EJERCICIOS DE MATRICES

Ejercicio 1.-

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, **calcula:**

a) $-2A + 3B$ **b)** $\frac{1}{2} A \cdot B$ **c)** $B \cdot (-A)$ **d)** $A \cdot A - B \cdot B$

a) $\begin{pmatrix} -23 & 4 \\ -12 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -17/2 & -2 \\ -11/2 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 21 & -6 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 43 & -16 \\ 24 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & -16 \\ 22 & -9 \end{pmatrix}$

Ejercicio 2.-

Efectúa el producto $(-3 \quad 2)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$(7 \quad 7)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (7)$

Ejercicio 3.-

a) ¿Son iguales las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ **y** $B = (2 \quad 3)$**?**

b) Halla, si es posible, las matrices AB; BA; $A + B$; $A^t - B$.

a) No, A tiene dimensión 2×1 y B tiene dimensión 1×2. Para que dos matrices sean iguales, deben tener la misma dimensión y coincidir término a término.

b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$; $B \cdot A = (1 \quad 3)$; $A + B$ no se puede hacer, pues no tienen la misma dimensión.

$A^t - B = (2 \quad 3) - (2 \quad 3) = (0 \quad 0)$

Ejercicio 4.-

Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **comprueba que:**

a) $(A + B)^t = A^t + B^t$

b) $(3A)^t = 3A^t$

$$\left.\begin{array}{l} \text{a) } (A + B)^t = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A^t + B^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} (A + B)^t = A^t + B^t$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{b) } (3A)^t = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 9 & 0 & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -6 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \\ 3A^t = 3\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -6 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \end{array}\right\} (3A)^t = 3A^t$$

Ejercicio 5.-

Calcula $3AA^t - 2I$, siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

$$3A\,A^t - 2I = 3\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 10 & 17 \\ 17 & 29 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 30 & 51 \\ 51 & 87 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 51 \\ 51 & 85 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6.-

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, comprueba que $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.

$$\left.\begin{array}{l} A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \\ B^t \cdot A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} (A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$$

Ejercicio 7.-

Calcula, en cada caso, la matriz B que verifica la igualdad:

a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

b) $2\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - 3B = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $2\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - 3B = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; 3B = 2\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 4/3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 8.-

Comprueba que la matriz inversa de A es A^{-1}:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$A \cdot A^{-1} = I$

Ejercicio 9.-

¿Cuál es la matriz inversa de la matriz unidad?

La matriz unidad, I.

Ejercicio 10.-

Halla las matrices X e Y que verifican el sistema

$$2X+Y=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 0\end{pmatrix},\quad X-Y=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

$$\left.\begin{aligned} 2X+Y&=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 0\end{pmatrix}\\ X-Y&=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\end{aligned}\right\}$$ Sumando las dos ecuaciones, queda:

$$3X=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 0\end{pmatrix} \;\rightarrow\; X=\begin{pmatrix}2/3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Despejamos Y en la 2ª ecuación:

$$Y=X-\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/3 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Por tanto, $X=\begin{pmatrix}2/3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ y $Y=\begin{pmatrix}-1/3 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

Ejercicio 11.-

Calcula X tal que $X-B^2=A\cdot B$, siendo:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$X=A\cdot B+B^2$

$$\left.\begin{aligned} A\cdot B&=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\\ B^2&=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\end{aligned}\right\}\; X=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 4 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

Ejercicio 12.-

Determina los valores de m para los cuales

$X=\begin{pmatrix}m & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ verifique $X^2-\frac{5}{2}X+I=0$.

$$X^2-\frac{5}{2}X+I=\begin{pmatrix}m & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}-\frac{5}{2}\begin{pmatrix}m & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}m^2 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}-\frac{5}{2}\begin{pmatrix}m & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m^2-(5/2)m+1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Tiene que cumplirse que:

$$m^2-\frac{5}{2}m+1=0 \;\rightarrow\; 2m^2-5m+2=0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow \quad m = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} m = 2 \\ m = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $m_1 = 2; \; m_2 = \frac{1}{2}$

Ejercicio 13.-

Resuelve: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x - y \\ 3x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 2x \\ 3y - 2 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x - y = 3 + 2x \\ 3x + 2y = 3y - 2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x + y = -3 \\ 3x - y = -2 \end{array}\right\}$$

Sumando: $4x = -5 \rightarrow x = \frac{-5}{4} \rightarrow y = -3 - x = -3 + \frac{5}{4} = \frac{-7}{4}$

Solución: $x = \frac{-5}{4}; \; y = \frac{-7}{4}$

Ejercicio 14.-

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, **calcula** $A^2, A^3, \ldots, A^{128}$.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I; \quad A^4 = A^3 \cdot A = I \cdot A = A$$

$$A^{128} = A^{42 \cdot 3 + 2} = (A^3)^{42} \cdot A^2 = I^{42} \cdot A^2 = I \cdot A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 15.-

Comprueba que $A^2 = 2A - I$, **siendo:** $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ **e** I **la matriz unidad de orden 3.**

Utiliza esa igualdad para calcular A^4.

$$\left.\begin{array}{l} A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \\ \\ 2A - I = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \end{array}\right\} A^2 = 2A - I$$

Calculamos A^4:

$$A^4 = (A^2)^2 = (2A - I)^2 = (2A - I)(2A - I) = 4A^2 - 2A - 2A + I^2 =$$

$$= 4(2A - I) - 4A + I = 8A - 4I - 4A + I = 4A - 3I =$$

$$= 4\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -16 & 8 \\ 8 & -4 & 4 \\ -16 & 16 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 16.-

Calcula A^n y B^n siendo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

- $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/7 & 3/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Así, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/7 & n/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Lo probamos por inducción:

Acabamos de comprobar que para $n = 2$ (primer caso relevante), funciona.

Suponemos que es cierto para $n - 1$:

$$A^n = A^{n-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n-1/7 & n-1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n/7 & n/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

$$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$. Lo probamos por inducción:

Igual que en el caso anterior, para $n = 2$ se cumple.

Suponemos que es cierto para $n - 1$:

$$B^n = B^{n-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

Ejercicio 17.-

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, prueba que A^3 es la matriz nula.

Demuestra después que la matriz $I + A + A^2$ es la matriz inversa de $I - A$.

Multiplica $I + A + A^2$ por $I - A$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Veamos que $I + A + A^2$ es la inversa de $I - A$:

$$(I + A + A^2)(I - A) = I - A + A - A^2 + A^2 - A^3 = I - A^3 = I - \mathbf{0} = I.$$

Como $(I + A + A^2) \cdot (I - A) = I$, entonces $I + A + A^2$ es la inversa de $I - A$.

Ejercicio 18.-

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ comprueba que $(A + I)^2 = 0$ y expresa A^2 como combinación lineal de A e I.

$$A + I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(A + I)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Expresamos A^2 como combinación lineal de A e I:

$$(A + I)^2 = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad (A + I)(A + I) = A^2 + A + A + I = A^2 + 2A + I = \mathbf{0} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad A^2 = -2A - I$$

Ejercicio 19.-

a) Comprueba que la inversa de A es A^{-1}:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & 0 \\ -3/5 & 6/5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Calcula la matriz X que verifica $XA = B$, siendo A la matriz anterior y $B = (1 \;\; -2 \;\; 3)$.

a) $A \cdot A^{-1} = I$

b) $XA = B \quad \rightarrow \quad X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \quad \rightarrow \quad X = B \cdot A^{-1}$

Por tanto:

$$X = (1 \;\; -2 \;\; 3)\begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & 0 \\ -3/5 & 6/5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} & \frac{1}{5} & -2 \end{pmatrix}$$

54228

Ejercicio 20.-

Halla X e Y sabiendo que $5X+3Y=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -4 & 15\end{pmatrix}$ y $3X+2Y=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 9\end{pmatrix}$.

$$\left.\begin{aligned}5X+3Y&=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -4 & 15\end{pmatrix}\\ 3X+2Y&=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 9\end{pmatrix}\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned}-15X-9Y&=\begin{pmatrix}-6 & 0\\ 12 & -45\end{pmatrix}\\ 15X+10Y&=\begin{pmatrix}5 & -5\\ -10 & 45\end{pmatrix}\end{aligned}\right\}\ \text{Sumando: } Y=\begin{pmatrix}-1 & -5\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$3X=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 9\end{pmatrix}-2Y=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 9\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-1 & -5\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 9\\ -6 & 9\end{pmatrix}\ \rightarrow\ X=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 3\end{pmatrix}$$

Solución: $X=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 3\end{pmatrix}$; $Y=\begin{pmatrix}-1 & -5\\ 2 & 0\end{pmatrix}$

Ejercicio 21.-

Una compañía de muebles fabrica butacas, mecedoras y sillas, y cada una de ellas de tres modelos: E (económico), M (medio) y L (lujo). Cada mes produce 20 modelos E, 15 M y 10 L de butacas; 12 modelos E, 8 M y 5 L de mecedoras, y 18 modelos E, 20 M y 12 L de sillas. Representa esta información en una matriz y calcula la producción de un año.

$$\text{Cada mes:}\quad \begin{array}{l} \\ \text{BUTACAS}\\ \text{MECEDORAS}\\ \text{SILLAS}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\text{E} & \text{M} & \text{L}\end{array}\\ \begin{pmatrix}20 & 15 & 10\\ 12 & 8 & 5\\ 18 & 20 & 12\end{pmatrix}\end{array}$$

$$\text{Cada año:}\quad 12\cdot\begin{pmatrix}20 & 15 & 10\\ 12 & 8 & 5\\ 18 & 20 & 12\end{pmatrix}=\begin{array}{l} \\ \text{BUTACAS}\\ \text{MECEDORAS}\\ \text{SILLAS}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\text{E} & \text{M} & \text{L}\end{array}\\ \begin{pmatrix}240 & 180 & 120\\ 144 & 96 & 60\\ 216 & 240 & 144\end{pmatrix}\end{array}$$

Ejercicio 22.-

En un edificio hay tres tipos de viviendas: L3, L4 y L5. Las viviendas L3 tienen 4 ventanas pequeñas y 3 grandes; las L4 tienen 5 ventanas pequeñas y 4 grandes, y las L5, 6 pequeñas y 5 grandes. Cada ventana pequeña tiene 2 cristales y 4 bisagras, y las grandes, 4 cristales y 6 bisagras.

a) Escribe una matriz que describa el número y tamaño de ventanas de cada vivienda y otra que exprese el número de cristales y bisagras de cada tipo de ventana.

b) Calcula la matriz que expresa el número de cristales y de bisagras de cada tipo de vivienda.

$$\text{a)}\ \begin{array}{l} \\ \text{L3}\\ \text{L4}\\ \text{L5}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\text{P} & \text{G}\end{array}\\ \begin{pmatrix}4 & 3\\ 5 & 4\\ 6 & 5\end{pmatrix}\end{array};\quad \begin{array}{l} \\ \text{P}\\ \text{G}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\text{C} & \text{B}\end{array}\\ \begin{pmatrix}2 & 4\\ 4 & 6\end{pmatrix}\end{array}$$

$$\text{b)}\ \begin{array}{l} \\ \text{L3}\\ \text{L4}\\ \text{L5}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\text{P} & \text{G}\end{array}\\ \begin{pmatrix}4 & 3\\ 5 & 4\\ 6 & 5\end{pmatrix}\end{array}\cdot \begin{array}{l} \\ \text{P}\\ \text{G}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\text{C} & \text{B}\end{array}\\ \begin{pmatrix}2 & 4\\ 4 & 6\end{pmatrix}\end{array}=\begin{array}{l} \\ \text{L3}\\ \text{L4}\\ \text{L5}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\text{C} & \text{B}\end{array}\\ \begin{pmatrix}20 & 34\\ 26 & 44\\ 32 & 54\end{pmatrix}\end{array}$$

54228

Ejercicio 23.-

Un industrial fabrica dos tipos de bombillas: transparentes (T) y opacas (O). De cada tipo se hacen cuatro modelos: M_1, M_2, M_3 y M_4.

$$\begin{array}{c} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} T & O \end{array} \\ \begin{pmatrix} 300 & 200 \\ 400 & 250 \\ 250 & 180 \\ 500 & 300 \end{pmatrix} \end{array}$$

Esta tabla muestra la producción semanal de bombillas de cada tipo y modelo.

El porcentaje de bombillas defectuosas es el 2% en el modelo M_1, el 5% en el M_2, el 8% en el M_3 y el 10% en el M_4.

Calcula la matriz que expresa el número de bombillas transparentes y opacas, buenas y defectuosas, que se producen.

$$\begin{array}{c} \\ D \\ B \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}02 & 0{,}05 & 0{,}08 & 0{,}1 \\ 0{,}98 & 0{,}95 & 0{,}92 & 0{,}9 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} T & O \end{array} \\ \begin{pmatrix} 300 & 200 \\ 400 & 250 \\ 250 & 180 \\ 500 & 300 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ D \\ B \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} T & O \end{array} \\ \begin{pmatrix} 96 & 60{,}9 \\ 1\,354 & 869{,}1 \end{pmatrix} \end{array} \approx \begin{array}{c} \\ D \\ B \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} T & O \end{array} \\ \begin{pmatrix} 96 & 61 \\ 1\,354 & 869 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ejercicio 24.-

Halla todas las matrices X de la forma $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ tales que $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$X^2 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = 1 \\ a + b = 0 \\ b^2 = 1 \\ b + c = 0 \\ c^2 = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = \pm 1 \\ a = -b \\ b = \pm 1 \\ c = -b \\ c = \pm 1 \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{l} a \\ a \\ b \\ c \\ c \end{array}}\right\} \begin{array}{l} a = 1 \;\rightarrow\; b = -1 \;\rightarrow\; c = 1 \\ a = -1 \;\rightarrow\; b = 1 \;\rightarrow\; c = -1 \end{array}$$

Hay dos soluciones: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 25.-

Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ prueba que se verifica $A^3 + I = 0$ y utiliza esta igualdad para obtener A^{10}.

Haz $A^{10} = (A^3)^3 \cdot A$ y ten en cuenta que $A^3 = -I$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}; \; A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; A^3 + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos A^{10} (teniendo en cuenta que $A^3 + I = 0 \;\rightarrow\; A^3 = -I$):

$$A^{10} = (A^3)^3 \cdot A = (-I)^3 \cdot A = -I \cdot A = -A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 26.-

Justifica por qué no es cierta la igualdad: $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$ cuando A y B son dos matrices cualesquiera.

$(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - AB + BA - B^2$

Para que la igualdad fuera cierta, tendría que ser $AB = BA$; y, en general, no es cierto para dos matrices cualesquiera.

Ejercicio 27.-

Sea A una matriz de dimensión 2×3:

a) ¿Existe una matriz B tal que $A \cdot B$ sea una matriz de una sola fila?

b) ¿Y para $B \cdot A$?

Pon un ejemplo para cada caso, siendo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) No; $A \cdot B$ tendrá 2 filas necesariamente. Por ejemplo, tomando $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, tenemos que: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) Sí; si tomamos una matriz de dimensión 1×2 (ha de tener dos columnas para poder multiplicar $B \cdot A$), el resultado tendrá una sola fila. Por ejemplo:

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = (1 \quad 2)$, entonces $B \cdot A = (5 \quad 2 \quad 0)$

Ejercicio 28.-

Sea A una matriz cuadrada de orden 3 tal que $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ (A es una matriz diagonal). Prueba que el producto de dos matrices diagonales es una matriz diagonal.

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}$, su producto es:

$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$, que también es una matriz diagonal.

Ejercicio 29.-

Sean $A = (a_{ij})_{m,n}$, $B = (b_{ij})_{n,p}$, $C = (c_{ij})_{q,r}$. ¿Qué condiciones deben cumplir p, q y r para que se puedan efectuar las siguientes operaciones?

a) $A \cdot C \cdot B$ **b) $A \cdot (B + C)$**

a) $n = q = r$ b) $n = q$; $p = r$