

Vamos a calcular dos límites necesarios para la derivación de funciones trigonométricas.

### 1.1.- Cálculo de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x}$

Consideremos la función  $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$ .

Esta función no está definida para  $x = 0$ . Sin embargo, como ahora veremos, existe el límite para  $x = 0$ .

Construimos una tabla de valores próximos a 0:

Por la izquierda:

$x \rightarrow 0^-$	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	...
$\frac{\text{sen } x}{x}$	0,973	0,985	0,993	0,998	...

Por la derecha:

$x \rightarrow 0^+$	0,1	0,2	0,3	0,4	...
$\frac{\text{sen } x}{x}$	0,998	0,993	0,985	0,973	...

Los resultados de la tabla sugieren que el límite es 1. Esto implica que  $x$  y  $\text{sen } x$  toman valores prácticamente iguales en el entorno de 0, ya que su cociente se aproxima a 1.

En las proximidades del 0 se verifica que  $\text{sen } x < x < \text{tg } x$

Dividiendo la desigualdad por  $\text{sen } x$ , obtenemos:  $1 < \frac{x}{\text{sen } x} < \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \cos x < \frac{\text{sen } x}{x} < 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} 1 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} \leq \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \Rightarrow$  Como  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$  y  $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$  se verifica  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$

Cuando  $x \rightarrow 0$ , las funciones  $\text{sen } x$  y  $x$  son infinitésimos equivalentes.

Para su aplicación se puede sustituir  $x$  por cualquier variable  $\alpha(x)$  que también sea un infinitésimo.

**Ejemplos:**

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 3x}{3x} = 1$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x^2}{x^2} = 1$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1$$

### 1.2.- Cálculo de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg } x}{x}$

La sustitución directa conduce a la indeterminación  $\frac{0}{0}$ , pero expresando  $\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$  obtenemos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg } x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\text{sen } x}{\cos x} \right) \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\text{sen } x}{x} \right) \left( \frac{1}{\cos x} \right) = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\text{Por tanto, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg } x}{x} = 1$$

Cuando  $x \rightarrow 0$ , las funciones  $\text{tg } x$  y  $x$  son infinitésimos equivalentes.

**Ejemplos:**

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg } 2x}{2x} = 1$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg } 3x^2}{3x^2} = 1$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{tg}(x-1)}{x-1} = 1$$

### 1.3.- Funciones equivalentes

Consideremos dos funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  que verifican:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$   $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

Si el límite del cociente de ambas funciones tiene por límite 1 en el punto  $x = a$  toman valores prácticamente iguales en un entorno de ese punto. Las funciones que tienen esta propiedad se llaman **funciones infinitésimos equivalentes**.

$$f(x) \text{ y } g(x) \text{ son infinitésimos equivalentes si } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Un resultado interesante y útil en el cálculo de límites es el siguiente teorema que permite sustituir en el cálculo de límites una función por otra equivalente.

Si en una expresión figura como factor o divisor una función, el límite de la expresión no varía al sustituir dicha función por otra equivalente.

Vamos a ver algunos ejemplos en los cuales para resolver la indeterminación aplicamos funciones equivalentes.

#### Ejemplo 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 7x}{x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 7x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 7 \cdot \frac{\text{sen } 7x}{7x} = 7 \cdot 1 = 7 \quad \text{O bien, sustituyendo directamente } \text{sen } 7x \text{ por } 7x \text{ (funciones equivalentes).}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 7x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{x} = 7$$

#### Ejemplo 2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 6x}{\text{tg } 2x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 6x}{\text{tg } 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 6x}{6x} \cdot \frac{2x}{\text{tg } 2x} \cdot \frac{6x}{2x} = 1 \cdot 1 \cdot 3 = 3 \quad \text{O bien, sustituyendo directamente } \text{sen } 6x \text{ por } 6x \text{ y } \text{tg } 2x \text{ por } 2x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 6x}{\text{tg } 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 = 3$$

#### Ejemplo 3

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} = \frac{0}{0} \quad (\text{Demostraremos que } \frac{x^2}{2} \text{ y } 1 - \cos x \text{ son funciones equivalentes)}$$

Para hallar este límite basta tener en cuenta la fórmula del ángulo mitad:  $\text{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \text{sen}^2 \left( \frac{x}{2} \right)}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \left( \frac{x}{2} \right)^2}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{4x^2} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} = 1$$

Los infinitésimos equivalentes más empleados son:  $(\alpha(x) \rightarrow 0)$

$\text{sen } \alpha(x)$	$\alpha(x)$
$1 - \cos \alpha(x)$	$\frac{1}{2}\alpha(x)^2$
$\text{tg } \alpha(x)$	$\alpha(x)$
$\text{Ln } [1 + \alpha(x)]$	$\alpha(x)$
$e^{\alpha(x)} - 1$	$\alpha(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{1}{x})^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$$

$$\text{Ln}(1+x) \sim x \Rightarrow e^{\ln(1+x)} \sim e^x \Rightarrow (1+x) \sim e^x \Rightarrow e^x - 1 \sim x$$

$$\text{Por tanto, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

#### Ejemplo 4

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = 1 \cdot 0 = 0$$

#### Ejemplo 5

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen} 5x}{\text{sen} 2x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2}$$

#### Ejemplo 6

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 - \cos x)}{\text{sen}^3 x} = \frac{0}{0}$$

Aplicamos la equivalencia de las funciones  $\frac{x^2}{2}$  y  $1 - \cos x$  y la de  $\text{sen } x$  y  $x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 - \cos x)}{\text{sen}^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{x^2}{2}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{2x^3} = \frac{1}{2}$$

#### Ejemplo 7

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{3x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(2x)^2}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{3x^2} = \frac{2}{3}$$

#### Ejemplo 8

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}^2 3x}{x \text{sen} 2x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3x)^2}{x \cdot 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9x^2}{2x^2} = \frac{9}{2}$$

**Ejercicio 1.** Calcular los siguientes límites utilizando funciones equivalentes en  $x = 0$ :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 8x}{4x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 14x}{7x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{sen} 5x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 8x}{4x}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \operatorname{sen} x}{x}$$

**SOLUCIONES**

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 8x}{4x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x}{4x} = 2$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 14x}{7x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{14x}{7x} = 2$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{sen} 5x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 8x}{4x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x}{4x} = 2$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}4x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{1 - \cos x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \operatorname{sen} x}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( x + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) = 1$$

**Ejercicio 2.** Calcular los siguientes límites utilizando funciones equivalentes en  $x = 1$ :

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg}(x-1)}{x-1}$$

**SOLUCIONES**

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x-1} = 1$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg}(x-1)}{x-1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x-1} = 1$$