41 EJERCICIOS de MATRICES y GRAFOS 2º BACH.

1. Hallar x e y para que ambas matrices sean iguales: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & x & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 & 3 & 0 \\ y & 2 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

2. Indicar tres ejemplos de matriz simétrica de orden 3

Operaciones con matrices:

3. Dadas: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & 0 \\ 1/2 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

hallar: **a)** A+B **b)** –B **c)** A–B **d)** 2C **e)** –3A **f)** A+3B–4C

4. Dadas: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

hallar: **a)** A·B **b)** B·A **c)** A·C **d)** C·A **e)** B·C **f)** C·B **g)** B^2 **h)** A^2 **i)** $B\cdot B^t$ **j)** B^3 **k)** $B\cdot\mathbb{1}_{3x3}$

*(Sol: **a)** $\begin{pmatrix} 1 & 7 & -5 \\ -4 & 8 & -4 \end{pmatrix}$; **b)** No se puede; **c)** $\begin{pmatrix} 12 & -5 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$; **d)** $\begin{pmatrix} 7 & -3 & 0 \\ -5 & -1 & 11 \\ 5 & -5 & 10 \end{pmatrix}$; **e)** $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 7 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}$; **f)** No se puede; **g)** $\begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 \\ 5 & 11 & -1 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$; **h)** No se puede; **i)** $\begin{pmatrix} 9 & 8 & 10 \\ 8 & 10 & 12 \\ 10 & 12 & 20 \end{pmatrix}$; **j)** $\begin{pmatrix} 18 & 30 & -6 \\ 21 & 39 & -3 \\ 12 & 36 & -12 \end{pmatrix}$; **k)** B)*

5. Dada una matriz A, ¿existe una matriz B, tal que el producto AB, o bien el BA, sea una matriz de una sola fila? Indicar ejemplos.

6. Comprobar si existe una matriz B tal que el producto AB sea una matriz de tres filas, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

7. Dadas las siguientes matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

escribir los productos AB y BA.

8. El producto de dos matrices diagonales es otra matriz diagonal. Comprobarlo para dos matrices de orden 3.

9. Resolver la ecuación matricial siguiente e indicar la dimensión de la matriz **X**:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} - 2X = 3\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$\left(Sol: \begin{pmatrix} -4 & -6 & 7/2 \\ -2 & -3 & 1/2 \\ -21/2 & -3 & 7/2 \end{pmatrix} \right)$

10. Calcular $A^2 - 3A - \mathbb{I}$, siendo $A=\begin{pmatrix}2&3\\1&1\end{pmatrix}$ *(Soluc: 0_{2x2})*

11. Comprobar que, dadas dos matrices cuadradas A y B, se verifica: **a)** $\boxed{(A+B)^t=A^t+B^t}$

b) $\boxed{(A\cdot B)^t=B^t\cdot A^t}$

(Utilizar matrices 3x3)

12. Razonar, sin utilizar ejemplos, por qué no son ciertas las habituales identidades notables en el caso de matrices

Potencias n-ésimas de matrices:

13. Demostrar que la matriz $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ satisface la relación $A^n = 2^{n-1}A$

14. Calcular, por inducción, las potencias n-ésimas de las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}a&1\\0&a\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}1&1/7&1/7\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad E=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$F=\begin{pmatrix}0&2&-1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\quad G=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad H=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}\quad J=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

*(Sol: **a)** $A^{4n+1}=A$, $A^{4n+2}=-\mathbb{1}$, $A^{4n+3}=-A$, $A^{4n+4}=1$, $n\in\mathbb{N}$; **b)** $B^n=a^{n-1}\begin{pmatrix}a&n\\0&a\end{pmatrix}$; **c)** $C^n=3^{n-1}C$; **d)** $D^n=\begin{pmatrix}1&n/7&n/7\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$; **e)** $E^n=\begin{pmatrix}1&0&0\\n&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$;*

***f)** $F^2=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $F^n=0_{3x3}\ \forall n\geq 3$; **g)** $G^n=\begin{pmatrix}1&0&n\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$; **h)** $H^n=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2n&0&1\end{pmatrix}$; **j)** $J^n=\begin{pmatrix}2^{n-1}&0&2^{n-1}\\0&1&0\\2^{n-1}&0&2^{n-1}\end{pmatrix}$)*

15. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, se pide: **a)** Calcular A^2, A^3 y A^4, deduciendo una fórmula general para A^n

b) Demostrar que la fórmula anterior también es válida para A^{n+1}

c) ¿Cuánto valdría A^{99}?

Soluc : $\begin{pmatrix}1&99&99\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

16. ***(S)*** Calcular A^2, A^3 y A^{428} dada la siguiente matriz: $A=\begin{pmatrix}4&5&-1\\-3&-4&1\\-3&-4&0\end{pmatrix}$ *(Soluc: $A^{428}=A^2$)*

17. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, se pide: **a)** Calcular A^2, A^3 y A^4

b) Razonar cuánto valdría A^{10}

$\left(\text{Soluc : }\begin{pmatrix}1&45&55\\0&1&45\\0&0&1\end{pmatrix}\right)$

18. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$, hallar A^n *(Soluc: $A^n=A$; A se llama idempotente)*

19. Ídem con $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *(Soluc: $A^{2n+1}=2^n\cdot A$ y $A^{2n+2}=2^n\cdot A^2$, donde $n\in\mathbb{N}$)*

20. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, hallar razonadamente A^{281} *(Soluc: A)*

Matrices que conmutan:

21. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, encontrar la expresión general de la matriz $B=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ tal que el producto de ambas conmute. $\left(\text{Soluc}: B=\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right)$

22. Hallar la forma general de las matrices X que conmutan con $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\left(\text{Soluc}: X=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\right)$

23. Hallar la forma general de las matrices que conmutan con $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\left(\text{Soluc}: X=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\right)$

24. Ídem con $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\left(\text{Soluc}: X=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}\right)$

Problemas varios:

25. ***(S)*** Comprobar que la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ verifica la relación $A^2+\mathbb{1}=0$. Obtener una matriz B_{2x2}, distinta de $\pm A$, que también verifique la relación $B^2+\mathbb{1}=0$

26. ***(S)*** Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, determinar, si es posible, un valor de λ para el que la matriz $(A-\lambda\mathbb{I})^2$ sea la matriz nula. *(Soluc: λ=1)*

27. ***(S)*** Determinar los valores de x, y, z para que se verifique la igualdad

$$\begin{pmatrix} 1 & y \\ x & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ y & z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(Soluc: hay cuatro soluciones posibles: -2,2,1; 2,2,-1; 2,-2,1; -2,-2,-1)

28. **a)** Encontrar dos matrices X e Y que cumplan: $\left.\begin{array}{l} 2X+Y=\begin{pmatrix}1&4\\2&0\end{pmatrix} \\ X-Y=\begin{pmatrix}-1&2\\1&0\end{pmatrix}\end{array}\right\}$

b) Ídem con $\left.\begin{array}{l} 2X-3Y=\begin{pmatrix}1&5\\4&2\end{pmatrix} \\ X-Y=\begin{pmatrix}-1&0\\3&6\end{pmatrix}\end{array}\right\}$ *Soluc:* $\left(\text{Sol}:\ X=\begin{pmatrix}-4&-5\\5&16\end{pmatrix};\quad Y=\begin{pmatrix}-3&-5\\2&10\end{pmatrix}\right)$

29. Calcular **x**, **y**, **z**, **t** para que se cumpla que $\begin{pmatrix}2&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&1\\0&2\end{pmatrix}$ $\left(\textit{Soluc}:\begin{pmatrix}5/2&3/2\\0&2\end{pmatrix}\right)$

Operaciones con datos en tablas:

30. Las velocidades medias de tres coches *A, B* ,*C* en km/h, vienen dadas por la matriz

$$V=\begin{pmatrix}50\\80\\120\end{pmatrix}$$

El número de horas que cada coche viaja viene dado por la matriz H = (3 4 6). Calcular los productos *HV* y *VH*, interpretando los valores de los términos de las matrices resultantes.

(Soluc: El único término de HV representa el total recorrido por los tres coches, 1190 km; cada término de VH representa los km recorridos por el coche a la velocidad que indica la fila en que está situado viajando el número de horas que indica la columna)

31. Se realiza una comparación del precio de cuatro productos en tres supermercados distintos. Los precios por kg de los productos en los distintos supermercados vienen dados por la matriz

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} S_1 & S_2 & S_3 \end{array} \\ \begin{array}{l}\text{Verdura}\\ \text{Carne}\\ \text{Pan}\\ \text{Fruta}\end{array} & \begin{pmatrix} 8 & 9 & 10 \\ 40 & 50 & 40 \\ 4 & 4 & 3{,}5 \\ 12 & 15 & 14 \end{pmatrix}\end{array}$$

El número de kg comprados respectivamente de cada producto cierto día por una familia está dado por la matriz (2 3 1 2). Mediante el producto apropiado de matrices, comparar el coste del total de la compra en los tres supermercados. *(Soluc: La matriz del coste total de los productos es (164 202 171,5))*

32. El consumo anual medio en litros de leche desnatada, semi y entera de tres familias F_1, F_2 y F_3 viene dado por la siguiente matriz:

$$A=\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} \text{desn} & \text{semi} & \text{entera} \end{array} \\ \begin{array}{l}F_1\\ F_2\\ F_3\end{array} & \begin{pmatrix} 430 & 157 & 8 \\ 545 & 210 & 1 \\ 120 & 80 & 3 \end{pmatrix}\end{array}$$

mientras que la evolución de los precios en € de tales productos en los últimos años es:

$$B = \begin{array}{c} \\ \text{desn} \\ \text{semi} \\ \text{ent} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 2006 & 2007 & 2008 & 2009 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 80 & 83 & 90 & 92 \\ 83 & 87 & 88 & 90 \\ 85 & 88 & 90 & 95 \end{pmatrix} \end{array}$$

Calcular e interpretar A·B *(Soluc: Representa el gasto anual de cada familia en leche)*

33. En un centro de estudios de idiomas los alumnos de francés y alemán se distribuyen en 4 niveles como indica la matriz **A**. Los precios que pagan los alumnos por hora de clase dependen del nivel en que se encuentren y de que el aula disponga o no de puestos de laboratorio de idiomas, según figura en la matriz **B**. Calcular lo que percibiría este centro educativo por hora de cada idioma impartido dependiendo de que las aulas estén o no dotadas de los medios mencionados.

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{FR.} & \text{AL.} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 12 & 16 \\ 10 & 11 \\ 15 & 11 \\ 10 & 7 \end{pmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ \text{sin lab.} \\ \text{con lab.} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5 & 5{,}5 & 8 & 10 \\ 7 & 7 & 10 & 12 \end{pmatrix} \end{array}$$

(Soluc: Haciendo BA obtenemos FR sin lab=335 €, FR con lab=424 €, AL sin lab=298,50 € y AL con lab=383 €)

34. Una factoría produce encendedores $\mathbf{P_1}$, rotuladores $\mathbf{P_2}$, y llaveros $\mathbf{P_3}$, para cuya elaboración se precisan materias primas como gas $\mathbf{M_1}$, tinta $\mathbf{M_2}$, plástico $\mathbf{M_3}$ y metal $\mathbf{M_4}$. Dos compañías distribuidoras $\mathbf{D_1}$ y $\mathbf{D_2}$ se encargan de proporcionar a los comercios estos productos. Sea:

$$A = \begin{array}{c} \\ D_1 \\ D_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1000 & 650 & 400 \\ 1000 & 600 & 350 \end{pmatrix} \end{array}$$

la matriz de pedido de los tres productos por parte de los distribuidores,

$$B = \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 10 & 0 & 40 & 10 \\ 0 & 20 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 30 \end{pmatrix} \end{array}$$

la matriz que expresa la cantidad de cada una de las materias primas, en gramos, por unidad de cada producto, y

$$C = \begin{array}{c} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{array} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

la matriz de costes por gramo de cada material ¿Qué materias primas forman parte de los llaveros, y en qué cantidades por unidad producida? Calcular e interpretar el significado de **AB**, **BC** y **ABC**.

(Soluc: En cada llavero hay 30 gr de plástico y 30 gr de metal; AB expresa la cantidad total de cada materia prima que precisa cada distribuidora; BC es la matriz de costes de cada producto; A BC expresa los beneficios que obtiene cada distribuidora)

35. Una empresa produce acero a partir de sus dos materias primas básicas, hierro y carbón. La siguiente matriz muestra la necesidad de ambas materias en los tres cuatrimestres del año, en toneladas:

$$\begin{array}{l} \\ 1^{\underline{er}}\text{ cuatrimestre} \\ 2^{\underline{o}}\text{ cuatrimestre} \\ 3^{\underline{er}}\text{ cuatrimestre} \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} \text{mineral de hierro} & \text{mineral de carbón} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{9}\text{ t} & \mathbf{8}\text{ t} \\ \mathbf{5}\text{ t} & \mathbf{7}\text{ t} \\ \mathbf{6}\text{ t} & \mathbf{4}\text{ t} \end{bmatrix} \end{array}$$

Existen tres posibles proveedores de dichas materias, cuyos costes en € por tonelada de cada materia vienen dados por la siguiente matriz:

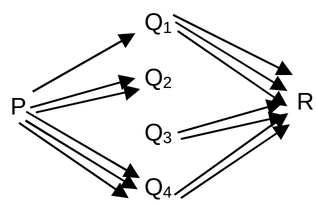
$$\begin{array}{l} \\ \text{mineral de hierro} \\ \text{mineral de carbón} \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} \text{Proveedor A} & \text{Proveedor B} & \text{Proveedor C} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{200}\text{ €/t} & \mathbf{100}\text{ €/t} & \mathbf{300}\text{ €/t} \\ \mathbf{200}\text{ €/t} & \mathbf{300}\text{ €/t} & \mathbf{100}\text{ €/t} \end{bmatrix} \end{array}$$

a) Explicar, razonadamente, cómo se obtendría con ellas la matriz que refleja los costes totales de cada proveedor en cada cuatrimestre.

b) Razonar, a partir de la matriz anterior, cuál es el proveedor más rentable en un año.

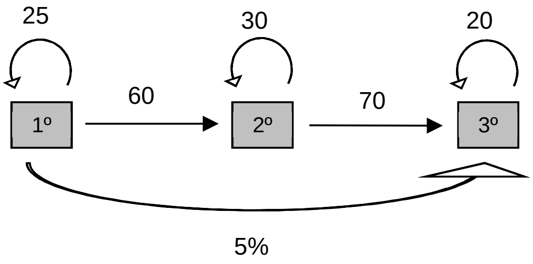
Operaciones con datos en grafos:

36. Para viajar de P a R no hay vuelo directo, sino que hay que hacer escala en alguno de los cuatro aeropuertos de la ciudad Q, según el siguiente grafo:



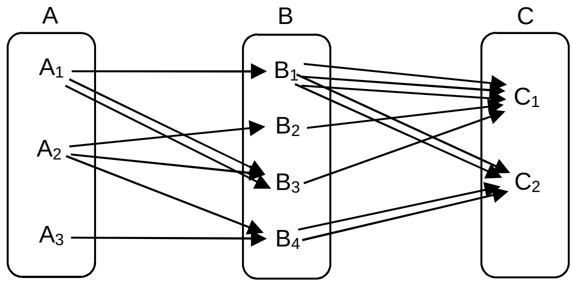
(Por ejemplo, para ir de P a Q_2 hay dos vuelos, mientras que no hay ninguno de Q_2 a R). Construir la matriz fila que representa los vuelos de P a Q_i y la matriz columna de los vuelos de Q_i a R ¿Qué debemos hacer con ambas matrices para obtener el número de combinaciones de vuelos de P a R? ¿Cuántas formas hay de ir de P a R? *(Soluc: Multiplicarlas; 9 formas distintas)*

37. En una academia de idiomas hay 100 alumnos en 1º, 90 en 2º y 80 en 3º. Al final de curso se dan los resultados que se resumen en el siguiente grafo:



Por ejemplo, el 25% de los alumnos de 1º repite, el 60% pasa a 2º y el 5% pasa directamente a 3º (el resto abandona). Formar adecuadamente la matriz 3x3 que representa el % de alumnos que pasan a los diferentes cursos. ¿Cómo debe operarse con la matriz columna que recoge el nº de alumnos por nivel en el presente curso para obtener el nº de alumnos por nivel el próximo curso? *(Soluc: Hay que multiplicar la matriz cuadrada por la matriz columna, y el resultado será 25 87 84)*

38. En una ciudad A hay tres aeropuertos A_1, A_2 y A_3, en B hay cuatro y en C dos. Una persona que quiera ir de A a B un cierto día de la semana, y de B a C al día siguiente, dispone de los vuelos que se recogen en el siguiente grafo:

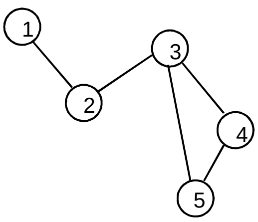


Construir sendas matrices que represententen los vuelos de A a B y de B a C. ¿Qué operación debe hacerse entre ellas para obtener el número de formas distintas de ir de A a C?

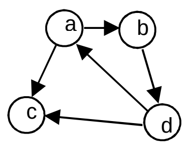
Matriz de adyacencia:

39. Dados los siguientes grafos, indicar de qué tipo se tratan y obtener su matriz de adyacencia:

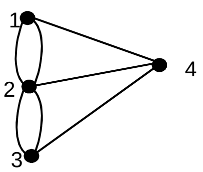
a)



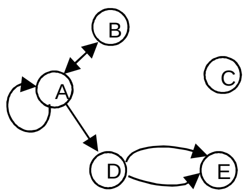
b)



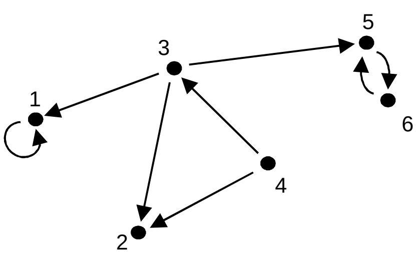
c)



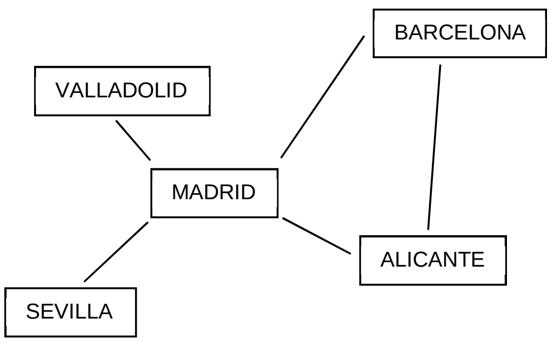
d)



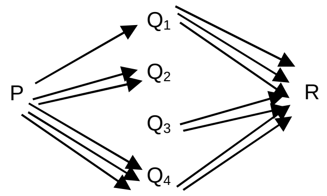
e)



f)



g)



40. Dadas las siguientes matrices de adyacencia, dibujar los grafos que representan, e indicar de qué tipo se tratan:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **f)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **g)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

41. Los distintos vuelos de una compañía a aeropuertos de 4 países A, B, C y D vienen definidos por la siguiente matriz de adyacencia:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Dibujar el grafo correspondiente.