Opción A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Halla la matriz X que satisface la siguiente ecuación: $A\cdot X\cdot B+C=D$, siendo

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&2&-3\end{pmatrix}\ y\ D=\begin{pmatrix}3&1&2\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$X\in M_{2\times3}$, *por tanto* $X=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1&2\\0&1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&2&-3\end{pmatrix}$

$\Rightarrow\begin{pmatrix}a&b-c&c\\-a+d&-b+e+c-f&-c+f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\1&-1&3\end{pmatrix}$*, igualando las matrices obtenemos el sistema*

$$\begin{cases}a=2\\b-c=-1\\c=-1\\-a+d=1\\-b+e+c-f=-1\\-c+f=3\end{cases}$$ *y resolviéndolo nos queda que* $X=\begin{pmatrix}2&-2&-1\\3&0&2\end{pmatrix}$

Otra forma de resolver la ecuación matricial, muy interesante cuando las matrices que intervienen en el producto no tienen tantos ceros, es la siguiente:

$$A\cdot X\cdot B+C=D\Rightarrow A\cdot X\cdot B=D-C\ \Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X\cdot B\cdot B^{-1}=A^{-1}\cdot(D-C)\cdot B^{-1}$$

$\Rightarrow X=A^{-1}\cdot(D-C)\cdot B^{-1}$ *y calculando las inversas de* A *y* B $X=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-1&-1\\1&-1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow X=\begin{pmatrix}2&-2&-1\\3&0&2\end{pmatrix}$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}x&y&0&0\\0&x&y&0\\0&0&x&y\\y&0&0&x\end{pmatrix}$, dedúzcase cuándo A **no** tiene inversa.

A no tiene inversa cuando su determinante es igual a cero, por tanto desarrollemos ese determinante:

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 \\ 0 & 0 & x & y \\ y & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = x\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} x & y & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} + y\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 0 & y & 0 \\ 0 & x & y \\ y & 0 & x \end{vmatrix} = x\cdot x^3 - y\cdot y^3 = x^4 - y^4$$

$$x^4 - y^4 = 0 \Rightarrow (x^2-y^2)\cdot(x^2+y^2)=0 \Rightarrow x^2-y^2=0 \Rightarrow (x-y)\cdot(x+y)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ x=-y \end{cases}$$

Entonces A no tiene inversa cuando $x=y$ *o* $x=-y$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 3 puntos)

- Sabiendo que $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$; calcula el valor de $|A^2|$, $|2AA^t|$, $\left|(A^t)^{-1}\right|$ y $\begin{vmatrix} a & 1 & 3 \\ 3b & 3 & 0 \\ a+c & 2 & 8 \end{vmatrix}$

$* \ |A^2| = |A\cdot A| = |A|\cdot|A| = 1\cdot 1 = 1$

$* \ |2A\cdot A^t| = |2A|\cdot|A^t| = 2^3\cdot|A|\cdot|A| = 2^3\cdot 1\cdot 1 = 8 \qquad (A \text{ es una matriz } 3\times 3)$

$\text{Como} \quad A\cdot A^{-1} = I \Rightarrow |A\cdot A^{-1}| = |I| \Rightarrow |A|\cdot|A^{-1}| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

$* \ \left|(A^t)^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A^t|} = \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{1}{1} = 1$

$$* \begin{vmatrix} a & 1 & 3 \\ 3b & 3 & 0 \\ a+c & 2 & 8 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} a & 1 & 3 \\ b & 1 & 0 \\ a+c & 2 & 8 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} a & b & a+c \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 8 \end{vmatrix} = -3\cdot\begin{vmatrix} a & b & a+c \\ 3 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}_{C_3=C_3-C_1} = -3\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

- Sin desarrollar, probar que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7+1 & 8-1 & 9+0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Sea $A = I - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1/4 & 3/2 \end{pmatrix}$, donde I es la matriz unidad. Comprueba que A^2 es proporcional a A y deduce la expresión general de A^n.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1/4 & 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1/4 & -1/2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1/4 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1/4 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ 1/8 & -1/4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \; A^2 = \frac{1}{2} \cdot A \; \Rightarrow \; A^2 \; es \; proporcional \; a \; A$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ 1/8 & -1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1/4 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 \\ 1/16 & -1/8 \end{pmatrix}; \; también \; A^3 = A^2 \cdot A = \frac{1}{2} \cdot A \cdot A = \frac{1}{2} \cdot A^2 = \frac{1}{4} \cdot A$$

$$del \; mismo \; modo \; A^4 = A^3 \cdot A = \frac{1}{4} \cdot A \cdot A = \frac{1}{4} \cdot A^2 = \frac{1}{8} \cdot A \Rightarrow A^n = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot A \quad entonces$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1/2^{n-1} & -1/2^{n-2} \\ 1/2^{n+1} & -1/2^n \end{pmatrix}$$

Opción B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

- Calcula el siguiente determinante de orden n:

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix}_{\substack{C_1 = C_1 - C_n \\ C_2 = C_2 - C_n \\ C_3 = C_3 - C_n \\ \cdots\cdots \\ C_{n-1} = C_{n-1} - C_n}} = \begin{vmatrix} 1-n & 0 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 2-n & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 3-n & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} =$$

$$= (1-n) \cdot (2-n) \cdot (3-n) \cdots (n-2-n) \cdot (n-1-n) \cdot n = n \cdot (1-n) \cdot (2-n) \cdot (3-n) \cdots (-2) \cdot (-1) = (-1)^{n-1} \cdot n!$$

- Demostrar que si A es una matriz 3×3 tal que $A^t=-A$, entonces $|A|=0$. ¿Y si A es una matriz $n\times n$, se verifica lo anterior?

Sabemos que se cumple $|A|=|A^t|$; *como* $A\in M_{3\times 3} \Rightarrow \ |-A|=(-1)^3\cdot|A|=-|A|$, *entonces*

$A^t=-A \ \Rightarrow |A^t|=|-A| \ \Rightarrow |A|=-|A| \ \Rightarrow \ |A|=0$

Si $A\in M_{n\times n} \ \Rightarrow \ |-A|=(-1)^n|A| \ \Rightarrow$ *si n es impar* $|A|=0$, *si n es par no se puede asegurar que* $|A|=0.$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Calcula los valores del parámetro λ para los que las matrices $A\cdot B$ y $B\cdot A$ son invertibles, siendo $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & \lambda\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ \lambda & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$. Calcula la inversa de las matrices en función de λ.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2 & \lambda\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ \lambda & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2\lambda & 3+2\lambda\\ 1-\lambda & 1\end{pmatrix} \ ; \ (AB) \text{ es invertible} \Leftrightarrow |AB|\neq 0$$

$$\begin{vmatrix}1+2\lambda & 3+2\lambda\\ 1-\lambda & 1\end{vmatrix}=1+2\lambda-(3+2\lambda)\cdot(1-\lambda)=2\lambda^2+3\lambda-2 \ ; \ 2\lambda^2+3\lambda-2=0 \ \Rightarrow \begin{cases}\lambda=\dfrac{1}{2}\\ \lambda=-2\end{cases}$$

(AB) *tiene inversa si* $\lambda\neq\dfrac{1}{2}$ *y* $\lambda\neq -2$

$(AB)^{-1}=\dfrac{1}{|AB|}\cdot[adj(AB)]^t$ $\qquad (AB)_{11}=(-1)^{1+1}\cdot 1$ $\qquad (AB)_{21}=(-1)^{2+1}\cdot(3+2\lambda)$

$\qquad (AB)_{12}=(-1)^{1+2}\cdot(1-\lambda)$ $\qquad (AB)_{22}=(-1)^{2+2}\cdot(1+2\lambda)$

$$(AB)^{-1}=\frac{1}{2\lambda^2+3\lambda-2}\cdot\begin{pmatrix}1 & -3-2\lambda\\ \lambda-1 & 1+2\lambda\end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ \lambda & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & \lambda\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -1 & \lambda-3\\ \lambda & 2\lambda & \lambda^2\\ 2 & -2 & -2\end{pmatrix}; \quad (BA) \text{ es invertible} \Leftrightarrow |BA|\neq 0$$

$$\begin{vmatrix}4 & -1 & \lambda-3\\ \lambda & 2\lambda & \lambda^2\\ 2 & -2 & -2\end{vmatrix}=-16\lambda-2\lambda^2-2\lambda^2+6\lambda-4\lambda^2+12\lambda+8\lambda^2-2\lambda=0$$

$|BA|=0$, *independientemente del valor de* $\lambda \ \Rightarrow (BA)$ *no tiene inversa* $\forall\lambda\in\mathbb{R}$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Resuelve la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 2 & x & 2 & 2 \\ 3 & 5 & x & 3 \\ 4 & 4 & 4 & x+3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 2 & x & 2 & 2 \\ 3 & 5 & x & 3 \\ 4 & 4 & 4 & x+3 \end{vmatrix}_{F_4=F_4-4F_1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 2 & x & 2 & 2 \\ 3 & 5 & x & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3-3x \end{vmatrix} = (3-3x)\cdot(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & x & 2 \\ 3 & 5 & x \end{vmatrix}_{\substack{C_3=C_3-C_1 \\ C_2=C_2-C_1}} = (3-3x)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & x-2 & 0 \\ 3 & 2 & x-3 \end{vmatrix} = (3-3x)(x-2)(x-3)$$

$$(3-3x)(x-2)(x-3)=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=1 \\ x=2 \\ x=3 \end{cases}$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ encontrar las matrices $B=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ tales que $AB=-BA$.

$$\left.\begin{aligned} AB&=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3a & 3b-4c \\ 2a & 2b-3c \end{pmatrix} \\ BA&=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3a+2b & -4a-3b \\ 2c & -3c \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} AB=-BA \Rightarrow \begin{pmatrix} 3a & 3b-4c \\ 2a & 2b-3c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3a-2b & 4a+3b \\ -2c & 3c \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a=-3a-2b \\ 3b-4c=4a+3b \\ 2a=-2c \\ 2b-3c=3c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-3a \\ c=-a \end{cases} \Rightarrow B=\begin{pmatrix} a & -3a \\ 0 & -a \end{pmatrix}$$