1 CÁLCULO DE LÍMITES $f(x)^{g(x)}$

1.1.- El número e

Uno de los límites de mayor importancia lo estudió el matemático suizo Leonard Euler.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

Si pasamos al límite se tiene la expresión 1^{∞}, que nos hace pensar erróneamente que vale 1.

Hay que tener en cuenta que $1+\frac{1}{x}\neq 1$ para cualquier valor de x

Para analizar esta función vamos a construir una tabla de valores:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$	2	2,25	2,37	2,441	2,488	2,521	2,546	2,565	2,581	2,593

Según la tabla, la función es creciente pero crece lentamente, con lo cual da lugar a pensar que exista $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ y sea finito.

x	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
f(x)	2,7048	2,7169	2,7181	2,71826	2,71828047	2,71828169	2,71828179

Su límite es un número irracional que se designa con la letra e:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e = 2{,}71828182845904523536028747135 27....$$

El mismo resultado obtenemos si sustituimos x por cualquier que tienda a infinito:

$$\text{Si} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e$$

Ejemplo 1:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}=e$$

Ejemplo 2:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)^{x^2+1}=e$$

Ejemplo 3:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x+2}}\right)^{\sqrt{x+2}}=e$$

1.2.- Límites relacionados con el número e

Teniendo en cuenta el resultado anterior, se pueden calcular otros límites, aplicando la regla de límite de potencia de funciones.

Ejemplo 1:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{2} = e^{2}$$

Generalizando, $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{ax} = e^{a}$

Ejemplo 2:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 2} = e^{2}$$

Generalizando, $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x} = e^{a}$

Ejemplo3:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x+2} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2} = e^{3}\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2} = e^{3}\cdot 1 = e^{3}$$

Generalizando, $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{ax+b} = e^{a}$

Ejercicio 1. Halla los siguientes límites:

1) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{4x}\right)^{x}$

2) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{x}$

3) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}$

4) $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}$

5) $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{6x}$

6) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{5x}\right)^{x}$

7) $\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{3}{x}\right)^{x}$

8) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{3x}$

9) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x-1}$

10) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x-5}$

SOLUCIÓN

Transformamos la expresión de la función para aplicar el siguiente resultado:

$$\text{“Si } \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e\text{”}$$

1) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{4x}\right)^{x} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{4x}\right)^{4x}\right]^{\frac{1}{4}} = e^{\frac{1}{4}}$

2) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{x} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{5}}\right)^{\frac{x}{5}}\right]^{5} = e^{5}$

3) $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-1} = e^{-1}$

4) $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{6x} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-6} = e^{-6}$

5) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{5x}\right)^{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{5x}{2}}\right)^{\frac{5x}{2}\cdot\frac{2}{5}} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{5x}{2}}\right)^{\frac{5x}{2}}\right]^{\frac{2}{5}} = e^{\frac{2}{5}}$

6) $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{3}{x^2}\right)^{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2}{-3}}\right)^{-\frac{x^2}{3}\cdot\left(-\frac{3}{x^2}\right)x} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x^2}{-3}}\right)^{-\frac{x^2}{3}}\right]^{\left(-\frac{3}{x^2}\right)x} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x^2}{-3}}\right)^{-\frac{x^2}{3}}\right]^{\left(-\frac{3}{x}\right)} = e^{0} = 1$

7) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{3x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x\cdot\frac{3}{2}} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right]^{\frac{3}{2}} = e^{\frac{3}{2}}$

8) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x-1} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x\cdot\frac{2x-1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{\frac{2x-1}{x}} = e^{2}$

9) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x-5} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}\cdot\frac{2}{x}\cdot(3x-5)} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{\frac{2(3x-5)}{x}} = e^{6}$

1.3.- Indeterminaciones de límites $f(x)^{g(x)}$

Si no hay indeterminación, el cálculo de dichos límites se realiza por paso al límite:

Ejemplo 1:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+2}{x}\right)^{x+2} = (2)^{+\infty} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x^2+1}{6x^2-2}\right)^{-x} = \left(\dfrac{5}{6}\right)^{-\infty} = +\infty$

Teniendo en cuenta que toda potencia se puede escribir como una potencia de base el número e, $a^b = e^{b \ln a}$, podemos escribir

$$\left[\, f(x)\right]^{g(x)} = e^{\,g(x)\ln f(x)}$$

Y de esta forma expresar el límite

$$\lim_{x\to a}\left[\, f(x)\right]^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$$

Casos de indeterminación: 0^0, $0^{+\infty}$, $0^{-\infty}$, ∞^0

Ejemplo 2:

$$\lim_{x\to0^+} x^{\ln x} = (0)^{-\infty} = e^{\lim\limits_{x\to0^+}\ln x \ln x} = e^{-\infty(-\infty)} = +\infty$$

Ejemplo 3:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{\ln x} = (0)^{+\infty} = e^{\lim\limits_{x\to0^+}\ln x \ln\frac{1}{x}} = e^{-\infty(+\infty)} = e^{-\infty} = 0$$

Ejemplo 4:

$$\lim_{x\to0^+} x^{\operatorname{sen} x} = (0)^0 = e^{\lim\limits_{x\to0^+}\operatorname{sen} x\cdot\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to0^+} x\cdot\ln x} = (\ x \sim \operatorname{sen} x)$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to0^+} x\cdot\ln x} = e^0 = 1 \text{ (x es un infinitésimo de orden superior a ln x)}$$

Ejemplo 5:

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x} = (\infty)^0 = e^{\lim\limits_{x\to0^+}\operatorname{tg} x\cdot\ln\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to0^+}-\operatorname{tg} x\cdot\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to0^+}-x\cdot\ln x} = (\ x \sim \operatorname{tg} x)$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to0^+}-x\cdot\ln x} = e^0 = 1 \text{(x es un infinitésimo de orden superior a ln x)}$$

1.4.- Indeterminación 1^∞

Si $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$ y $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, entonces $\lim_{x\to+\infty} f(x)^{g(x)}$ presenta una indeterminación del tipo 1^∞

Se resuelve transformando la expresión en una potencia del número e.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e$$

$$f(x)^{g(x)}=[1+f(x)-1]^{g(x)}=\left[1+\frac{1}{\frac{1}{f(x)-1}}\right]^{g(x)}$$

Hemos expresado la base de la forma $\left(1+\dfrac{1}{h(x)}\right)$ y ahora vamos a buscar que aparezca en el exponente de la potencia la función h(x), para ello multiplicamos y dividimos por h(x).

$$\left(1+\frac{1}{\frac{1}{f(x)-1}}\right)^{g(x)}=\left(1+\frac{1}{\frac{1}{f(x)-1}}\right)^{\frac{1}{f(x)-1}\cdot[f(x)-1]\cdot g(x)}=\left[\left(1+\frac{1}{\frac{1}{f(x)-1}}\right)^{\frac{1}{f(x)-1}}\right]^{[f(x)-1]\cdot g(x)}$$

De esta forma llegamos a la siguiente regla:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)^{g(x)}=e^{\lim_{x\to+\infty}[f(x)-1]\cdot g(x)}}$$

Ejemplo 1:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)^{x}=1^\infty \text{ Aplicamos la regla}$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-1]\cdot g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-1}-1\right)\cdot x=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+2-3x+1}{3x-1}\right)\cdot x=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{3x-1}\right)\cdot x=1\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)^{x}=e$$

Ejemplo 2:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\right)^{2x}=1^\infty \text{ Aplicamos la regla}$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-1]\cdot g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}-1\right)\cdot 2x=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)\cdot 2x=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)2x=+\infty\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\right)^{2x}=+\infty$$

Ejemplo 3:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x}{x^2-1}\right)^{-x}=1^\infty \text{ Aplicamos la regla}$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-1]\cdot g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x}{x^2-1}-1\right)\cdot(-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x-x^2+1}{x^2-1}\right)\cdot(-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x^2-1}\right)\cdot(-x)=-1$$

Ejercicio 1. Hallar los siguientes límites de potencias:

1) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}$

2) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{2x}$

3) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x}{2x+1}\right)^{x}$

4) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+2}{3x}\right)^{x^2}$

5) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^{2x-3}$

6) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{3x+4}{2x+5}\right)^{\frac{1}{x}}$

7) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+3}{x-4}\right)^{\frac{3x+1}{2}}$

8) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{2x}\right)^{3x-2}$

9) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+3x}{2x}\right)^{-3x}$

10) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+1}{2x}\right)^{1-x}$

11) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3x-1}{2x}\right)^{2x-1}$

12) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

Ejercicio 2. Demuestra que, en general, se cumple los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{ax+b}=e^a$, siendo a,b dos nº reales cualesquiera

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}=e^k$, siendo k cualquier nº real