

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS MEDIANTE DETERMINANTES

Resolución de sistemas: Regla de Cramer y Teorema de Rouché-Frobenius

EJERCICIO 1 : Resuelve, aplicando la regla de Cramer, los siguientes sistemas:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \quad \begin{cases} -x+3y=-5 \\ x+y=1 \end{cases} & \text{b)} \quad \begin{cases} -x+2y-z=0 \\ x-3y+z=-3 \\ 2x+y-z=1 \end{cases} & \text{c)} \quad \begin{cases} 2x-y=0 \\ 3x+y=5 \end{cases} & \text{d)} \quad \begin{cases} x+y-z=2 \\ -x+2y+z=4 \\ 3x+y+z=6 \end{cases} & \text{e)} \quad \begin{cases} -x+4y=-6 \\ 2x-3y=7 \end{cases} \\ \text{f)} \quad \begin{cases} x-2y+z=-3 \\ 2x+3y-z=3 \\ x-y+3z=6 \end{cases} & \text{g)} \quad \begin{cases} -3x+2y=3 \\ 2x-y=-1 \end{cases} & \text{h)} \quad \begin{cases} 2x-y-z=0 \\ -x+2y+z=1 \\ x-3y-2z=-3 \end{cases} & \text{i)} \quad \begin{cases} 3x+2y=-5 \\ 5x+y=1 \end{cases} & \text{j)} \quad \begin{cases} x+2y-z=1 \\ -3x+y+z=-5 \\ x-y+3z=5 \end{cases} \end{array}$$

Solución:

a) $\begin{cases} -x+3y=-5 \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right); A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; |A| = -4 \neq 0 \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado} \Rightarrow \text{Existe una solución}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-8}{-4} = 2; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{4}{-4} = -1 \quad \text{La solución del sistema es: } (x,y) = (2,-1)$$

b) $\begin{cases} -x+2y-z=0 \\ x-3y+z=-3 \\ 2x+y-z=1 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right); |A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado} \Rightarrow \text{Existe 1 sol.}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-9}{-3} = 3; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-14}{-3} = \frac{14}{3}$$

La solución del sistema es: $(x,y,z) = \left(\frac{4}{3}, 3, \frac{14}{3}\right)$

c) $\begin{cases} 2x-y=0 \\ 3x+y=5 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{array} \right); A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; |A| = 5 \neq 0 \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado} \Rightarrow \text{Existe una solución}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{5}{5} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}}{5} = \frac{10}{5} = 2 \quad \text{La solución del sistema es: } (x,y) = (1,2)$$

d) $\begin{cases} x+y-z=2 \\ -x+2y+z=4 \\ 3x+y+z=6 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \end{array} \right); |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado} \Rightarrow \text{Existe 1 sol.}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{12} = \frac{12}{12} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix}}{12} = \frac{24}{12} = 2; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}}{12} = \frac{12}{12} = 1$$

La solución del sistema es: $(x,y,z) = (1,2,1)$

e) $\begin{cases} -x+4y=-6 \\ 2x-3y=7 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & -6 \\ 2 & -3 & 7 \end{array} \right); A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}; |A| = -5 \neq 0 \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado} \Rightarrow \text{Existe una sol.}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -6 & 4 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-10}{-5} = 2; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{5}{-5} = -1 \Rightarrow \text{La solución del sistema es: } (x,y) = (2,-1)$$

$$f) \begin{cases} x-2y+z=-3 \\ 2x+3y-z=3 \\ x-y+3z=6 \end{cases} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 6 \end{array} \right); \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 17 \neq 0 \Rightarrow \text{Sist. Compatible Determinado} \Rightarrow \text{Existe 1 sol.}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 6 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{17} = \frac{-15}{17}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}}{17} = \frac{45}{17}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix}}{17} = \frac{54}{17}$$

La solución del sistema es: $(x, y, z) = \left(\frac{-15}{17}, \frac{45}{17}, \frac{54}{17} \right)$

$$g) \begin{cases} -3x+2y=3 \\ 2x-y=-1 \end{cases} \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{array} \right); \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}; \quad |A| = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{Sist. Compatible Determinado} \Rightarrow \text{Existe 1 sol.}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-1}{-1} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-3}{-1} = 3 \quad \text{La solución del sistema es: } (x, y) = (1, 3)$$

$$h) \begin{cases} 2x-y-z=0 \\ -x+2y+z=1 \\ x-3y-2z=-3 \end{cases} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 & -3 \end{array} \right); \quad |A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{Sist. Compatible Determinado} \Rightarrow \text{Existe 1 sol.}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & -2 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{0}{-2} = 0; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -3 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

La solución del sistema es: $(x, y, z) = (1, 0, 2)$

$$i) \begin{cases} 3x+2y=-5 \\ 5x+y=1 \end{cases} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & -5 \\ 5 & 1 & 1 \end{array} \right); \quad |A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0 \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado} \Rightarrow \text{Existe una solución}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{-7}{-7} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{28}{-7} = -4 \quad \text{La solución del sistema es: } (x, y) = (1, -4)$$

$$j) \begin{cases} x+2y-z=1 \\ -3x+y+z=-5 \\ x-y+3z=5 \end{cases} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 3 & 5 \end{array} \right); \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 22 \neq 0 \Rightarrow \text{Sist. Compatible Determinado} \Rightarrow \text{Existe 1 sol.}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -5 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{22} = \frac{44}{22} = 2; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}}{22} = \frac{0}{22} = 0; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{22} = \frac{22}{22} = 1$$

La solución del sistema es: $(x, y, z) = (2, 0, 1)$

EJERCICIO 2 : Utiliza el teorema de Rouché para estudiar la compatibilidad de los siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x-4y+z=1 \\ -x+2y-z=3 \\ x \quad \quad -z=7 \\ x-y \quad \quad =2 \end{cases}$$

Solución:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 7 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 10 \\ 0 & 2 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} \text{Rango } A = 2 \\ \text{Rango } A^* = 2 \\ \text{N}^\circ \text{ Incog} = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado.}$$

Discusión y resolución de sistemas con parámetros

EJERCICIO 3 : Discute los siguientes sistemas, según los valores del parámetro:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + az = 0 \\ x + y - z = a \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} mx + y = 2 - 2m \\ x + my = m - 1 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 2z = 1 \\ x + (a+1)y + 2az = -7 \end{cases} \end{array}$$

Solución:

a) Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = -2a - 1$

$$|A| = 0 \rightarrow -2a - 1 = 0 \rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

• Si $a = -\frac{1}{2} \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = n^{\circ} \text{ incógnitas} = 3 \Rightarrow \text{El sistema es compatible determinado.}$

• Si $a = -\frac{1}{2}$, queda: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1/2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1/2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & -1 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & -9 & -4 \\ 0 & 4 & -6 & -3 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & -9 & -4 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \end{array} \right)$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{Rango } A = 2 \\ \text{Rango } A' = 3 \end{array} \right] \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

b) Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix} \rightarrow |A| = m^2 - 1 \Rightarrow |A| = 0 \rightarrow m^2 - 1 = 0 \rightarrow m^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 1 \end{cases}$$

• Si $m \neq -1$ y $m \neq 1 \Rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = n^{\circ} \text{ incógnitas} = 2$. El sistema es compatible determinado.

• Si $m = -1$, queda: $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{Rango } A = 1 \\ \text{Rango } A' = 2 \end{array} \right] \Rightarrow \text{El sistema es incompatible.}$

• Si $m = 1$, queda: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{Rango } A = 1 \\ \text{Rango } A' = 2 \end{array} \right] \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$

c) Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & (a+1) & 2a \end{pmatrix} \rightarrow |A| = a - 1 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow a = 1$$

• Si $a \neq 1 \Rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = n^{\circ} \text{ incógnitas} = 3$. El sistema es compatible determinado.

• Si $a = 1 \Rightarrow \text{Queda: } A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -7 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -8 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array} \right) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{Rango } A = 2 \\ \text{Rango } A' = 3 \end{array} \right] \Rightarrow \text{El sistema es incompatible.}$

EJERCICIO 4 : Discute, y resuelve cuando sea posible, los siguientes sistemas de ecuaciones en función del parámetro:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ -6x + 4y = -2 \\ x + ky = 2 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} -x + \lambda y + 2z = -1 \\ 2x + \lambda y - z = 2 \\ \lambda x - y + 2z = -1 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x - y + az = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x - z = 1 \end{cases} \end{array}$$

Solución:

a)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 1 \\ -6 & 4 & -2 \\ 1 & k & 2 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3k-2 & -5 \end{array} \right) \quad -3k-2 = 0 \Rightarrow k = -\frac{2}{3}$$

• Si $k = -\frac{2}{3} \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = n^{\circ} \text{ incógnitas} = 2$. El sistema es compatible determinado.

Lo resolvemos aplicando la regla de Cramer: $x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & k \end{vmatrix}}{3k+2} = \frac{k+4}{3k+2}$; $y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{3k+2} = \frac{5}{3k+2}$ Solución: $(x, y) = \left(\frac{k+4}{3k+2}, \frac{5}{3k+2} \right)$

• Si $K = \frac{-2}{3}$, queda: $A' = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2/3 & 2 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{RangoA} = 1 \\ \text{RangoA}^* = 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{El sistema es incompatible.}$

b) Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes: $A = \begin{pmatrix} -1 & \lambda & 2 \\ 2 & \lambda & -1 \\ \lambda & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = -3\lambda^2 - 6\lambda - 3 = -3(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = -3(\lambda + 1)^2$

$$|A| = 0 \rightarrow \lambda = -1$$

• Si $\lambda \neq -1 \rightarrow$ El sistema es compatible determinado $\begin{cases} -x + \lambda y + 2z = -1 \\ 2x + \lambda y - z = 2 \\ \lambda x - y + 2z = -1 \end{cases}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & \lambda & 2 \\ 2 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-3(\lambda+1)^2} = \frac{1}{\lambda+1}; y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ \lambda & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-3(\lambda+1)^2} = \frac{1}{\lambda+1}; z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & \lambda & -1 \\ 2 & \lambda & 2 \\ \lambda & -1 & -1 \end{vmatrix}}{-3(\lambda+1)^2} = \frac{-\lambda}{\lambda+1}$$

• Si $\lambda = -1$, queda: $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{RangoA} = 2 \\ \text{RangoA}^* = 2 \\ \text{N}^\circ \text{ Incog} = 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$

$$\begin{cases} -x - y + 2z = -1 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Un grado de libertad : } z = \alpha, y = \alpha, x = 1 + \alpha \Rightarrow (x, y, z) = (1 + \alpha, \alpha, \alpha) \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

c) Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = -a^2 - a - 2 \neq 0$ para cualquier valor de a .

Por tanto, $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = n^\circ \text{ incógnitas} = 3$. El sistema es compatible determinado. Para cada valor de a , tenemos un sistema diferente, todos ellos tienen solución única. Lo resolveremos aplicando la regla de Cramer:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow |A| = -a^2 - a - 2$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-a^2 - a - 2} = 1; y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-a^2 - a - 2} = 0; z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-a^2 - a - 2} = 0$$

Cada uno de los sistemas que obtenemos, para cada valor distinto de a , tiene como solución única $(x, y, z) = (1, 0, 0)$.

EJERCICIO 5 : Estudia, según los valores del parámetro a , el siguiente sistema homogéneo. Resuélvelo en los casos en los

que sea posible: $\begin{cases} 4x - 4z = 0 \\ x - y + az = 0 \\ x + ay + z = 0 \end{cases}$

Solución:

Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes: (Hemos simplificado la 1ª ecuación, dividiéndola entre 4). $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = -a^2 - a - 2 = -(a^2 + a + 2)$

$$|A| = 0 \rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2} \rightarrow \text{No tiene solución} \rightarrow |A| \neq 0 \text{ para cualquier valor de } a$$

Por tanto, como el sistema es homogéneo, tiene como solución única $x = 0, y = 0, z = 0$, cualquiera que sea el valor de a .

EJERCICIO 6 : Discute el siguiente sistema, según los valores del parámetro a . Resolverlo cuando sea compatible

$$\text{indeterminado: } \begin{cases} 2x + ay + 4z = 2 \\ ax + 2y + 6z = 0 \\ 4x + 2ay + 10z = a \end{cases}$$

Solución:

Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes: $|A| = \begin{vmatrix} 2 & a & 4 \\ a & 2 & 6 \\ 4 & 2a & 10 \end{vmatrix} = -2a^2 + 8 = 0 \rightarrow a = \pm 2$

• Si $a \neq 2$ y $a \neq -2 \rightarrow$ El sistema es compatible determinado.

• Si $a = 2$, queda: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \\ 4 & 4 & 10 & 2 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} \text{RangoA} = 2 \\ \text{RangoA}^* = 2 \\ \text{N}^\circ \text{ Incog} = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{Sistema Compatible}$

Indeterminado $\Rightarrow$ Existen infinitas soluciones

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{Un grado de libertad: } z = -1, y = \alpha, x = 3 - \alpha \Rightarrow (x, y, z) = (3 - \alpha, \alpha, -1) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

• Si $a = -2$, quedaría: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 6 & 0 \\ 4 & -4 & 10 & -2 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} \text{RangoA} = 2 \\ \text{RangoA}^* = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$

EJERCICIO 7 : Discute el siguiente sistema de ecuaciones, según los valores del parámetro a . Resolverlo en el caso $a = 3$:

$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ ax + y + az = 3 \\ x + ay + (a+2)z = 1 \end{cases}$$

Solución:

Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & a \\ 1 & a & a+2 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = a^3 - 2a^2 - a + 2 = (a-1)(a+1)(a-2)$

$$|A| = 0 \rightarrow a = 1, a = -1, a = 2$$

• Si $a \neq 1, a \neq -1$ y $a \neq 2 \rightarrow$ El sistema es compatible determinado.

• Si $a = 1$, queda: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} \text{RangoA} = 2 \\ \text{RangoA}^* = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$

• Si $a = -1$, quedaría: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} \text{RangoA} = 2 \\ \text{RangoA}^* = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$

Incompatible

• Si $a = 2$, queda: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} \text{RangoA} = 2 \\ \text{RangoA}^* = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{Sist. Incompatible}$

• Si $a = 3$, queda: $\begin{cases} x + y + 3z = 1 \\ 3x + y + 3z = 3 \\ x + 3y + 5z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

EJERCICIO 8 : Estudia el siguiente sistema homogéneo, según los valores del parámetro m ; y resuélvelo en los casos en los

que resulte ser compatible indeterminado: $\begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ x + my + 2z = 0 \\ 2x + (3+m)y + 4z = 0 \end{cases}$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & m & 2 \\ 2 & 3+m & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{No podemos aplicar Cramer}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & m & 0 \\ 2 & 4 & 3+m & 0 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & m-3 & 0 \\ 0 & 0 & m-3 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow m-3=0 \Rightarrow m=3$$

• Si $m=3$, queda: $x+3y+2z=0 \rightarrow x=-3y-2z$

El sistema es compatible indeterminado, con soluciones: $x=-3\lambda-2\mu$; $y=\lambda$; $z=\mu$, con $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$

• Si $m \neq 3 \rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado. $y=0, z=\alpha, x=-2\alpha \Rightarrow (x,y,z)=(-2\alpha, 0, \alpha) \forall \alpha \in \mathbf{R}$

EJERCICIO 9 : Estudia, en función de a y b , el siguiente sistema de ecuaciones. Resuélvelo en los casos en los que sea

$$\left. \begin{array}{l} x+ay-z=2 \\ \text{compatible indeterminado: } ax-2y+2z=-1 \\ 2x-y+z=b \end{array} \right\}$$

Solución: Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes: $A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = -a^2 + 5a - 4 = 0 \begin{cases} a=1 \\ a=4 \end{cases}$

• Si $a \neq 1$ y $a \neq 4 \rightarrow$ El sistema es compatible determinado, cualquiera que sea el valor de b .

• Si $a=1$, queda: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & b \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & b-4 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{array} \right) \rightarrow b=1$

- Si $a=1$ y $b \neq 1 \rightarrow \text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A') = 3$. El sistema sería incompatible.

- Si $a=1$ y $b=1 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2 < n^\circ \text{ incógnitas}$. El sistema es compatible indeterminado. Lo resolvemos:

$$\begin{cases} x+y-z=2 \\ -y+z=-1 \end{cases} \Rightarrow \text{Un grado de libertad : } z=\alpha, y=\alpha+1, x=1 \Rightarrow (x,y,z)=(1,1+\alpha,\alpha) \forall \alpha \in \mathbf{R}$$

• Si $a=4$, queda: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & b \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -18 & 6 & -9 \\ 0 & -9 & 3 & b-4 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -18 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -2b-1 \end{array} \right) \rightarrow -2b-1=0 \rightarrow b=-\frac{1}{2}$

- Si $a=4$ y $b \neq -\frac{1}{2} \rightarrow \text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A') = 3$. El sistema sería incompatible.

- Si $a=4$ y $b=-\frac{1}{2} \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2 < n^\circ \text{ incógnitas}$

El sistema es compatible indeterminado. Lo resolvemos: $\begin{cases} x+4y-z=2 \\ -6y+2z=-3 \end{cases} \Rightarrow \text{Un grado de libertad: } z=\alpha, y=\frac{3+2\alpha}{6}, x=-\frac{\alpha}{3} \Rightarrow$

$$(x,y,z) = \left(-\frac{\alpha}{3}, \frac{3+2\alpha}{6}, \alpha \right) \quad \forall \alpha \in \mathbf{R}$$

EJERCICIO 10 : Estudia el siguiente sistema según los valores de los parámetros que contiene. Resuélvelo en los casos en los

$$\left. \begin{array}{l} -x+y+z=\mu \\ \text{que sea compatible determinado: } 2x-y+z=2 \\ x+\lambda y+2z=3 \end{array} \right\}$$

Solución:

Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes: $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & \lambda & 2 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 3\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0$

• Si $\lambda \neq 0 \rightarrow$ El sistema es compatible determinado. Para cada valor de $\lambda \neq 0$ y cada valor de μ , tenemos un sistema diferente, cada uno de ellos con solución única. Lo resolvemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \mu & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & \lambda & 2 \end{vmatrix}}{3\lambda} = \frac{2+2\lambda-2\mu-\lambda\mu}{3\lambda}; y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & \mu & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{3\lambda} = \frac{3-3\mu}{3\lambda} = \frac{1-\mu}{\lambda}; z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & \mu \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & \lambda & 3 \end{vmatrix}}{3\lambda} = \frac{-1+2\lambda+\mu+2\lambda\mu}{3\lambda}$$

• Si $\lambda = 0$, queda: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & \mu \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 3 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & \mu \\ 0 & 1 & 3 & 2+2\mu \\ 0 & 1 & 3 & 3+\mu \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & \mu \\ 0 & 1 & 3 & 2+2\mu \\ 0 & 0 & 0 & 1-\mu \end{array} \right) \rightarrow 1-\mu=0 \rightarrow \mu=1$

Si $\lambda = 0$ y $\mu = 1 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2 < n^{\circ} \text{ incógnitas}$. El sistema es compatible determinado.

Si $\lambda = 0$ y $\mu \neq 1 \rightarrow \text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A') = 3$. El sistema es incompatible.

EJERCICIO 11 : Discute el siguiente sistema de ecuaciones, según los valores de los parámetros que contiene. Resuélvelo en

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = 3 \\ x = a \\ 5x + y = 3 + b + 2a \\ x = b \end{array} \right\}$$

Solución:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & a \\ 5 & 1 & 3+b+2a \\ 1 & 0 & b \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2a-3 \\ 0 & -3 & 2b+4a-9 \\ 0 & -1 & 2b-3 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2a-3 \\ 0 & 0 & 2b-2a \\ 0 & 0 & 2b-2a \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2a-3 \\ 0 & 0 & 2b-2a \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow 2b-2a=0 \Rightarrow b=a$$

Si $a = b \Rightarrow \text{Rango } A = \text{Rango } A^* = N^{\circ} \text{ Incógnitas} = 2 \Rightarrow \text{Sistema compatible determinado} \Rightarrow \text{Existe una solución}$

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ -y = 2a - 3 \end{cases} \Rightarrow y = 3 - 2a, x = a \Rightarrow (x, y) = (a, 3 - 2a)$$

Si $a \neq b \Rightarrow \text{Rango } A = 2 \neq \text{Rango } A^* = 3 \Rightarrow \text{Sistema Incompatible} \Rightarrow \text{No tiene solución}$

EJERCICIO 12 : Estudia el siguiente sistema, en función de a y b . Resuélvelo en los casos en los que sea compatible

$$\left. \begin{array}{l} x - y + az = 1 \\ \text{indeterminado: } 2x + y + az = 3 \\ x + 2y - az = b \end{array} \right\}$$

Solución:

Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 2 & 1 & a \\ 1 & 2 & -a \end{pmatrix} \rightarrow |A| = -3a = 0 \rightarrow a = 0$

• Si $a \neq 0 \rightarrow$ El sistema es compatible determinado, cualquier que sea el valor de b .

• Si $a = 0$, queda: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 0 & b \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & b-1 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 \end{array} \right) \Rightarrow b-2=0 \Rightarrow b=2$

- Si $a = 0$ y $b \neq 2 \rightarrow \text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A') = 3$. El sistema es incompatible.

- Si $a = 0$ y $b = 2 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2 < n^{\circ} \text{ incógnitas}$. El sistema es compatible indeterminado. Lo resolvemos:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 3y = 1 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{1}{3}, x = \frac{4}{3}, z = \alpha \Rightarrow (x, y, z) = \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \alpha \right) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

EJERCICIO 13 : Discute, en función de λ y μ , el siguiente sistema de ecuaciones. Resuélvelo en los casos en los que sea

$$\left. \begin{array}{l} x + y + \lambda z = 2 \\ \text{compatible determinado: } -x + 2y - \lambda z = -2 \\ x + 4y + z = \mu \end{array} \right\}$$

Solución:

Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ -1 & 2 & -\lambda \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 3 - 3\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 1$

- Si $\lambda \neq 1 \rightarrow$ El sistema es compatible determinado, cualquiera que sea el valor de μ .

Lo resolvemos aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & \lambda \\ -2 & 2 & -\lambda \\ \mu & 4 & 1 \end{vmatrix}}{3-3\lambda} = \frac{6-3\lambda\mu}{3-3\lambda} = \frac{2-\lambda\mu}{1-\lambda}; y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ -1 & -2 & -\lambda \\ 1 & \mu & 1 \end{vmatrix}}{3-3\lambda} = 0; z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & \mu \end{vmatrix}}{3-3\lambda} = \frac{3\mu-6}{3-3\lambda} = \frac{\mu-2}{1-\lambda}$$

La solución es $\left(\frac{2-\lambda\mu}{1-\lambda}, 0, \frac{\mu-2}{1-\lambda}\right)$.

- Si $\lambda = 1$, queda: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & 1 & \mu \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & \mu-2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu-2 \end{array}\right) \Rightarrow \mu-2=0 \rightarrow \mu=2$

- Si $\lambda = 1$ y $\mu \neq 2 \rightarrow \text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A') = 3$. El sistema es incompatible.

- Si $\lambda = 1$ y $\mu = 2 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2 < n^\circ \text{ incógnitas}$ El sistema es compatible indeterminado.

EJERCICIO 14 : Estudia los siguientes sistemas, según los valores de los parámetros que contienen:

$$\left. \begin{array}{l} 3x - y + z = b \\ -2x + y - z = -3 \\ 4x - ay + z = b \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x - 2y + \lambda z = 5 \\ -x + y - \lambda z = -4 \\ x - 4y + z = \mu \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x - 2y + az = b \\ 3x + y + az = 5 \\ x + 5y - az = 5 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x + y - z = \mu \\ -x + 2y + z = 0 \\ x + \lambda y - z = 3\mu \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x - ay + z = b \\ 2x + ay - z = 2 \\ -x + ay + 2z = 2 \end{array} \right\}$$

Solución:

a) Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -a & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = -a+1=0 \rightarrow a=1$

- Si $a \neq 1 \rightarrow$ El sistema es compatible determinado, cualquier que sea el valor de b .

• Si $a = 1$, queda: $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & b \\ -2 & 1 & -1 & -3 \\ 4 & -1 & 1 & b \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & b \\ 0 & 1 & -1 & -9+2b \\ 0 & 1 & -1 & b-6 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & b \\ 0 & 1 & -1 & -9+2b \\ 0 & 0 & 0 & b-3 \end{array}\right) \rightarrow b-3=0 \rightarrow b=3$

- Si $a = 1$ y $b = 3 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2$. El sistema sería compatible determinado.

- Si $a = 1$ y $b \neq 3 \rightarrow \text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A') = 3$. El sistema sería incompatible.

b) Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & \lambda \\ -1 & 1 & -\lambda \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = \lambda-1=0 \rightarrow \lambda=1$

- Si $\lambda \neq 1 \rightarrow$ El sistema es compatible determinado, cualquiera que sea el valor de μ .

• Si $\lambda = 1$, queda: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & -4 & 1 & \mu \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & \mu-5 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mu-7 \end{array}\right) \rightarrow \mu-7=0 \rightarrow \mu=7$

- Si $\lambda = 1$ y $\mu = 7 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2 > n^\circ \text{ incógnitas}$, el sistema sería compatible determinado.

- Si $\lambda = 1$ y $\mu \neq 7 \rightarrow \text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A') = 3$. El sistema sería incompatible.

c) Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & a & 1 \\ 3 & 1 & a & 3 \\ 1 & 5 & -a & 1 \end{array}\right) \rightarrow |A| = a \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 0$, para cualquier valor de a .

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -a & 5 \\ 3 & 1 & a & 5 \\ 1 & -2 & a & b \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -a & 5 \\ 0 & -14 & 4a & -10 \\ 0 & -7 & 2a & b-5 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -a & 5 \\ 0 & -14 & 4a & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -2b \end{array}\right) \Rightarrow -2b=0 \Rightarrow b=0$

- Si $b = 0 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2$. El sistema sería compatible indeterminado, cualquiera que fuese el valor de a .

- Si $b \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A') = 3$. El sistema sería incompatible.

d) Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow |A| = 0$ para cualquier valor de λ

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & \mu \\ 1 & -1 & \lambda & 3\mu \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \mu \\ 0 & 0 & \lambda+2 & 3\mu \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \mu \\ 0 & 0 & 0 & \lambda\mu-7\mu \end{array}\right) \Rightarrow \lambda\mu-7\mu=0 \Rightarrow \mu(\lambda-7)=0$$

- Si $\mu = 0 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2$. El sistema sería compatible determinado, cualquiera que fuese el valor de λ
- Si $\lambda = 7 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2$. El sistema sería compatible determinado, cualquiera que fuese el valor de μ
- Si $\mu \neq 0$ y $\lambda \neq 7 \rightarrow \text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A') = 3$. El sistema sería incompatible.

$$e) \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & a & 2 \\ 2 & -1 & a & 2 \\ 1 & 1 & -a & b \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & a & 2 \\ 0 & 3 & 3a & 6 \\ 0 & 3 & 2a & b+2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & a & 2 \\ 0 & 3 & 3a & 6 \\ 0 & 0 & -a & b-4 \end{array}\right) \Rightarrow -a=0 \Rightarrow a=0$$

Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -a & 1 \\ 2 & a & -1 \\ -1 & a & 2 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 9a = 0 \rightarrow a=0$

- Si $a \neq 0 \rightarrow \text{Rango } A = \text{Rango } A' = \text{N}^\circ \text{ Incógnitas} \Rightarrow \text{El sistema es compatible determinado, cualquiera que sea el valor de } b$.
- Si $a = 0$ y $b = 4 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2 \neq \text{N}^\circ \text{ Incógnitas}$ El sistema sería compatible indeterminado.
- Si $a = 0$ y $b \neq 4 \rightarrow \text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A') = 3$. El sistema sería incompatible.

Existencia y cálculo de la inversa de una matriz

EJERCICIO 15

a) Calcula el valor de x para que la matriz A tenga inversa: $A = \begin{pmatrix} x & -1 & 1 \\ 1 & x & 0 \\ x & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) Halla A^{-1} para $x = 2$.

Solución:

a) Para que exista A^{-1} es necesario y suficiente que $|A| \neq 0$. Calculamos $|A|$:

$|A| = 1 \neq 0$ para todo x . Por tanto, existe A^{-1} cualquiera que sea el valor de x .

b) Para $x = 2$, queda: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 1$

Hallamos A^{-1} en este caso: $\alpha_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow [\text{Adj}(A)]^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\frac{1}{|A|} [\text{Adj}(A)]^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

EJERCICIO 16 : Calcula, si es posible, la inversa de la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{pmatrix}$ Para los casos en los que $a = 2$ y $a = 0$.

Solución:

Para $a = 2$, queda: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Entonces, $|A| = -2$. En este caso, sí existe A^{-1} . La calculamos:

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -8 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & -2 \\ 2 & -8 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{-5}{2} & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Para $a = 0$, queda: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Como las dos primeras filas son iguales, $|A| = 0$. Por tanto, en este caso, no existe A^{-1} .

EJERCICIO 17

a) Calcula para qué valores de λ existe la inversa de la matriz: $A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 2 \\ 2 & \lambda & -1 \\ -1 & \lambda & 2 \end{pmatrix}$ b) Calcula A^{-1} para $\lambda = 0$.

Solución:

a) La condición necesaria y suficiente para que exista A^{-1} es que $|A| \neq 0$.

$$\text{Calculamos el determinante de } A: |A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 2 \\ 2 & \lambda & -1 \\ -1 & \lambda & 2 \end{vmatrix} = 2\lambda^2 + 4\lambda - 1 + 2\lambda + \lambda^2 + 4 = 3\lambda^2 + 6\lambda + 3 = 3(\lambda + 1)^2$$

$$|A| = 0 \rightarrow 3(\lambda + 1)^2 = 0 \rightarrow \lambda + 1 = 0 \rightarrow \lambda = -1 \quad \text{Por tanto, existe } A^{-1} \text{ para } \lambda \neq -1.$$

$$\text{b) Para } \lambda = 0, \text{ la matriz es: } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 3 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 18

a) Encuentra los valores de a para los que la matriz: $A = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & 1 \\ a-2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ no es inversible. b) Calcula A^{-1} para $a = 2$.

Solución:

a) La condición necesaria y suficiente para que exista A^{-1} es que $|A| \neq 0$.

$$\text{Calculamos el determinante de } A: |A| = \begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & 1 \\ a-2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2a^2 + 2 - (a-2) + a \cdot (a-2) - 2a - 2 = 3a^2 - 5a + 2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow a = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6} \quad \begin{cases} a = 1 \\ a = \frac{2}{3} \end{cases} \quad \text{Por tanto, la matriz no es inversible para } a = 1 \text{ y para } a = \frac{2}{3}.$$

b) Para $a = 2$, tenemos que $|A| = 4$. La matriz A queda:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 19 :

a) Encuentra los valores de m para que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$ no sea inversible.

b) Calcula A^{-1} para $m = 0$.

Solución:

a) La condición necesaria y suficiente para que exista A^{-1} es que $|A| \neq 0$. Calculamos el determinante de A :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = -m^2 + 3m - 2 = 0 \rightarrow m = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-2} = \frac{-3 \pm 1}{-2} \begin{cases} m=1 \\ m=2 \end{cases}$$

Por tanto, A no es inversible para $m=1$ ni para $m=2$.

b) Para $m=0$, la matriz es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = -2$

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 20 : Comprueba que la matriz $A = \begin{pmatrix} a & a^2 - 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ tiene inversa cualquiera que sea el valor del parámetro a y calcula A^{-1}

Solución:

Calculamos el determinante de A : $|A| = \begin{vmatrix} a & a^2 - 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - (a^2 - 1) = a^2 - a^2 + 1 = 1 \neq 0$ para cualquier valor de a

Por tanto, como $|A| \neq 0$, existe A^{-1} para todo a .

Hallamos A^{-1} : $\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1-a^2 & a \end{pmatrix} \rightarrow (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} a & 1-a^2 \\ -1 & a \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} a & 1-a^2 \\ -1 & a \end{pmatrix}$

EJERCICIO 21

a) Estudia para qué valores de λ existe la inversa de la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 0 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$ b) Calcula A^{-1} para $\lambda = 0$

Solución:

a) La condición necesaria y suficiente para que exista A^{-1} es que $|A| \neq 0$.

Calculamos el determinante de A : $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 0 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2 - \lambda + 6 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{-2} = \frac{1 \pm 5}{-2} \begin{cases} \lambda = -3 \\ \lambda = 2 \end{cases}$

Por tanto, existe A^{-1} si $\lambda \neq -3$ y $\lambda \neq 2$.

b) Para $\lambda = 0$, la matriz es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 6$

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 22

a) Halla los valores de a para los que existe la matriz inversa de: $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) Calcula A^{-1} para $a = 0$.

Solución:

a) La condición necesaria y suficiente para que exista A^{-1} es que $|A| \neq 0$.

Calculamos el determinante de A : $|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2 = (a-1)^2(a+2) = 0 \begin{cases} a=1 \\ a=-2 \end{cases}$

Por tanto, existe A^{-1} para $a \neq 1$ y $a \neq -2$.

b) Para $a = 0$; queda: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 2$

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Forma matricial de un sistema de ecuaciones

EJERCICIO 23 : Expresa los siguientes sistemas en forma matricial y resuélvelos utilizando la matriz inversa:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \begin{cases} -3x + y - z = -5 \\ x + 2y + z = 0 \\ 2x + z = 3 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} x - y + z = 6 \\ 2x - y + z = 8 \\ x - 2y + z = 7 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} 2x + 3y + z = 7 \\ x + y - 2z = 5 \\ y + 2z = 0 \end{cases} & \text{d) } \begin{cases} -x + 2y - z = 1 \\ 3x - y + 2z = -4 \\ x - y + z = -1 \end{cases} \\ \text{e) } \begin{cases} 4x + 2y - z = 6 \\ x + z = 1 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases} & \text{f) } \begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ -x + y - z = 1 \\ 2x + y = -4 \end{cases} & \text{g) } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x + 2y = 1 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases} & \text{h) } \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 3x + y + z = 0 \\ x - y + z = 2 \end{cases} \\ & & & \text{i) } \begin{cases} 3x + y - 2z = 10 \\ x + 2y + z = 5 \\ -x + 2z = -3 \end{cases} \end{array}$$

Solución:

a) Expresamos el sistema en forma matricial: $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow AX = C$

Calculamos $|A|$ para ver si existe A^{-1} : $|A| = \begin{vmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{Existe } A^{-1}$

Calcula la inversa de A : $\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

Despejamos X : $AX = C \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}C \rightarrow X = A^{-1}C \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Por tanto, la solución del sistema es: $x = 1$, $y = -1$, $z = 1$

b) Expresamos el sistema en forma matricial: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow AX = C$

Calculamos $|A|$, para ver si existe A^{-1} : $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{Existe } A^{-1}$

Calculamos la inversa de A : $\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Despejamos X : $AX = C \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}C \rightarrow X = A^{-1}C \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Por tanto, la solución del sistema es: $x = 2$, $y = -1$, $z = 3$

c) Expresamos el sistema en forma matricial: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow AX = C$

Para resolverlo, despejamos X multiplicando por la izquierda por A^{-1} : $AX = C \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}C \rightarrow X = A^{-1}C$

Comprobamos que $|A| = 3 \neq 0$ y hallamos A^{-1} : $\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -5 & 4 & -2 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -7 \\ -2 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -5 & -7 \\ -2 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos X : $X = A^{-1}C = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -5 & -7 \\ -2 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Por tanto la solución del sistema es: $x = 1; y = 2; z = -1$

d) Expresamos el sistema en forma matricial: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow AX = C$

Calculamos $|A|$, para ver si existe A^{-1} : $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{Existe } A^{-1}$

Calculamos la inversa de A : $\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

Despejamos X : $AX = C \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}C \rightarrow X = A^{-1}C \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Por tanto, la solución del sistema es: $x = -2, y = 0, z = 1$

e) Expresamos el sistema en forma matricial: $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow AX = C$

Calculamos $|A|$ para ver si existe A^{-1} : $|A| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow \text{Existe } A^{-1}$

Calculamos la inversa de A : $\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 6 & 0 \\ 2 & -5 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 1 & 6 & -5 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 1 & 6 & -5 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Despejamos X : $AX = C \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}C \rightarrow X = A^{-1}C \Rightarrow X = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 1 & 6 & -5 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Por tanto, la solución del sistema es: $x = 1, y = 1, z = 0$

f) Expresamos el sistema en forma matricial:

Si llamamos: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \rightarrow AX = C$

Para resolverlo, despejamos X multiplicando por la izquierda por A^{-1} : $AX = C \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}C \rightarrow X = A^{-1}C$

Comprobamos que $|A| = -1 \neq 0$ y hallamos A^{-1} : $\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -4 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & -1 \\ -3 & -5 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Obtenemos } X: X = A^{-1}C = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución del sistema es: $x = -2$, $y = 0$, $z = 1$

g) Expresamos el sistema en forma matricial: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow AX = C$

Para resolverlo, multiplicamos por la izquierda por A^{-1} : $AX = C \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}C \rightarrow X = A^{-1}C$

Comprobamos que $|A| = -1 \neq 0$ y hallamos A^{-1} :

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -6 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 6 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Obtenemos } X: X = A^{-1}C = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 6 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución del sistema es: $x = 1$, $y = -1$, $z = 1$

h) Expresamos el sistema en forma matricial:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow AX = C$$

Para resolverlo, multiplicamos por la izquierda por A^{-1} : $AX = C \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}C \rightarrow X = A^{-1}C$

Comprobamos que $|A| = 2 \neq 0$ y hallamos A^{-1} :

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -4 \\ -4 & 3 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -4 \\ -4 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Obtenemos } X: X = A^{-1}C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -4 \\ -4 & 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto la solución del sistema es: $x = 0$, $y = -1$, $z = 1$

i) Expresamos el sistema en forma matricial.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \rightarrow AX = C$$

Para resolverlo, multiplicamos por la izquierda por A^{-1} : $A^{-1}AX = A^{-1}C \rightarrow X = A^{-1}C$

Comprobamos que $|A| = 5 \neq 0$ y hallamos A^{-1} :

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 5 & -5 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ -3 & 4 & -5 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ -3 & 4 & -5 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Obtenemos } X: X = A^{-1}C = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ -3 & 4 & -5 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución del sistema es: $x = 3$, $y = 1$, $z = 0$

Resolución de ecuaciones con matrices

EJERCICIO 24

a) Calcula una matriz X que verifique la igualdad: $A \cdot X = B$, con $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) ¿Verifica también la matriz X la igualdad $X \cdot A = B$?

Solución:

$$a) A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Calculamos A^{-1} (existe, pues $|A| = 1 \neq 0$):

$$\alpha_{ij} \rightarrow \text{Adj}(A) \rightarrow [\text{Adj}(A)]^t \rightarrow \frac{1}{|A|} [\text{Adj}(A)]^t$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$\text{Por tanto: } X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = X$$

b) Sabemos que el producto de matrices no es conmutativo y que, por tanto, en general, $M \cdot N \neq N \cdot M$. Pero veamos si en este caso se cumple la igualdad. $X \cdot A = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \neq B$. Por tanto, X no verifica la igualdad $X \cdot A = B$.

EJERCICIO 25 : Halla una matriz, X , tal que $AX + B = 0$, siendo: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

Solución: Calculamos $|A|$ para ver si existe A^{-1} : $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow \text{Existe } A^{-1}$

$$\text{Despejamos } X \text{ en la ecuación dada: } AX + B = 0 \rightarrow AX = -B \rightarrow A^{-1}AX = -A^{-1}B \rightarrow X = -A^{-1}B$$

Hallamos la matriz inversa de A :

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Obtenemos la matriz } X: X = -A^{-1}B = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 2 & -2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 26 : Halla X tal que $AX = B$, siendo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Solución:

Calculamos $|A|$ para ver si existe A^{-1} : $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow \text{Existe } A^{-1}$

$$\text{Despejamos } X \text{ de la ecuación dada: } AX = B \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \rightarrow X = A^{-1}B$$

Hallamos la matriz inversa de

$$A: \text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 5 & -6 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & -6 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t = \frac{-1}{5} \begin{pmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & -6 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Obtenemos la matriz } X: X = \frac{-1}{5} \begin{pmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & -6 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{-1}{5} \begin{pmatrix} -15 & -5 & 5 \\ -5 & 0 & -10 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 27 : Halla una matriz, X, tal que $AX = B$, siendo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Solución:

Despejamos X en la ecuación, multiplicando por la izquierda por A^{-1} : $AX = B \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \rightarrow X = A^{-1}B$

Comprobamos que $|A| = -2 \neq 0$ y hallamos A^{-1} :

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Por tanto: } X = A^{-1}B = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 28 : Resuelve matricialmente el siguiente sistema: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Solución:

Llamamos: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Así, tenemos que $A \cdot X = B$. Hemos de calcular $X = A^{-1} \cdot B$.

Hallamos A^{-1} (existe, pues $|A| = 1 \neq 0$):

$$\alpha_{ij} \rightarrow \text{Adj}(A) \rightarrow [\text{Adj}(A)]^t \rightarrow \frac{1}{|A|} [\text{Adj}(A)]^t$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$\text{Por tanto: } X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{Solución: } x = 2; y = -3; z = 2.$$