+2 & 1-2\lambda & -2\lambda \\ 1-2\lambda & 2-2\lambda+\lambda^2 & 1 \\ -2\lambda & 1 & \lambda^2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Igualamos elemento a elemento y resolvemos las ecuaciones que resultan.

$$\left.\begin{array}{r} \lambda^2+2=6 \\ 1-2\lambda=-3 \\ -2\lambda=-4 \\ 2-2\lambda+\lambda^2=2 \\ \lambda^2+1=5 \end{array}\right\} \to \lambda = 2$$

7 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m \\ 0 & -1 & m+1 \end{pmatrix}$:

a) Estudia, según los valores de m, el rango de A.

b) Para $m = -1$, calcula la matriz X que verifica $XA + A = 2I$, siendo I la matriz unidad de orden 3.

(Galicia. Septiembre 2007. Bloque 1. Opción 1)

a) $\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m \\ 0 & -1 & m+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 \leftrightarrow F_3]{} \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & -1 & m+1 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$

Si $m = 0 \to$ Rango $A = 1$, solo hay una fila con elementos distintos de 0.

Si $m \neq 0 \to$ Rango $A = 3$.

b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Existe A^{-1} por ser Rango $(A) = 3$.

$XA + A = 2I \to XA = 2I - A \to X = (2I - A)A^{-1}$

$$\to X = 2A^{-1} - I = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$