

1. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO APLICANDO LA DEFINICIÓN.

1.1. Halla la derivada de las siguientes funciones en $x = 1$, aplicando la definición de derivada:

a) $f(x) = x^2 + 1$

b) $g(x) = \frac{x-1}{3}$

c) $h(x) = \frac{2}{x}$

1.2. Halla la derivada de las siguientes funciones en $x = 2$, aplicando la definición de derivada

a) $f(x) = (x-1)^2$

b) $g(x) = \sqrt{x+1}$

c) $h(x) = \frac{x-1}{x+2}$

2. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA: RECTA TANGENTE

- Ecuación de la **recta tangente a la curva en el punto $P(x_0, f(x_0))$** :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

- Ecuación de la **recta normal a una curva en el punto $P(x_0, y_0)$** :

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

2.1. Calcula la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la curva $y = x^2 - 2x$ en el punto $P(2,0)$

2.2. Halla la ecuación de la recta tangente y normal a la gráfica de la función $f(x) = \frac{x}{x-1}$ en el punto $Q(2,2)$

3. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN APLICANDO LA DEFINICIÓN.

La **función derivada** de una función f , que simbolizamos por f' , es la función que a cada valor x del dominio de f , donde f es derivable, se le asigna el valor de la derivada de f en dicho punto, $f'(x)$.

$$f': \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow f'(x)$$

siendo: $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

2.1. Calcula la función derivada de las siguientes funciones:

a) Función constante: $f(x) = a$ siendo $a \in \mathbb{R}$

b) Función identidad: $f(x) = x$

c) Función lineal: $f(x) = ax + b$, siendo $a, b \in \mathbb{R}$

d) Función cuadrática: $f(x) = x^2$

e) Función raíz cuadrada: $f(x) = \sqrt{x}$

f) Función irracional: $f(x) = \sqrt[n]{x^n}$

g) Función potencia: $f(x) = x^n$

(Ayuda: Calcula la derivada de $f(x) = x^3$, $f(x) = x^4$ y generaliza a $f(x) = x^n$)

4. OPERACIONES CON LAS DERIVADAS

Recuerda:

1.- Derivada de una suma: $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$

2.- Derivada de un producto de funciones: $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

En particular : Si $k \in \mathbb{R}$, $[k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x)$

3.- Derivada de un cociente de funciones: $\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

En particular : Si $k \in \mathbb{R}$, $\left[\frac{k}{f(x)} \right]' = \frac{-k \cdot f'(x)}{[f(x)]^2}$

3.1. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x^2$ b) $f(x) = 3x^4$ c) $f(x) = \frac{1}{2}x^6$ d) $f(x) = \frac{2}{3}x^3$

3.2. Calcula la derivada de las siguientes funciones polinómicas:

a) $f(x) = x^4 + 3x^2 + 6$ b) $f(x) = 6x^3 - x^2$ c) $f(x) = 5x^4 - 3x^2 + 6x$
d) $f(x) = \frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{4} - x$ e) $f(x) = \frac{5x^3}{3} - \frac{x}{2} - 1$ f) $f(x) = \frac{1}{4}x^6 - \frac{3}{2}x^3 + 3x^2 - 2x$

3.3. Calcula la derivada de los siguientes productos:

a) $f(x) = x^2(x + 6)$ b) $f(x) = (2x - 1)(x^2 + 1)$ c) $f(x) = (3x + 2)(4x + 5)$
d) $f(x) = (x^3 - 1)(x^3 + 1)$ e) $f(x) = (2x^2 + 1)(x^3 + 6)$ f) $f(x) = (3x^2 + 6x + 1)(x^2 - 1)$

3.4. Calcula la derivada de las siguientes funciones racionales:

a) $f(x) = \frac{2x^4}{1-x^2}$ b) $f(x) = \frac{6}{x^4 + 2}$ c) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$
d) $f(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$ e) $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - x - 2}$ f) $f(x) = \frac{x^2 + 5}{2x - 3}$

3.5. Calcula la derivada de las siguientes funciones irracionales:

a) $f(x) = x - \sqrt{x}$ b) $f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{x^2 + 2}$ c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$
d) $f(x) = \sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}$ e) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{2\sqrt{x}}$ f) $f(x) = \frac{x + 1}{\sqrt{x^3}}$

4. DERIVADA DE FUNCIONES EXPONENCIALES

Recuerda:

1) Si $f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a$

2) Si $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

4.1. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = e^x + x^2$

b) $f(x) = (x - 1) e^x$

c) $f(x) = (1 + x + x^2) e^x$

d) $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

e) $f(x) = \frac{2^x}{x}$

f) $f(x) = x^2 + 2^x + 1$

g) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{e^x}$

h) $f(x) = \frac{e^x + 1}{x}$

i) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

5. DERIVADA DE FUNCIONES LOGARÍTMICAS

Recuerda:

1) Si $f(x) = \log_a(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \log_a e$

2) Si $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

Además:

1) $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

2) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

3) $\log_a(x^n) = n \cdot \log_a x$

5.1. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x \cdot \ln x$

b) $f(x) = \log_3 x$

c) $f(x) = \ln(x + a)$

d) $f(x) = \ln x^3$

e) $f(x) = \ln(\sqrt{x})$

f) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

g) $f(x) = \ln e^{5x}$

h) $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$

i) $f(x) = \frac{\ln x}{1 + x^2}$

6. DERIVADA DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Recuerda:

1) $D(\sin x) = \cos x$

2) $D(\cos x) = -\sin x$

3) $D(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

6.1. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$

b) $f(x) = \sin x + \tan x$

c) $f(x) = \cos x \cdot (1 - \cos x)$

d) $f(x) = \frac{1}{\sin x}$

e) $f(x) = \frac{1}{\cos x}$

f) $f(x) = \frac{\sin x \cdot \cos x}{2} + \frac{x}{2}$

g) $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x}$

h) $f(x) = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$

i) $f(x) = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$

7. DERIVADA DE FUNCIONES COMPUESTAS

7.1. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

b) $f(x) = \frac{x^2}{(2x-1)^2}$

c) $f(x) = \frac{2x^2 - 4x}{(x-1)^2}$

d) $f(x) = 3\sqrt{x^2 - 3}$

e) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x + 1}$

f) $f(x) = (x - \sqrt{1-x^2})^2$

g) $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

h) $f(x) = x \cdot \sqrt{x^2 + 2}$

i) $f(x) = \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$

j) $f(x) = \frac{1}{2}e^{1+x^2}$

k) $f(x) = 3^{2x-3}$

l) $f(x) = \frac{a}{2}(e^{x/a} - e^{-x/a})$

m) $f(x) = \ln(x^2 + x)$

n) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

o) $f(x) = 2\sqrt{x} - 2\ln(2 + \sqrt{x})$

p) $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

q) $f(x) = \ln\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)$

r) $f(x) = \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)$

7.2. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sin^2 x$

b) $f(x) = \sin x^2$

c) $f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x$

d) $f(x) = \ln \cos x$

e) $f(x) = \ln \sin x$

f) $f(x) = \ln \operatorname{tg} x$

g) $f(x) = \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$

h) $f(x) = \left(\frac{1 + \sin x}{\cos x}\right)^2$

i) $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$

j) $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$

k) $f(x) = \ln\left(\frac{1 + \sin x}{\cos x}\right)$

l) $f(x) = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln(\cos x)$

7.3. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \arccos(x^2)$

b) $f(x) = \arcsen(5x^2)$

c) $f(x) = \operatorname{arctg}(4x^3)$

d) $f(x) = \arccos(3x^2 + 4x)$

e) $f(x) = \arcsen\left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right)$

f) $f(x) = \arcsen(\operatorname{tg} x)$

g) $f(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

h) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$

i) $f(x) = \arcsen\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)$

j) $f(x) = \arcsen(\sqrt{1-x^2})$

k) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

l) $f(x) = \operatorname{arctg}(x + \sqrt{1+x^2})$

7.1. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

$$f'(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$$

b) $f(x) = \frac{x^2}{(2x-1)^2}$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (2x-1)^2 - x^2 \cdot 2(2x-1) \cdot 2}{(2x-1)^4} = \frac{2x \cdot (2x-1)^2 - x^2 \cdot 2(2x-1) \cdot 2}{(2x-1)^{4-2}} = \frac{4x^2 - 2x - 4x^2}{(2x-1)^3} = \frac{-2x}{(2x-1)^3}$$

c) $f(x) = \frac{2x^2 - 4x}{(x-1)^2}$

$$f'(x) = \frac{(4x-4) \cdot (x-1)^2 - (2x^2-4x) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{4(x-1) \cdot (x-1)^2 - 4 \cdot (x^2-2x) \cdot (x-1)}{(x-1)^{4-1}} =$$

$$= \frac{4 \cdot (x^2 - 2x + 1 - x^2 + 2x)}{(x-1)^3} = \frac{4}{(x-1)^3}$$

d) $f(x) = 3\sqrt{x^2-3}$

$$f'(x) = \frac{3 \cdot 2x}{2\sqrt{x^2-3}} = \frac{3x}{\sqrt{x^2-3}}$$

e) $f(x) = \sqrt[3]{x^2+x+1}$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot (x^2+x+1)^{-\frac{2}{3}} \cdot (2x+1) = \frac{2x+1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}$$

f) $f(x) = (x - \sqrt{1-x^2})^2$

$$f'(x) = 2(x - \sqrt{1-x^2}) \cdot \left(1 - \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right) = 2(x - \sqrt{1-x^2}) \cdot \left(\frac{\sqrt{1-x^2} + x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{2(x^2 - 1 + x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2(2x^2 - 1)}{\sqrt{1-x^2}}$$

g) $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \cdot \frac{1-x - (1+x)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1+x}} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2} \cdot (1-x)}$$

$$(1) \frac{\sqrt{1-x}}{1-x} = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

h) $f(x) = x \cdot \sqrt{x^2 + 2}$

$$f'(x) = \sqrt{x^2 + 2} + \frac{x \cdot \cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2 + 2}} = \frac{x^2 + 2 + x^2}{\sqrt{x^2 + 2}} = \frac{2x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 2}}$$

i) $f(x) = \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$f'(x) = \frac{-\sqrt{1-x^2} - (1-x) \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{-\sqrt{1-x^2} + \frac{x-x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{-1+x^2 + x - x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{x-1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{-1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$$

j) $f(x) = \frac{1}{2}e^{1+x^2}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}e^{1+x^2} \cdot 2x = x \cdot e^{1+x^2}$$

k) $f(x) = 3^{2x-3}$

$$f'(x) = 3^{2x-3} \cdot \ln 3 \cdot 2 = 2 \ln 3 \cdot 3^{2x-3}$$

l) $f(x) = \frac{a}{2}(e^{x/a} - e^{-x/a})$

$$f'(x) = \frac{a}{2} \left[\frac{1}{a} e^{x/a} - \left(-\frac{1}{a} \right) e^{-x/a} \right] = e^{x/a} + e^{-x/a}$$

m) $f(x) = \ln(x^2 + x)$

$$f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x}$$

n) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

$$f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \right) = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

o) $f(x) = 2\sqrt{x} - 2\ln(2 + \sqrt{x})$

$$f'(x) = \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}} - \cancel{2} \cdot \frac{1}{2 + \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(1 - \frac{1}{2 + \sqrt{x}} \right) = \frac{1 + \sqrt{x}}{2\sqrt{x} + x}$$

p) $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x^2}$$

q) $f(x) = \ln\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)$

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2} \cdot \frac{2x(1-x^2) - (1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{2x(1-x^2+1+x^2)}{1-x^2} = \frac{4x}{1-x^4}$$

r) $f(x) = \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)$

$$f'(x) = \frac{1+e^x}{e^x} \cdot \frac{e^x \cdot (1+e^x) - e^x \cdot e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{1}{e^x} \cdot \frac{e^x \cdot (1+e^x - e^x)}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^x}$$

7.2. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sin^2 x \rightarrow f'(x) = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$

b) $f(x) = \sin x^2 \rightarrow f'(x) = \cos x^2 \cdot 2x$

c) $f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x \rightarrow f'(x) = 2 \sin x \cos x - 2 \cos x (-\sin x) = 4 \sin x \cos x$

d) $f(x) = \ln \cos x \rightarrow f'(x) = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$

e) $f(x) = \ln \sin x \rightarrow f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$

f) $f(x) = \ln \tan x \rightarrow f'(x) = \frac{1+\tan^2 x}{\tan x}$

g) $f(x) = \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$

$$f'(x) = \frac{\sin x \cdot \sin^2 x - (1-\cos x) \cdot 2 \sin x \cos x}{\sin^4 x} = \frac{\sin x \cdot (\sin^2 x - 2 \cos x + 2 \cos^2 x)}{\sin^4 x} = \frac{1-2 \cos x + \cos^2 x}{\sin^3 x} = \frac{(1-\cos x)^2}{\sin^3 x}$$

h) $f(x) = \left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)^2$

$$f'(x) = 2 \cdot \left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right) \cdot \frac{\cos x \cdot \cos x - (1+\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x} = 2 \cdot \left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right) \cdot \frac{\cos^2 x + \sin^2 x + \sin x}{\cos^2 x} = \frac{2(1+\sin x)^2}{\cos^3 x}$$

$$i) f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 x) - \operatorname{sen} x \cdot 2 \operatorname{tg} x \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 x)}{(1 + \operatorname{tg}^2 x)^2} = \frac{\cos x - 2 \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

$$j) f(x) = \ln \sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}}} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}}} \cdot \frac{\cos x (1 - \operatorname{sen} x) - (1 + \operatorname{sen} x)(-\cos x)}{(1 - \operatorname{sen} x)^2} = \frac{1 - \operatorname{sen} x}{2(1 + \operatorname{sen} x)} \cdot \frac{2 \cos x}{(1 - \operatorname{sen} x)^2} = \\ &= \frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{\cos x} \end{aligned}$$

$$k) f(x) = \ln \left(\frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x} \right)$$

$$f'(x) = \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x} \cdot \frac{\cos x \cdot \cos x - (1 + \operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{1 + \operatorname{sen} x} \cdot \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos x} = \frac{1}{1 + \operatorname{sen} x} \cdot \frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}$$

$$l) f(x) = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln(\cos x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2 \operatorname{tg} x \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 x) + \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}^3 x$$

7.3. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = \arccos(x^2) \rightarrow f'(x) = -\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

$$b) f(x) = \arcsen(5x^2) \rightarrow f'(x) = \frac{10x}{\sqrt{1-25x^4}}$$

$$c) f(x) = \operatorname{arctg}(4x^3) \rightarrow f'(x) = \frac{12x^2}{1+16x^6}$$

$$d) f(x) = \arccos(3x^2 + 4x) \rightarrow f'(x) = -\frac{6x + 4}{\sqrt{1-(3x^2 + 4x)^2}}$$

$$e) f(x) = \arcsen\left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2x \cdot x^2 - (x^2 - 1) \cdot 2x}{x^4} \stackrel{(i)}{=} \frac{x^2}{\sqrt{2x^2 - 1}} \cdot \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x \cdot \sqrt{2x^2 - 1}}$$

$$(1) \sqrt{1 - \left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^4}} = \sqrt{\frac{2x^2 - 1}{x^4}} = \frac{\sqrt{2x^2 - 1}}{x^2}$$

f) $f(x) = \arcsen(\operatorname{tg} x)$

$$f'(x) = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 x}} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\sqrt{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}}{\cos x}} = \frac{1}{\cos x \sqrt{1 - 2\operatorname{sen}^2 x}}$$

g) $f(x) = \arccos\left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2}\right)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2}\right)^2}} \cdot \frac{-2x \cdot (1 + x^2) - (1 - x^2) \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{-(1 + x^2)}{\sqrt{(1 + x^2)^2 - (1 - x^2)^2}} \cdot \frac{-2x \cdot (1 + x^2 + 1 - x^2)}{(1 + x^2)^2} = \\ &= \frac{-1}{\sqrt{4x^2}} \cdot \frac{-4x}{1 + x^2} = \frac{2}{1 + x^2} \end{aligned}$$

h) $f(x) = \arctg\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+1}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{1-x - (1+x)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{(1-x)^2}{(1-x)^2 + (x+1)^2} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{2}{2x^2 + 2} = \frac{1}{x^2 + 1}$$

i) $f(x) = \arctg\left(\frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x}\right)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x}\right)^2} \cdot \frac{\cos x \cdot \cos x - (1 + \operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + (1 + \operatorname{sen} x)^2} \cdot \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{1 + \operatorname{sen} x}{2 + 2\operatorname{sen} x} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

j) $f(x) = \arcsen\left(\sqrt{1 - x^2}\right)$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - x^2)}} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\mathbf{k)} f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2} - x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{1-x^2}{1-x^2+x^2} \cdot \frac{1-x^2+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\mathbf{l)} f(x) = \operatorname{arctg}\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^2} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{2(1+x^2 + x\sqrt{1+x^2})} \cdot \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{2(1+x^2)}$$

$$(1) \text{ Sacando factor común } \sqrt{1+x^2} : 1+x^2 + x\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+x^2} (\sqrt{1+x^2} + x)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1+x^2} (\sqrt{1+x^2} + x)} \cdot \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2(1+x^2)}$$