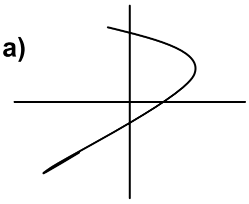
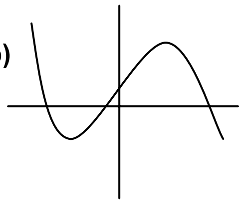
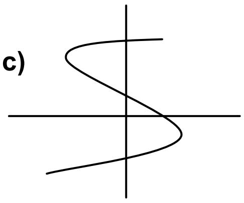
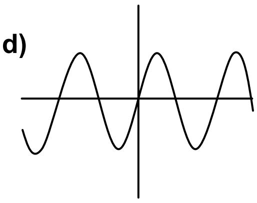
EJERCICIOS DE FUNCIONES, LÍMITES Y CONTINUIDAD

1. ¿Cuáles de estas representaciones corresponden a la gráfica de una función? (Razonar la respuesta):

a)  **b)**  **c)**  **d)** 

2. En cada apartado, representar las rectas sobre los mismos ejes:

a) $y=3x$
$y=3x+2$
$y=3x-7$

b) $y=-3x$
$y=-3x+2$
$y=-3x-7$

c) $y=\frac{1}{3}x$
$y=\frac{1}{3}x+2$
$y=\frac{1}{3}x-7$

d) $y=0$
$y=x$
$y=-x$

3. Representar sobre los mismos ejes las siguientes parábolas. ¿Qué conclusiones podemos extraer?: **a)** $y=x^2$ **b)** $y=2x^2$ **c)** $y=x^2/2$ **d)** $y=-x^2$ **e)** $y=-4x^2$

4. Dadas las siguientes parábolas, hallar: **i)** Vértice
ii) Puntos de corte con los ejes
iii) Representación gráfica

a) $y=x^2-6x+8$
b) $y=x^2-2x-3$
c) $y=-x^2-4x-3$
d) $y=x^2-4x+7$
e) $y=x^2-6x$
f) $y=x^2+x+1$
g) $y=3x^2+15x+18$
h) $y=-x^2-2x-2$

i) $y=x^2+2x-1$
j) $y=x^2-4$
k) $y=x^2+4$
l) $y=x^2+4x+5$
m) $y=x^2+4x+3$
n) $y=-x^2-8x-4$
o) $y=2x^2+4x+6$
p) $y=-x^2-1$

q) $y=(x+5)^2-8$
r) $y=2(x-1)^2-8$
s) $y=(x-5)^2+8$
t) $y=-2(x-1)^2+8$
u) $y=\frac{1}{2}(x+2)^2-5$
v) $y=x^2-2x+1$
w) $y=x^2-4x+2$
x) $y=2x^2-8x+6$

y) $y=-3x^2-6x+12$
z) $y=x^2-2x+3$
α) $y=x^2-6x+5$
β) $y=\frac{1}{4}x^2+x-2$
γ) $y=2x^2-10x+8$
δ) $y=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}$
ε) $y=x^2-8x+7$

5. En cada apartado, representar las parábolas sobre los mismos ejes:

a) $\left.\begin{array}{l} y=x^2 \\ y=(x-4)^2 \\ y=(x+5)^2 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} y=x^2 \\ y=x^2+4 \\ y=x^2-5 \end{array}\right\}$

c) A la vista de lo anterior, ¿cómo sería la parábola $y=(x-4)^2+5$? ¿Cuál es su vértice?

6. Representar las siguientes **funciones definidas a trozos**:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\in(-\infty,2) \\ x & \text{si } x\in[2,\infty) \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} 3 & \text{si } x<-1 \\ 1-2x & \text{si } -1\le x<1 \\ 3x-1 & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} x^2-4 & \text{si } x\in(-\infty,2) \\ x-2 & \text{si } x\in[2,4] \\ 5 & \text{si } x\in(4,\infty) \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} 5x-2 & \text{si } x\le 1 \\ -2 & \text{si } x=2 \\ x/2 & \text{si } x>2 \end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases} -3 & \text{si } -5\le x<0 \\ x^2 & \text{si } 0\le x<2 \\ x+2 & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$

f) $f(x)=\begin{cases} x/2 & \text{si } x\in(-\infty,1] \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x\in(1,\infty) \end{cases}$

g) $f(x)=\begin{cases} 3x-2 & \text{si } x<0 \\ -2 & \text{si } x=0 \\ \dfrac{4}{x-2} & \text{si } x>0 \end{cases}$

h) $f(x)=\begin{cases} -x-2 & \text{si } x\in(-\infty,2] \\ x^2-4x & \text{si } x\in(2,\infty) \end{cases}$

i) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{5}{x-5} & \text{si } x\le 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } 0<x\le 3 \\ \dfrac{10}{x+2} & \text{si } x>3 \end{cases}$

j) $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 3x-x^2 & \text{si } 0\le x<3 \\ x-4 & \text{si } 3\le x<6 \\ 0 & \text{si } x>6 \end{cases}$

7. Dadas las siguientes **funciones valor absoluto** se pide: **i)** Representación gráfica **ii)** Definición analítica por ramas.

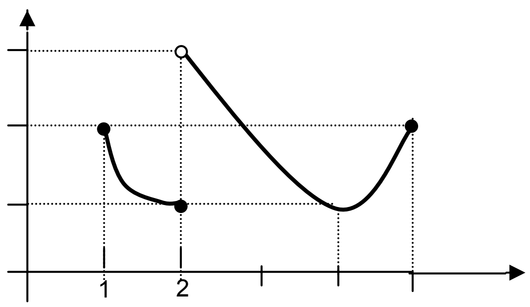
a) $f(x)=|-3x+3|$ **b)** $f(x)=|x^2-4x+3|$ **c)** $f(x)=|x+1|$ **d)** $f(x)=|x^2-5x+6|$

e) $f(x)=|-x^2-4x-5|$ **f)** $f(x)=|3x+6|$ **g)** $f(x)=\left|\frac{1}{2}x^2-x-4\right|$

RECORDAR: • Para que exista límite de una f(x) en un punto han de coincidir los límites laterales en dicho punto.

• A efectos del $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ no tenemos en cuenta lo que ocurre exactamente en x=a, sino en las proximidades. De hecho, hay casos en los que no existe f(a) pero sí el lím (de ahí la utilidad de la noción de límite)

8.



Dada la gráfica de la figura, indicar si existe lim f(x) en los siguientes casos:

a) Cuando $x\to 1$

b) Cuando $x\to 2$

c) Cuando $x\to 4$

d) Cuando $x\to 5$

9. Representar la función

$$f(x)=\begin{cases} 2 & \text{si } x<1 \\ 4-x & \text{si } 1\le x<3 \\ x-2 & \text{si } x\ge 3 \end{cases}$$

y calcular lim f(x) cuando $x\to 1$, $x\to 3$, $x\to 5$

10. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si } x\le 1 \\ ax+3 & \text{si } 1<x\le 2 \\ bx^3-2 & \text{si } x>2 \end{cases}$$

calcular los valores de los parámetros **a** y **b** para que existan los límites en x=1 y x=2

(Soluc: a=-1, b=3/8)

RECORDAR:

$$\boxed{f(x)\text{ continua en }x=a \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x)=f(a)}$$

Es decir: "Una función es continua en un punto si el límite coincide con la imagen en dicho punto".

- A efectos prácticos, para estudiar si una función es continua en un punto, hay que comprobar:
  1) que exista imagen
  2) que exista límite
  3) y que coincidan

11. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\geq 0 \\ x-1 & \text{si } x<0 \end{cases}$ **b)** $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x<0 \\ 2 & \text{si } x=0 \\ 2x-1 & \text{si } x>0 \end{cases}$ **c)** $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x<2 \\ 2x-1 & \text{si } x>2 \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} 2-x^2 & \text{si } x\leq 2 \\ 2x-6 & \text{si } x>2 \end{cases}$ **e)** $f(x)=\begin{cases} 1/x & \text{si } x<1 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$

(Soluc: a) discont. en x=0; b) discont. en x=0; c) discont. en x=2; d) continua $\forall\Re$; e) discont. en x=0 y x=1)

12. Dada $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & \text{si } x\neq 0 \\ 1 & \text{si } x=0 \end{cases}$ se pide: **a)** Representación gráfica.
b) Estudiar analíticamente la continuidad lateral en x=0
c) A la vista del apartado anterior, ¿es continua en x=0?

13. Representar la siguiente función e indicar si tiene algún punto de discontinuidad:

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x<3 \\ x^2 & \text{si } 3\leq x<4 \\ 0 & \text{si } x\geq 4 \end{cases}$$

(Soluc: discontinua en x=3 y x=4)

14. Representar la siguiente función e indicar si tiene algún punto de discontinuidad:

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si } x\leq 1 \\ x^2-1 & \text{si } 1<x\leq 2 \\ x^2 & \text{si } x>2 \end{cases}$$

(Soluc: discontinua en x=2)

15. Calcular cuánto debe valer **a** para que la siguiente función sea continua $\forall\Re$:

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\leq 2 \\ 3-ax^2 & \text{si } x>2 \end{cases}$$

(Soluc: a=0)

16. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x-1 & \text{si } x<0 \\ ax+b & \text{si } 0\leq x<1 \\ 2 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$$

hallar **a** y **b** para que la función sea continua y dibujar la gráfica de la función. *(Soluc: a=3 y b=-1)*

17. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \leq 1 \\ mx + n & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ -x^2 + 10x - 11 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

hallar los valores de **m** y **n** para que f(x) sea continua (puede ser útil dibujar la gráfica).

(Soluc: m=3, n=1)

18. Ídem:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{si } x \leq -2 \\ ax + 2 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 + b & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

(Soluc: a=-1/2, b=-3)

19. Ídem:

$$f(x) = \begin{cases} ax + 2 & \text{si } x < -1 \\ b/x^2 & \text{si } -1 \leq x < 3 \\ cx & \text{si } 3 \leq x < 5 \\ 10 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

(*Soluc: a=-52, b=54, c=2)*