

Problemas. Todos ellos valen 2.5 puntos

1. Dado el sistema:
$$\begin{cases} kx - 2y + z = 1 \\ 2x + (k+1)y - 2z = 2 \\ (k+4)x + 2ky - 3z = 5 \end{cases}$$

- a) Discutir las soluciones del sistema según los valores de k. (1.75 puntos)
b) Resolver cuando k=0. (0.75 puntos)

Solución

a)

$$A^* = \begin{pmatrix} k & -2 & 1 & 1 \\ 2 & k+1 & -2 & 2 \\ k+4 & 2k & -3 & 5 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} k & -2 & 1 \\ 2 & k+1 & -2 \\ k+4 & 2k & -3 \end{pmatrix}$$

Rango de A:

$$|A|=0$$

$$\begin{vmatrix} k & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2k - 2 = 0 \quad \text{si } k = -1$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ k+1 & -2 \end{vmatrix} = 3 - k = 0 \quad \text{si } k = 3$$

Independientemente del valor de k el rango es 2, pues si k=-1 el segundo menor de orden 2 es distinto de cero, y si k=3 es el primero el que es distinto de cero.

$$\text{Rang}(A)=2 \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

Rango de A*

$$\begin{vmatrix} k & -2 & 1 \\ 2 & k+1 & 2 \\ k+4 & 2k & 5 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ k+4 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ k+1 & -2 & 2 \\ 2k & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Luego } \text{Rang}(A^*)=2 \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

Solución: $\forall k \in \mathbb{R}$ se cumple que $\text{rang}(A)=\text{rang}(A^*)=2 \rightarrow \text{SCI}(\infty \text{ soluciones con un parámetro libre})$

b) Si k=0 $\rightarrow \text{SCI}$ (2 ecuaciones con 3 incógnitas):

$$\begin{cases} -2y + z = 1 \\ 2x + y - 2z = 2 \\ 4x - 3z = 5 \end{cases}$$

Cojamos la 1ª y 3ª ecuación y la z como parámetro libre:

$$\begin{cases} -2y = 1 - z \\ 4x = 5 + 3z \end{cases} \rightarrow \text{Solucion: } \begin{cases} x = \frac{3t+5}{4} \\ y = \frac{t-1}{2} \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

2. Sea el siguiente sistema

$$\begin{cases} mx + y - z = 2 \\ x + my = 0 \\ x + y - z = m + 2 \end{cases}:$$

- Discute según los valores del parámetro a (1.5ptos)
- Resuelve el sistema cuando m=1 y cuando a=2 (1 pto)

Solución

a)

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & m & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} m & 1 & -1 & 2 \\ 1 & m & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & m+2 \end{pmatrix}$$

- Estudiemos el rango de A: $|A| = -m^2 + m = 0$ si m=0, m=1

1. $\forall m \in \mathbb{R} - \{0, 1\} \rightarrow \text{rang}(A) = 3$

2. Para m=1:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{rang}(A(m=1)) = 2$$

3. Para m=0:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{rang}(A(m=0)) = 2$$

- Estudiemos el rango de A*:

1. Para $m \in \mathbb{R} - \{1, 0\}$ $\text{rang}(A^*) = 3$, pues $\text{rang}(A) = 3$.

2. Para m=1

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \text{ tenemos que el menor de orden 3: } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \text{ rang}(A^*)=3$$

3. Para $m=0$

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Todos los menores de de orden 3 son nulos:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{rang}(A^*)=2 \text{ pues}$$

Resumamos los resultados en la siguiente tabla

	$m=1$	$m=0$	$m \in \mathbb{R} - \{1,0\}$
$\text{rang}(A)$	2	2	3
$\text{rang}(A^*)$	3	2	3
	Inc	C.I.	C. D.

Conclusión:

- $\forall m \in \mathbb{R} - \{1,0\}$, sistema compatible determinado,
- si $m=0$, sistema compatible indeterminado, y si $m=1$, sistema incompatible.

b) $m=1 \rightarrow$ Sistema incompatible no solución.

$$m=2 \rightarrow \begin{cases} (1) 2x + y - z = 2 \\ (2) x + 2y = 0 \\ (3) x + y - z = 4 \end{cases} (S) \text{ Compatible determinado, resolvemos por Cramer:}$$

$$|A|=-2$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = -2, y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = 1, z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{-2} = -5$$

3. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- a) Calcular A^n para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Concretar para $n=6$. (0.75 puntos)
- b) Resolver la ecuación matricial: $A \cdot X = -2 \cdot B \cdot X + B$ (1 punto)
- c) Sea $D \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ formada por las columnas c_1, c_2, c_3 , y tal que $|D|=3$. Dada la matriz $C = (c_1 + c_2, -2c_3, c_3 + 2c_1)$. Calcular el determinante de C^{-1} . (0.75 puntos)

Solución

$$\text{a) } A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 \\ -8 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} -(-2)^{n-1} & 0 & (-2)^{n-1} \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ -(-2)^{n-1} & 0 & -(-2)^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$A^6 = \begin{pmatrix} -(-2)^5 & 0 & (-2)^5 \\ 0 & (-1)^6 & 0 \\ -(-2)^5 & 0 & -(-2)^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 0 & -32 \\ 0 & 1 & 0 \\ -32 & 0 & 32 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A \cdot X = -2 \cdot B \cdot X + B \rightarrow (A + 2 \cdot B)X = B \rightarrow X = (A + 2B)^{-1} \cdot B$$

$$A + 2B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (A + 2B)^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 0 \\ -9 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$X = (A + 2B)^{-1} \cdot B = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 0 \\ -9 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \det(C) &= \det(c_1 + c_2, -2c_3, c_3 + 2c_1) = \det(c_1, -2c_3, c_3 + 2c_1) + \det(c_2, -2c_3, c_3 + 2c_1) \\ &= 0 + \det(c_2, -2c_3, c_3) + \det(c_2, -2c_3, 2c_1) = \det(c_2, -2c_3, 2c_1) = -4 \det(c_2, c_3, c_1) = \\ &= -4(-1)(-1)\det(c_1, c_2, c_3) = -4 \cdot 3 = -12 \\ \det(C^{-1}) &= -1/12 \end{aligned}$$

4. Sea $f(x)=x^3/(x^2+1)$.

a) Hallar dominio, simetría, asíntotas y monotonía. Representar. (1.5 puntos)

b) Calcular $\int_0^1 f(x)dx$

Solución

a)

Dom($f(x)$)= $\mathbb{R}$

$f(-x)=-x^3/(x^2+1)=-f(x) \rightarrow$ Simetría impar

Asíntotas

AV: No tiene

AH: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$. No tiene

AO: $y=x$

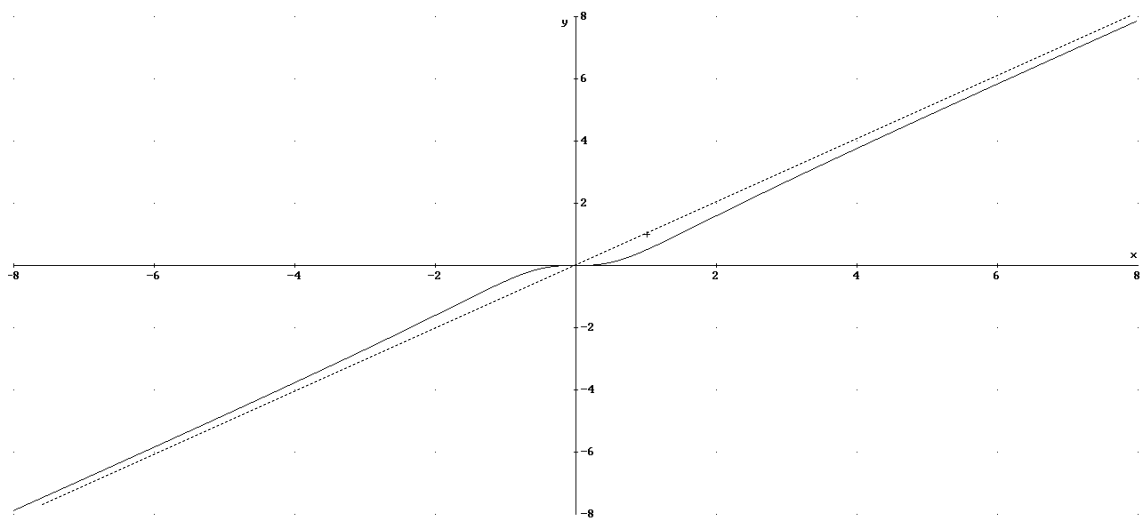
$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x^3 + x} = 1.$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - x^3 - x}{x^2 + 1} = 0.$$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - 2x^4}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow x=0$$

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
Sig($f'(x)$)	+	0	+
Monotonía	Crece	(0,0)	Crece

La función crece en $\mathbb{R}-\{0\}$. Al ser $x=0$ una raíz doble será un punto de inflexión



b)

$$\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1} dx = \int_0^1 x dx - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \left[\frac{1}{2}(x^2 + \ln(x^2+1)) \right]_0^1 = \frac{1}{2}(1 - \ln(2))$$

$$\begin{array}{r} x^3 \qquad | \ x^2+1 \\ -x^3 \quad -x \quad x \\ \hline \underbrace{\qquad}_{-x} \end{array}$$