BLOQUE II

Geometría

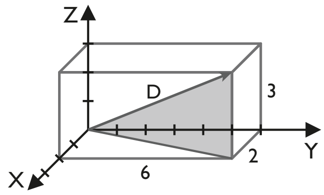
5. Vectores en el espacio
6. Espacio afín
7. Espacio métrico
8. La esfera

5 Vectores en el espacio

1. Operaciones con vectores

■ Piensa y calcula

Calcula mentalmente la longitud de la diagonal del ortoedro aplicando el teorema de Pitágoras en el espacio.



Solución:

$L = \sqrt{6^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{49} = 7$ unidades

● Aplica la teoría

1. Calcula el módulo de los siguientes vectores:

a) $\vec{v}(8, 4, 1)$ b) $\vec{v}(-2, 9, 6)$

c) $\vec{v}(4, -2, 0)$ d) $\vec{v}(-3, -1, 4)$

Solución:

a) $|\vec{v}| = \sqrt{8^2 + 4^2 + 1^2} = 9$

b) $|\vec{v}| = \sqrt{(-2)^2 + 9^2 + 6^2} = 11$

c) $|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

d) $|\vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{26}$

2. Se sabe que un vector del espacio es $\vec{v} = 4\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

Determina los valores posibles de la coordenada **z** sabiendo que el $|\vec{v}| = 13$

Solución:

$|\vec{v}| = 13$

$\sqrt{4^2 + (-12)^2 + z^2} = 13$

$z^2 + 160 = 169$

$z = \sqrt{9} = \pm 3$

3. Calcula un vector unitario en la dirección del vector $\vec{v}$ en los siguientes casos:

a) $\vec{v}(1, 2, 2)$ b) $\vec{v}(-3, 1, 2)$

Solución:

a) $|\vec{v}| = 3$

$\vec{u}\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

b) $|\vec{v}| = \sqrt{14}$

$\vec{u}\left(\frac{-3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}\right)$

4. Dados los vectores $\vec{u}(3, -2, 5)$ y $\vec{v}(-1, 4, -6)$, calcula:

a) $2\vec{u}$ b) $-\vec{v}$

c) $\vec{u} + \vec{v}$ d) $\vec{u} - \vec{v}$

Solución:

a) $2\vec{u} = 2(3, -2, 5) = (6, -4, 10)$

b) $-\vec{v} = (1, -4, 6)$

c) $\vec{u} + \vec{v} = (3, -2, 5) + (-1, 4, -6) = (2, 2, -1)$

d) $\vec{u} - \vec{v} = (3, -2, 5) - (-1, 4, -6) = (4, -6, 11)$

5. Dados los vectores $\vec{u}(1, -4, -3)$, $\vec{v}(2, 5, -1)$ y $\vec{w}(-6, 0, 5)$, calcula:

a) $\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$ b) $2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$

Solución:

a) $\vec{u} + \vec{v} - \vec{w} = (1, -4, -3) + (2, 5, -1) - (-6, 0, 5) = (9, 1, -9)$

b) $2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w} = 2(1, -4, -3) - (2, 5, -1) + (-6, 0, 5) = (-6, -13, 0)$

6. Dados los vectores $\vec{u}(1, 0, -2)$, $\vec{v}(3, 4, -1)$, $\vec{w}(1, -1, 3)$ y $\vec{x}(8, 5, 9)$, calcula el valor de **a, b** y **c** para que:

$$\vec{x} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$$

Solución:

$(8, 5, 9) = a(1, 0, -2) + b(3, 4, -1) + c(1, -1, 3)$

$$\left.\begin{array}{r} a + 3b + c = 8 \\ 4b - c = 5 \\ -2a - b + 3c = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow a = -1,\ b = 2,\ c = 3$$

2. Problemas de vectores

Piensa y calcula

Expresa el vector $\vec{u}(1, 2, 3)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{v}(2, -1, 5)$ y $\vec{w}(-1, 3, -2)$

Solución:

$\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$

$(1, 2, 3) = (2, -1, 5) + (-1, 3, -2)$

Aplica la teoría

7. Dados los puntos $A(3, -1, 2)$ y $B(-1, 2, 1)$, calcula los vectores siguientes:

a) $\overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{BA}$

¿Qué relación hay entre los dos vectores?

Solución:

a) $\overrightarrow{AB}(-4, 3, -1)$

b) $\overrightarrow{BA}(4, -3, 1)$

Los vectores son opuestos.

8. Calcula el punto medio del segmento definido por los puntos siguientes:

$A(6, -5, 3)$ y $B(4, -3, 7)$

Solución:

$M(5, -4, 5)$

9. Calcula el baricentro del triángulo cuyos vértices son los puntos siguientes:

$A(2, 1, -4)$, $B(-5, 1, 3)$ y $C(6, 7, -5)$

Solución:

$G(1, 3, -2)$

10. Calcula el centro de gravedad del tetraedo cuyos vértices son los puntos siguientes:

$A(1, 2, -1)$, $B(3, 1, 3)$, $C(2, -3, 5)$ y $D(6, -4, 1)$

Solución:

$G(3, -1, 2)$

11. Las coordenadas de tres vértices consecutivos de un paralelogramo son:

$A(4, 7, -3)$, $B(5, 1, -2)$ y $C(3, 2, -4)$

Calcula las coordenadas del vértice D

Solución:

El vector $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BC}(-2, 1, -2)$

$\overrightarrow{OD} = (4, 7, -3) + (-2, 1, -2) = (2, 8, -5)$

12. Estudia si el vector $\vec{a}(-6, 15, 9)$ se puede expresar como combinación lineal de $\vec{u}(3, -1, 2)$, $\vec{v}(4, 3, -1)$ y $\vec{w}(-2, 5, 1)$

Solución:

$\vec{a} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$

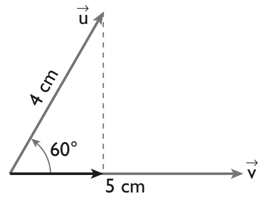
$(-6, 15, 9) = x(3, -1, 2) + y(4, 3, -1) + z(-2, 5, 1)$

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 4y - 2z = -6 \\ -x + 3y + 5z = 15 \\ 2x - y + z = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 2,\ y = -1,\ z = 4$$

3. Producto escalar

Piensa y calcula

El módulo del vector $\vec{u}$ mide 4 cm y el módulo del vector $\vec{v}$ mide 5 cm. Si los vectores forman un ángulo de 60°, calcula la longitud de la proyección del vector $\vec{u}$ sobre el vector $\vec{v}$



Solución:

$$\cos 60° = \frac{\text{proy}_{\vec{v}}\,\vec{u}}{|\vec{u}|}$$

$\text{proy}_{\vec{v}}\,\vec{u} = |\vec{u}| \cos 60°$

$\text{proy}_{\vec{v}}\,\vec{u} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$ unidades.

Aplica la teoría

13. Calcula el producto escalar de los vectores siguientes:

a) $\vec{u}(3, -1, 4)$ y $\vec{v}(1, 5, -2)$

b) $\vec{u}(6, 0, 1)$ y $\vec{v}(2, -1, 3)$

Solución:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -10$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 15$

14. Sea $|\vec{a}| = 3$ y $|\vec{b}| = 4$. Si el ángulo que forman los vectores es 60°, calcula:

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$

b) $\vec{a} \cdot \vec{a}$

c) $\vec{b} \cdot \vec{b}$

d) $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b})$

Solución:

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 4 \cos 60° = 6$

b) $\vec{a} \cdot \vec{a} = 3 \cdot 3 \cos 0° = 9$

c) $\vec{b} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 4 \cos 0° = 16$

d) $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - \cancel{\vec{a} \cdot \vec{b}} + \cancel{\vec{b} \cdot \vec{a}} - \vec{b} \cdot \vec{b} =$

$= 9 - 16 = -7$

15. Calcula la proyección del vector $\vec{u}$ sobre el vector $\vec{v}$ en los siguientes casos:

a) $\vec{u}(1, -2, 3)$ y $\vec{v}(2, 4, 1)$

b) $\vec{u}(3, 1, 5)$ y $\vec{v}(2, -2, 1)$

Solución:

$$\text{proy}_{\vec{v}}\,\vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$$

a) $$\text{proy}_{\vec{v}}\,\vec{u} = \frac{1 \cdot 2 - 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 1^2}} = -\frac{3}{\sqrt{21}} = -\frac{\sqrt{21}}{7} =$$

$= -0{,}65$ unidades.

b) $$\text{proy}_{\vec{v}}\,\vec{u} = \frac{3 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) + 5 \cdot 1}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{9}{3} = 3 \text{ unidades.}$$

16. Calcula el ángulo que forman los vectores siguientes:

a) $\vec{u}(2, 0, 1)$ y $\vec{v}(2, -2, 1)$

b) $\vec{u}(2, -1, 3)$ y $\vec{v}(1, 5, 2)$

Solución:

a) $$\cos\alpha = \frac{2 \cdot 2 + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 1}{\sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{5}{3\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \alpha = 41° \, 48' \, 37''$$

b) $$\cos\alpha = \frac{2 \cdot 1 - 1 \cdot 5 + 3 \cdot 2}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1^2 + 5^2 + 2^2}} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{30}} \Rightarrow \alpha = 81° \, 34' \, 57''$$

17. Calcula el valor de **k** para que los vectores siguientes sean ortogonales:

a) $\vec{u}(5, -2, k)$ y $\vec{v}(4, 1, -3)$

b) $\vec{u}(-2, k, 5)$ y $\vec{v}(1, 3, -k)$

Solución:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow 20 - 2 - 3k = 0 \Rightarrow k = 6$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow -2 + 3k - 5k = 0 \Rightarrow k = -1$

18. Calcula un vector unitario ortogonal al vector:

$\vec{v}(2, 0, -1)$

Solución:

Un vector $\perp$ a $\vec{v}$ es: $(1, 0, 2)$

$|\vec{v}| = \sqrt{5}$

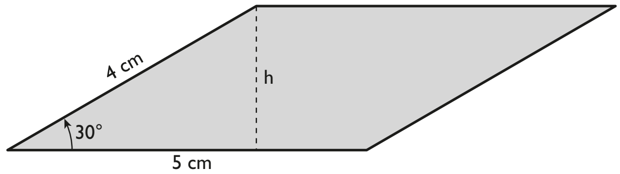
Como debe ser unitario, el vector será:

$$\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

4. Producto vectorial

Piensa y calcula

Calcula el área del paralelogramo de la figura.



Solución:

$A = 5 \cdot 4 \text{ sen } 30° = 10 \text{ cm}^2$

Aplica la teoría

19. Calcula el producto vectorial de los siguientes vectores:

a) $\vec{u}(1, -2, 4)$ y $\vec{v}(-2, 1, -3)$

b) $\vec{u}(4, 0, -1)$ y $\vec{v}(1, -1, 2)$

Solución:

a) $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (2, -5, -3)$

b) $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-1, -9, -4)$

20. Dados los vectores $\vec{u}(2, -3, 1)$, $\vec{v}(3, 1, 2)$ y $\vec{w}(1, 2, 3)$, calcula:

a) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ b) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$

Solución:

a) $\vec{u} \times \vec{v} = (-7, -1, 11)$

$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (-25, 32, -13)$

b) $\vec{v} \times \vec{w} = (-1, -7, 5)$

$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (-8, -11, -17)$

21. Halla un vector perpendicular a los vectores siguientes:

$\vec{u}(2, -1, 0)$ y $\vec{v}(5, 1, -2)$

Solución:

$\vec{u} \times \vec{v} = (2, 4, 7)$

22. Sean dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ perpendiculares entre sí. Si $|\vec{a}| = 3$ y $|\vec{b}| = 4$, calcula:

$(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})$

Solución:

$(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \times \vec{a} - \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{a} - \vec{b} \times \vec{b} =$

$= 2\vec{b} \times \vec{a} = 2|\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \text{ sen } 90° =$

$= 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 = 24$

23. Dados los vectores $\vec{u}(3, -1, -2)$ y $\vec{v}(1, 2, -1)$, halla:

a) $\vec{u} \times \vec{v}$ b) $(2\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{v}$

Solución:

a) $\vec{u} \times \vec{v} = (5, 1, 7)$

b) $(2\vec{u} + \vec{v}) = (7, 0, -5)$

$(2\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{v} = (10, 2, 14)$

24. Halla el área del paralelogramo definido por los vectores:

$\overrightarrow{AB}(2, -2, -3)$ y $\overrightarrow{AC}(2, 0, 3)$

Solución:

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = (-6, -12, 4)$

Área $= |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = 14$ unidades cuadradas.

25. Calcula el área del triángulo ABC tal que:

$A(1, 2, 1)$, $B(1, -1, 0)$ y $C(2, 1, 1)$

Solución:

$\overrightarrow{AB}(0, -3, -1)$

$\overrightarrow{AC}(1, -1, 0)$

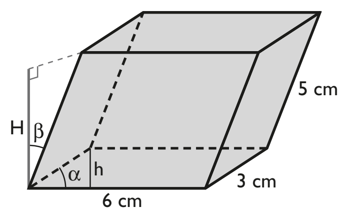
$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-1, -1, 3)$

Área $= \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \dfrac{\sqrt{11}}{2} = 1{,}66$ unidades cuadradas.

5. Producto mixto

Piensa y calcula

Calcula el volumen del paralelepípedo de la figura en función de los ángulos α y β



Solución:

$V = A_B \cdot H$

$A_B = 6 \cdot 3 \text{ sen } \alpha$

$H = 5 \cos \beta$

$V = 6 \cdot 3 \cdot 5 \text{ sen } \alpha \cos \beta = 90 \text{ sen } \alpha \cos \beta$

Aplica la teoría

26. Calcula el producto mixto de los vectores siguientes:

a) $\vec{u}(1, -1, 3), \vec{v}(-2, 2, 1), \vec{w}(3, -2, 5)$

b) $\vec{u}(-2, 5, -4), \vec{v}(-4, 1, -2), \vec{w}(1, 5, -1)$

Solución:

a) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -7$

b) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} -2 & 5 & -4 \\ -4 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 36$

27. Determina si los vectores siguientes son linealmente dependientes o coplanarios:

a) $\vec{u}(2, 3, -1), \vec{v}(1, -1, 3), \vec{w}(1, 9, -11)$

b) $\vec{u}(3, -2, 1), \vec{v}(2, 1, 2), \vec{w}(3, -1, -2)$

Solución:

a) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0 \Rightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ son linealmente dependientes.

b) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -25 \Rightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ son linealmente independientes.

28. Calcula el volumen de un paralelepípedo que tenga cuatro de sus vértices en los puntos siguientes:

a) $A(2, 3, 1), B(4, 1, -2), C(6, 3, 7)$ y $D(-5, -4, 8)$

b) $A(2, -1, 1), B(5, 5, 4), C(3, 2, -1)$ y $D(4, 1, 3)$

Solución:

a) $\overrightarrow{AB}(2, -2, -3),\ \overrightarrow{AC}(4, 0, 6),\ \overrightarrow{AD}(-7, -7, 7)$

Volumen $= |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]| = 308$ unidades cúbicas.

b) $\overrightarrow{AB}(3, 6, 3),\ \overrightarrow{AC}(1, 3, -2),\ \overrightarrow{AD}(2, 2, 2)$

Volumen $= |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]| = 18$ unidades cúbicas.

29. Calcula el volumen del tetraedro determinado por los puntos:

$$A(1, 0, 0), B(1, 1, 0), C(1, 1, 1) \text{ y } D(2, 1, 3)$$

Solución:

$\overrightarrow{AB}(0, 1, 0),\ \overrightarrow{AC}(0, 1, 1),\ \overrightarrow{AD}(1, 1, 3)$

Volumen $= \frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]| = \frac{1}{6} =$

$= 0{,}17$ unidades cúbicas.

30. Calcula el valor de **k** para que el volumen del paralelepípedo definido por los siguientes vectores:

$$\vec{u}(1, -1, 1), \vec{v}(1, 1, 1) \text{ y } \vec{w}(2, 3, k)$$

sea igual a 12 unidades cúbicas.

Solución:

Volumen 12 unidades cúbicas.

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & k \end{vmatrix} = 2k - 4$

$|2k - 4| = 12$

De la igualdad del valor absoluto se obtienen dos igualdades:

$2k - 4 = 12 \Rightarrow k = 8$

$2k - 4 = -12 \Rightarrow k = -4$

31. El volumen de un tetraedro es de 5 unidades cúbicas. Si tres de sus vértices se encuentran en los siguientes puntos:

$$A(2, 1, -1), B(3, 0, 1) \text{ y } C(2, -1, 3)$$

halla las coordenadas del vértice D sabiendo que está en el eje Y

Solución:

Volumen 5 unidades cúbicas.

El vértice D es de la forma $D(0, y, 0)$.

$\overrightarrow{AB}(1, -1, 2)$

$\overrightarrow{AC}(0, -2, 4)$

$\overrightarrow{AD}(-2, y - 1, 1)$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ -2 & y-1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 4y$

$\frac{1}{6}|2 - 4y| = 5 \Rightarrow |2 - 4y| = 30$

De la igualdad del valor absoluto se obtienen dos igualdades:

- $2 - 4y = 30 \Rightarrow y = -7$

  El vértice es: $D(0, -7, 0)$

- $2 - 4y = -30 \Rightarrow y = 8$

  El vértice es: $D(0, 8, 0)$

Preguntas tipo test

Contesta en tu cuaderno:

1 Dados los puntos A(1, 1, 0), B(1, 1, 2) y C(1, –1, 1)

- ☐ los tres puntos están alineados.
- ☒ los tres puntos no están alineados.
- ☐ En el espacio, tres puntos no pueden estar alineados.
- ☐ Ninguna de las anteriores es cierta.

2 Dados los puntos A(1, 1, 0), B(1, 1, 2) y C(1, –1, 1), el área del triángulo que determinan es:

- ☐ 4 unidades cuadradas.
- ☐ 8 unidades cuadradas.
- ☒ 2 unidades cuadradas.
- ☐ No forman triángulo.

3 Los vectores $\vec{a} = (3, 1, 2)$, $\vec{b} = (0, 1, 1)$ y $\vec{c} = (0, 1, -1)$

- ☐ son linealmente dependientes.
- ☒ son linealmente independientes.
- ☐ son paralelos.
- ☐ Ninguna de las anteriores es cierta.

4 Dados los puntos A(1, 1, 1), B(1 + λ, 2, 1 – λ) y C(1 + λ, 1 + λ, 2 + λ), donde $\lambda \in \mathbb{R}$, los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$:

- ☐ son paralelos para λ = 0
- ☐ son paralelos para λ = 1
- ☐ forman un ángulo de 30° para todo valor de λ
- ☒ forman un ángulo de 90° para todo valor de λ

5 Dados los puntos A(1, 1, 1), B(2, 2, 0) y C(2, 2, 3), la hipotenusa del triángulo rectángulo de vértices A, B y C es igual a:

- ☒ 3
- ☐ 1
- ☐ Los puntos A, B y C no forman triángulo rectángulo
- ☐ 6

6 Sabiendo que tres de los vértices de un paralelogramo son los puntos A(1, 1, 2), B(1, 1, 4) y C(3, 3, 6), el área del mismo es:

- ☐ 4 unidades cuadradas.
- ☐ $\sqrt{2}$ unidades cuadradas.
- ☐ $4 + \sqrt{2}$ unidades cuadradas.
- ☒ $4\sqrt{2}$ unidades cuadradas.

7 Sea A el punto medio del segmento de extremos P(3, 2, 1) y Q(–1, 0, 1). El volumen del tetraedro de vértices A, B(2, 1, 3), C(1, 2, 3) y D(3, 4, 1) es:

- ☐ $\frac{3}{5}$ unidades cúbicas.
- ☐ 10 unidades cúbicas.
- ☒ $\frac{5}{3}$ unidades cúbicas.
- ☐ $\frac{1}{3}$ unidades cúbicas.

8 Un vector $\vec{a}$ que tiene la misma dirección que el vector $\vec{b} = (-1, 1, 1)$ y que forma con el vector $\vec{c} = (1, 1, -1)$ un paralelogramo de 4 unidades cuadradas de área es:

- ☐ $\vec{a}_1 = (-2, 2, 2)$, $\vec{a}_2 = (2, -2, -2)$
- ☒ $\vec{a}_1 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})$, $\vec{a}_2 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2})$
- ☐ $\vec{a} = (1, -1, -1)$
- ☐ Ninguna de las anteriores.

9 El volumen del paralelepípedo definido por los vectores **i, j, k** es:

- ☐ 6 unidades cúbicas.
- ☐ 3 unidades cúbicas.
- ☒ 1 unidad cúbica.
- ☐ no existe paralelepípedo.

10 Dados los vectores $\vec{u} = (2, -1, a)$, $\vec{v} = (b, -2, 2)$, los valores de **a** y **b** que hacen que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales y $|\vec{u}| = |\vec{v}|$ son:

- ☐ a = 2, b = –1
- ☐ a = –1, b = 2
- ☐ a = 1, b = –2
- ☒ a = –2, b = 1

1. Operaciones con vectores

32. Calcula el módulo de los siguientes vectores:

a) $\vec{v}(3, -4, 12)$ b) $\vec{v}(-4, 5, 20)$
c) $\vec{v}(1, -5, 1)$ d) $\vec{v}(-3, -2, 5)$

Solución:

a) $|\vec{v}| = 13$

b) $|\vec{v}| = 21$

c) $|\vec{v}| = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

d) $|\vec{v}| = \sqrt{38}$

33. Se sabe que un vector del espacio es:

$$\vec{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

Determina los valores posibles de la coordenada **z** sabiendo que el $|\vec{v}| = 7$

Solución:

$|\vec{v}| = 7$

$\sqrt{2^2 + (-3)^2 + z^2} = 7$

$z^2 + 13 = 49 \Rightarrow z = \sqrt{36} = \pm 6$

34. Calcula un vector unitario en la dirección del vector $\vec{v}$ en los siguientes casos:

a) $\vec{v}(1, -2, 5)$ b) $\vec{v}(-3, 4, 0)$

Solución:

a) $|\vec{v}| = \sqrt{30}$

$\vec{u}\left(\frac{1}{\sqrt{30}}, -\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}\right)$

b) $|\vec{v}| = 5$

$\vec{u}\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)$

35. Dados los vectores $\vec{u}(-5, 1, 3)$ y $\vec{v}(2, -4, -1)$, calcula:

a) $3\vec{u}$ b) $-2\vec{v}$
c) $2\vec{u} + 3\vec{v}$ d) $3\vec{u} - \vec{v}$

Solución:

a) $3\vec{u} = 3(-5, 1, 3) = (-15, 3, 9)$

b) $-2\vec{v} = -2(2, -4, -1) = (-4, 8, 2)$

c) $2\vec{u} + 3\vec{v} = 2(-5, 1, 3) + 3(2, -4, -1) = (-4, -10, 3)$

d) $3\vec{u} - \vec{v} = 3(-5, 1, 3) - (2, -4, -1) = (-17, 7, 10)$

36. Dados los vectores $\vec{u}(2, -1, 1)$, $\vec{v}(2, 4, 3)$ y $\vec{w}(-2, 0, 1)$, calcula:

a) $3\vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w}$ b) $\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w}$

Solución:

a) $3\vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w} = 3(2, -1, 1) + 2(2, 4, 3) - (-2, 0, 1) =$
$= (12, 5, 8)$

b) $\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w} = (2, -1, 1) - 3(2, 4, 3) + (-2, 0, 1) =$
$= (-6, -13, -7)$

37. Dados los vectores $\vec{u}(2, 0, 1)$, $\vec{v}(-1, 3, 2)$, $\vec{w}(3, -1, 4)$ y $\vec{x}(4, 2, 17)$, calcula el valor de **a, b** y **c** para que:

$$\vec{x} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$$

Solución:

$(4, 2, 17) = a(2, 0, 1) + b(-1, 3, 2) + c(3, -1, 4)$

$$\left.\begin{aligned} 2a - b + 3c &= 4 \\ 3b - c &= 2 \\ a + 2b + 4c &= 17 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = -3,\ b = 2,\ c = 4$$

2. Problemas de vectores

38. Calcula el punto medio del segmento definido por los puntos siguientes:

A(4, –7, 5) y B(6, –1, 1)

Solución:

M(5, –4, 3)

39. Calcula el baricentro del triángulo cuyos vértices son los puntos siguientes:

A(3, 1, –5), B(–1, 2, 3) y C(1, 3, –7)

Solución:

G(1, 2, –3)

40. Calcula el centro de gravedad del tetraedo cuyos vértices son los puntos siguientes:

A(3, 2, –4), B(1, –1, 2), C(3, –2, 7) y D(1, –3, 7)

Solución:

G(2, –1, 3)

41. Los puntos A(1, 1, 1), B(2, 2, 2) y C(1, 3, 3) son tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Halla las coordenadas del cuarto vértice.

Solución:

El vector $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BC}(-1, 1, 1)$

$\overrightarrow{OD} = (1, 1, 1) + (-1, 1, 1) = (0, 2, 2)$

42. Comprueba que los vectores $\vec{u}(1, 1, 3)$, $\vec{v}(-1, 2, 0)$ y $\vec{w}(1, 3, 5)$ son linealmente dependientes.

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes.

3. Producto escalar

43. Dados los vectores $\vec{u}(-1, -1, 2)$ y $\vec{v}(2, -3, 1)$

a) calcula el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$

b) calcula la proyección $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$

Solución:

a) $$\cos\alpha = \frac{-1\cdot 2 + (-1)\cdot(-3) + 2\cdot 1}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 2^2}\cdot\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{84}} \Rightarrow \alpha = 70°\ 53'\ 36''$$

b) $$\text{proy}_{\vec{v}}\,\vec{u} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$\text{proy}_{\vec{v}}\,\vec{u} = \frac{-1\cdot 2 + (-1)\cdot(-3) + 2\cdot 1}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{14}} =$$

$$= \frac{3\sqrt{14}}{14} = 0{,}80 \text{ unidades.}$$

44. Sean los puntos $P(1, 0, 1)$, $Q(0, 1, -3)$ y $R(0, 3, 0)$. Halla la proyección ortogonal del vector $\overrightarrow{PQ}$ sobre el vector $\overrightarrow{PR}$

Solución:

$\overrightarrow{PQ}(-1, 1, -4)$

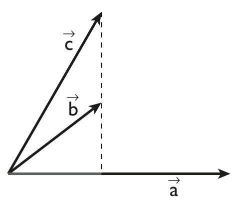
$\overrightarrow{PR}(-1, 3, -1)$

$$\text{proy}_{\overrightarrow{PR}}\,\overrightarrow{PQ} = \frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PR}|}$$

$$\text{proy}_{\overrightarrow{PR}}\,\overrightarrow{PQ} = \frac{-1\cdot(-1) + 1\cdot 3 + (-4)\cdot(-1)}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{11}} =$$

$$= \frac{8\sqrt{11}}{11} = 2{,}41 \text{ unidades.}$$

45. Sean los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ de la figura. Deduce si son iguales los productos escalares $\vec{a}\cdot\vec{b}$ y $\vec{a}\cdot\vec{c}$



Solución:

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\ \text{proy}_{\vec{a}}\,\vec{b}$

$\vec{a}\cdot\vec{c} = |\vec{a}|\ \text{proy}_{\vec{a}}\,\vec{c}$

Como se observa en el dibujo, $\text{proy}_{\vec{a}}\,\vec{b} = \text{proy}_{\vec{a}}\,\vec{c}$. Por tanto:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{c}$$

46. Prueba que si dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen el mismo módulo, entonces $|(\vec{a} + \vec{b})\cdot(\vec{a} - \vec{b})| = 0$

Solución:

$|\vec{a}| = |\vec{b}|$

Se tiene:

$$|(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})| = |\vec{a}\cdot\vec{a} - \cancel{\vec{a}\cdot\vec{b}} + \cancel{\vec{b}\cdot\vec{a}} - \vec{b}\cdot\vec{b}| =$$

$$= ||\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2| = 0$$

47. Sean los puntos $A(1, -5, k)$, $B(3, k, 1)$ y $C(k, -5, 2)$ los tres vértices del triángulo ABC. Determina el valor de **k** para que el triángulo sea rectángulo en A

Solución:

$\overrightarrow{AB}(2, k + 5, 1 - k)$

$\overrightarrow{AC}(k - 1, 0, 2 - k)$

Si el triángulo es rectángulo en A:

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$$

$$2(k - 1) + (1 - k)(2 - k) = 0 \Rightarrow k^2 - k = 0$$

$$k = 0,\ k = 1$$

4. Producto vectorial

48. Dados los vectores $\vec{u}(1, 2, 0)$ y $\vec{v}(0, 1, 2)$, calcula:

a) el producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$

b) un vector unitario ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$

c) el área del paralelogramo que tiene por lados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$

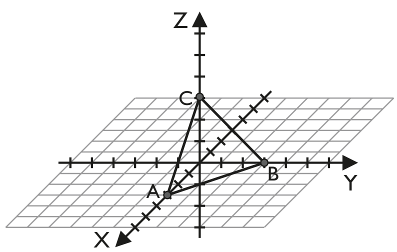
Solución:

a) $\vec{w} = \vec{u}\times\vec{v} = (4, -2, 1)$

b) $\vec{w} = \sqrt{21} \Rightarrow$ vector unitario: $\left(\dfrac{4}{\sqrt{21}}, -\dfrac{2}{\sqrt{21}}, \dfrac{1}{\sqrt{21}}\right)$

c) Área $= \vec{u}\times\vec{v} = \sqrt{21}$ unidades cuadradas.

49. Calcula el área del triángulo ABC del dibujo.



Solución:

A(3, 0, 0), B(0, 3, 0) y C(0, 0, 3)

$\vec{AB}(-3, 3, 0)$, $\vec{AC}(-3, 0, 3)$

$\vec{AB} \times \vec{AC} = (9, 9, 9)$

Área $= \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{9\sqrt{3}}{2} = 7,79$ unidades cuadradas.

50. Halla el área del triángulo ABC cuyos vértices son los puntos siguientes:

a) A(1, –1, 3); B(1, 2, 1) y C(1, 0, –1)

b) A(–1, 0, 0), B(1, 0, 1) y C(0, 2, 3)

Solución:

a) $\vec{AB}(0, 3, -2)$, $\vec{AC}(0, 1, -4)$

$\vec{AB} \times \vec{AC} = (-10, 0, 0)$

Área $= \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}| = 5$ unidades cuadradas.

b) $\vec{AB}(2, 0, 1)$, $\vec{AC}(1, 2, 3)$

$\vec{AB} \times \vec{AC} = (-2, -5, 4)$

Área $= \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{3\sqrt{5}}{2} =$

$= 3,35$ unidades cuadradas.

51. Resuelve la siguiente ecuación vectorial:

$$\vec{v} \times (2, 1, -1) = (1, 3, 5)$$

sabiendo que $|\vec{v}| = \sqrt{6}$

Solución:

Sea $\vec{x}(x, y, z)$

$\vec{x} \times (2, 1, -1) = (1, 3, 5)$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 3, 5)$$

Se obtiene el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} -y - z = 1 \\ x + 2z = 3 \\ x - 2y = 5 \end{array}\right\}$$

que es equivalente a $\left.\begin{array}{r} x + 2z = 3 \\ y + z = -1 \end{array}\right\}$

Como $|\vec{x}| = \sqrt{6} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 6$, se obtiene el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2z = 3 \\ y + z = -1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \end{array}\right\}$$

Soluciones: $x = 1,\ y = -2,\ z = 1$

$$x = \frac{5}{3},\ y = -\frac{5}{3},\ z = \frac{2}{3}$$

52. Sea $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 4$ y el ángulo formado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ 30°. Calcula el área del triángulo construido sobre los vectores $\vec{a} - 2\vec{b}$ y $3\vec{a} + 2\vec{b}$

Solución:

Área $= \frac{1}{2} \cdot |(\vec{a} - 2\vec{b}) \times (3\vec{a} + 2\vec{b})|$

$(\vec{a} - 2\vec{b}) \times (3\vec{a} + 2\vec{b}) =$

$= 3\vec{a} \times \vec{a} + 2\vec{a} \times \vec{b} - 6\vec{b} \times \vec{a} - 4\vec{b} \times \vec{b} = 8\vec{a} \times \vec{b}$

$|8\vec{a} \times \vec{b}| = 8 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ sen 30° $= 8 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 64$ u^2

Área $= \frac{1}{2} \cdot 64 = 32$ u^2

5. Producto mixto

53. Determina si los vectores siguientes son linealmente dependientes o coplanarios:

$$\vec{u}(2, -1, 2), \vec{v}(1, 2, -3) \text{ y } \vec{w}(3, -4, 7)$$

Solución:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ son linealmente dependientes o coplanarios.

54. Dados los vectores $\vec{u}(0, 1, 0)$, $\vec{v}(0, 3, 0)$ y $\vec{w}(1, 0, 1)$, justifica si se cumple la igualdad $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$. Interpreta el resultado.

Solución:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Los tres vectores son coplanarios o linealmente dependientes.

55. Calcula el volumen de un paralelepípedo que tenga cuatro de sus vértices en los puntos A(0, 0, 0), B(0, 1, 2), C(1, 5, 3) y D(1, 0, 1)

Solución:

$\vec{AB}(0, 1, 2)$, $\vec{AC}(1, 5, 3)$, $\vec{AD}(1, 0, 1)$

Volumen $= |[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]| = 8$ unidades cúbicas.

56. Se consideran los puntos A(1, 1, 1), B(0, –2, 2), C(–1, 0, 2) y D(2, –1, –2). Calcula el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos ABCD

Solución:

$\vec{AB}(-1, -3, 1)$, $\vec{AC}(-2, -1, 1)$, $\vec{AD}(1, -2, -3)$

Volumen $= \frac{1}{6}|[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]| = \frac{15}{6} = \frac{5}{2} = 2,5$ u^3

Para ampliar

57. Sean A, B y C tres puntos del espacio tridimensional que verifican la relación

$$\overrightarrow{CB} = -3\,\overrightarrow{CA}$$

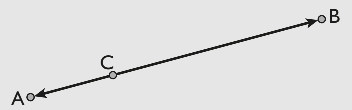
a) Calcula el valor que toma **k** en la expresión

$$\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$$

b) Si A(1, 2, –1) y B(9, 6, 11), halla las coordenadas del punto C que cumple la relación de partida.

Solución:

a)



Si $\overrightarrow{CB} = -3\,\overrightarrow{CA}$, los dos vectores están en la misma dirección y en sentido opuesto.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{CA} - 3\,\overrightarrow{CA} = -4\,\overrightarrow{CA} = 4\,\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \Rightarrow k = \frac{1}{4}$$

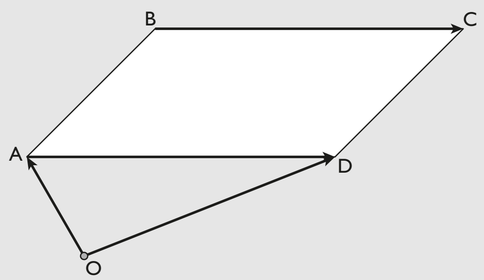
b) $\overrightarrow{AB}(8, 4, 12)$

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{OC} = (1, 2, -1) + \frac{1}{4}(8, 4, 12) = (3, 3, 2)$$

58. Dados los puntos A(3, 3, 5), B(3, 3, 2) y C(0, 6, –1), que son los vértices consecutivos de un paralelogramo, halla las coordenadas del vértice D

Solución:



El vector $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}$

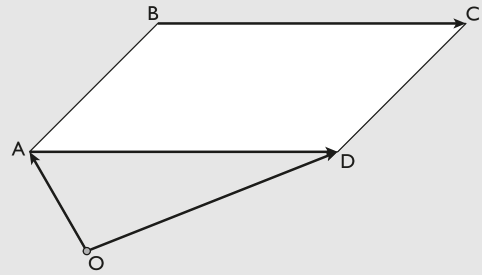
$\overrightarrow{BC}(-3, 3, -3)$

$\overrightarrow{OD} = (3, 3, 5) + (-3, 3, -3) = (0, 6, 2)$

D(0, 6, 2)

59. Dados los puntos A(3, –4, 7), B(–5, 3, –2) y C(1, 2 –3), que son tres vértices del paralelogramo ABCD, halla el cuarto vértice, D, que es opuesto al vértice B

Solución:



El vector $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BC}(6, -1, -1)$

$\overrightarrow{OD} = (3, -4, 7) + (6, -1, -1) = (9, -5, 6)$

D(9, –5, 6)

60. Sean los vectores $\vec{u}(-1, 2, 3)$, $\vec{v}(2, -5, -2)$, $\vec{w}(4, 1, 3)$ y $\vec{x}(4, 1, -48)$

a) ¿Se puede expresar $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$? Si es así, escribe dicha combinación lineal; y si no es así, explica por qué.

b) ¿Se puede expresar $\vec{x}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$? Si es así, escribe dicha combinación lineal; y si no es así, explica por qué.

c) ¿Son $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{x}$ linealmente independientes? Justifica la respuesta.

Solución:

a) $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{w}$

$a(-1, 2, 3) + b(2, -5, -2) = (4, 1, 3)$

$$\left.\begin{array}{l} -a + 2b = 4 \\ 2a - 5b = 1 \\ 3a - 2b = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{El sistema es incompatible.}$$

El vector $\vec{w}$ es linealmente independiente de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$

b) $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{x}$

$a(-1, 2, 3) + b(2, -5, -2) = (4, 1, -48)$

$$\left.\begin{array}{l} -a + 2b = 4 \\ 2a - 5b = 1 \\ 3a - 2b = 48 \end{array}\right\} \Rightarrow a = -22,\ b = -9$$

El vector $\vec{x}$ es una combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$

$\vec{x} = -22\vec{u} - 9\vec{v}$

c) Los tres vectores son linealmente dependientes, como se ha demostrado en el apartado anterior.

61. Escribe el vector $\vec{b}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, siendo:

$$\vec{u}(1, -1, 2), \vec{v}(0, 2, 6), \vec{w}(-1, -1, 3) \text{ y } \vec{b}(-1, -7, 7)$$

Solución:

$x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{b}$

$x(1, -1, 2) + y(0, 2, 6) + z(-1, -1, 3) = (-1, -7, 7)$

$$\left.\begin{array}{r} x \quad\quad - z = -1 \\ -x + 2y - z = -7 \\ 2x + 6y + 3z = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 2,\ y = -1,\ z = 3$$

62. Expresa el vector $\vec{a}(2, -5, -5)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u}(3, 2, 5), \vec{v}(2, 4, 7)$ y $\vec{w}(1, -3, -3)$

Solución:

$x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{a}$

$x(3, 2, 5) + y(2, 4, 7) + z(1, -3, -3) = (2, -5, -5)$

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 2y + z = 2 \\ 2x + 4y - 3z = -5 \\ 5x + 7y - 3z = -5 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 1,\ y = -1,\ z = 1$$

63. Dados los vectores $\vec{u}(2, 3, 4), \vec{v}(2, 1, 2)$ y $\vec{w}(1, 2, 1)$, estudia si el vector $\vec{x}(3, 3, 0)$ depende linealmente de los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$

Solución:

$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{x}$

$a(2, 3, 4) + b(2, 1, 2) + c(1, 2, 1) = (3, 3, 0)$

$$\left.\begin{array}{r} 2a + 2b + c = 3 \\ 3a + b + 2c = 3 \\ 4a + 2b + c = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a = -\frac{3}{2},\ b = \frac{3}{2},\ c = 3$$

El vector $\vec{x}$ sí se puede poner como combinación lineal de $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$

64. Determina los valores del parámetro **k** para los que los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$:

$$(1, 1, k), (k, 3, 2) \text{ y } (0, 0, k)$$

son linealmente independientes. Justifica la respuesta.

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ k & 3 & 2 \\ 0 & 0 & k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k^2 - 3k = 0 \Rightarrow k = 0,\ k = 3$$

Para los valores $k = 0$ y $k = 3$, el determinante es cero. Por tanto, los vectores son linealmente dependientes.

Para los valores $k \neq 0$ y $k \neq 3$, los vectores son linealmente independientes.

65. Encuentra un vector $\vec{w}$ cuya primera componente sea 2, y que sea perpendicular a los vectores $\vec{u}(1, -1, 3)$ y $\vec{v}(0, 1, -2)$

Solución:

Sea $\vec{w}(2, y, z)$

$$\vec{w} \perp \vec{u} \Rightarrow \vec{w} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow 2 - y + 3z = 0$$

$$\vec{w} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{w} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow y - 2z = 0$$

Resolviendo el sistema, se tiene:

$$y = -4,\ z = -2$$

El vector es:

$$\vec{w}(2, -4, -2)$$

66. Calcula un vector unitario que sea ortogonal a los vectores $\vec{u}(1, 0, 2)$ y $\vec{v}(2, 1, 0)$

Solución:

$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$

$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (-2, 4, 1)$

$|\vec{w}| = \sqrt{21}$

Un vector unitario es: $\left(-\frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{1}{\sqrt{21}}\right)$

67. Calcula el área del triángulo ABC en los siguientes casos:

a) A(1, 3, –4), B(2, 0, –1) y C(1, 3, 0)

b) A(1, –1, 3), B(0, –2, 1) y C(1, 1, 1)

Solución:

a) $\overrightarrow{AB}(1, -3, 3),\ \overrightarrow{AC}(0, 0, 4)$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-12, -4, 0)$

$\text{Área} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{4\sqrt{10}}{2} = 2\sqrt{10} = 6{,}32\ u^2$

b) $\overrightarrow{AB}(-1, -1, -2),\ \overrightarrow{AC}(0, 2, -2)$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (6, -2, -2)$

$\text{Área} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{2\sqrt{11}}{2} = \sqrt{11} = 3{,}32\ u^2$

68. Calcula el volumen del tetraedro cuyos vértices son:

a) O(0, 0, 0), A(–1, 0, 3), B(2, 1, –1) y C(–3, 2, 0)

b) A(3, 2, 1), B(1 2, 4), C(4, 0, 3) y D(1, 1, 7)

Solución:

a) $\overrightarrow{OA}(-1, 0, 3),\ \overrightarrow{OB}(2, 1, -1),\ \overrightarrow{OC}(-3, 2, 0)$

$\text{Volumen} = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}]| = \frac{19}{6} = 3{,}17\ u^3$

b) $\overrightarrow{AB}(-2, 0, 3),\ \overrightarrow{AC}(1, -2, 2),\ \overrightarrow{AD}(-2, -1, 6)$

$\text{Volumen} = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]| = \frac{5}{6} = 0{,}83\ u^3$

Problemas

69. Determina un vector $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$ sabiendo que cumple las tres condiciones siguientes:

a) La suma de sus coordenadas es 3

b) $\vec{v}$ es combinación lineal de los vectores (2, 2, 2) y (–1, 1, 0)

c) Los vectores (1, 0, 1), (0, 1, 0) y $\vec{v}$ son linealmente dependientes.

Solución:

$\vec{v}(x, y, z)$

a) $x + y + z = 3$

b) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + 2y - 4z = 0$

c) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - z = 0$

Resolviendo el sistema de las tres ecuaciones:

$$x = 1,\ y = 1,\ z = 1$$

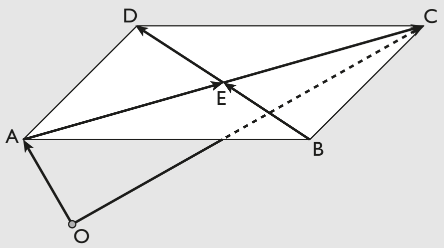
70. Dos vértices consecutivos de un paralelogramo son A(1, 1, 1) y B(0, 2, 0). Si el centro del paralelogramo es E(0, 0, 1), se pide:

a) las coordenadas de los otros vértices.

b) el área del paralelogramo.

Solución:

a)



Los puntos C y D deben ser simétricos de A y B con respecto al centro E, respectivamente. Se debe cumplir:

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AE}(-1, -1, 0)$

$\overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{AE} = (-2, -2, 0)$

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = (1, 1, 1) + (-2, -2, 0) = (-1, -1, 1)$

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{BD} = 2\,\overrightarrow{BE} = (0, -4, 2)$

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD} = (0, 2, 0) + (0, -4, 2) = (0, -2, 2)$

b) $\overrightarrow{AB}(-1, 1, -1),\ \overrightarrow{AD}(-1, -3, 1)$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = (-2, 2, 4)$

Área $= |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = 2\sqrt{6} = 4{,}90\ u^2$

71. Sabiendo que $|\vec{u}| = 3$ y $|\vec{v}| = 5$, halla los posibles valores del parámetro real **a** para que los vectores $\vec{u} + a\vec{v}$ y $\vec{u} - a\vec{v}$ sean ortogonales.

Solución:

$(\vec{u} + a\vec{v}) \cdot (\vec{u} - a\vec{v}) = 0$

$\vec{u} \cdot \vec{u} - a\vec{u} \cdot \vec{v} + a\vec{v} \cdot \vec{u} - a^2\vec{v} \cdot \vec{v} = 0$

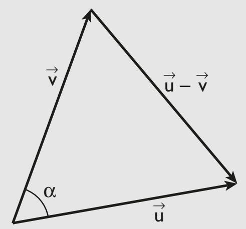
$|\vec{u}|^2 - a^2|\vec{v}|^2 = 0$

$9 - 25a^2 = 0$

$a = \pm 3/5$

72. ¿Qué ángulo deben formar dos vectores no nulos $\vec{u}$ y $\vec{v}$ para que ambos tengan el mismo módulo que su diferencia, $\vec{u} - \vec{v}$?

Solución:



Si $|\vec{u}| = |\vec{v}| = |\vec{u} - \vec{v}|$, el triángulo formado por dichos vectores es equilátero. Luego el ángulo $\alpha = 60°$

73. Calcula los valores de **x** e **y** para que el vector (x, y, 1) sea ortogonal a los vectores (3, 2, 0) y (2, 0, –1)

Solución:

$(x, y, 1) \cdot (3, 2, 0) = 0 \Rightarrow 3x + 2y = 0$

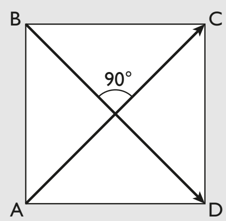
$(x, y, 1) \cdot (2, 0, -1) = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0$

Resolviendo el sistema de las dos ecuaciones:

$$x = \frac{1}{2},\ y = -\frac{3}{4}$$

74. Demuestra que el cuadrilátero con los vértices en los puntos A(–3, 5, 6), B(1, –5, 7), C(8, –3, –1) y D(4, 7, –2) es un cuadrado.

Solución:



$\overrightarrow{AC}(11, -8, -7)$

$\overrightarrow{BD}(3, 12, -9)$

Se tiene que cumplir que $|\vec{AC}| = |\vec{BD}|$ y que el ángulo que forman sea 90°

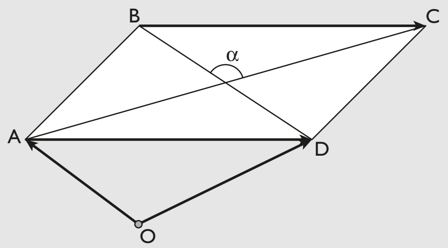
$|\vec{AC}| = 3\sqrt{26}$

$|\vec{BD}| = 3\sqrt{26}$

$\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 33 - 96 + 63 = 0 \Rightarrow \vec{AC} \perp \vec{BD}$

75. Halla el ángulo α que forman las diagonales AC y BD de un paralelogramo si tres vértices están en los puntos A(2, 1, 3), B(5, 2, –1) y C(–3, 3, –3)

Solución:



Se calcula el vértice D:

El vector $\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{BC}$

$\vec{BC}(-8, 1, -2)$

$\vec{OD} = (2, 1, 3) + (-8, 1, -2) = (-6, 2, 1)$

D(–6, 2, 1)

$\vec{AC}(-5, 2, -6)$

$\vec{BD}(-11, 0, 2)$

$$\cos\alpha = \frac{-5\cdot(-11) + 2\cdot 0 - 6\cdot 2}{\sqrt{(-5)^2+2^2+(-6)^2}\cdot\sqrt{(-11)^2+0^2+2^2}} =$$

$$= \frac{43}{\sqrt{65}\cdot\sqrt{125}} = \frac{43}{\sqrt{8\,125}}$$

$\alpha = 61°\ 30'\ 27''$

76. Halla las coordenadas del vector $\vec{a}(x, y, z)$, que es perpendicular a los vectores $\vec{u}(2, 3, -1)$ y $\vec{v}(1, -2, 3)$ y que $\vec{a}\cdot\vec{w} = -6$, siendo $\vec{w}(2, -1, 1)$

Solución:

$\vec{a}(x, y, z)$

$\vec{a}\cdot\vec{u} = 0 \Rightarrow 2x + 3y - z = 0$

$\vec{a}\cdot\vec{v} = 0 \Rightarrow x - 2y + 3z = 0$

$\vec{a}\cdot\vec{w} = -6 \Rightarrow 2x - y + z = -6$

Resolviendo el sistema:

$$x = -3,\ y = 3,\ z = 3$$

77. Un cuadrilátero tiene los vértices en los puntos A(1, –2, 2), B(1, 4, 0), C(–4, 1, 1) y D(–5, –5, 3). Demuestra que sus diagonales AC y BD son perpendiculares entre sí.

Solución:

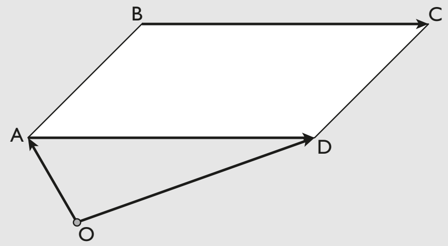
$\vec{AC}(-5, 3, -1)$

$\vec{BD}(-6, -9, 3)$

$\vec{AC}\cdot\vec{BD} = 30 - 27 - 3 = 0 \Rightarrow \vec{AC} \perp \vec{BD}$

78. Los puntos A(1, 1, 1), B(2, 2, 2) y C(1, 3, 3) son tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Halla las coordenadas del cuarto vértice y calcula el área del paralelogramo.

Solución:



Se calcula el vértice D:

El vector $\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{BC}$

$\vec{BC}(-1, 1, 1)$

$\vec{OD} = (1, 1, 1) + (-1, 1, 1) = (0, 2, 2)$

D(0, 2, 2)

$\vec{AB}(1, 1, 1)$

$\vec{AD}(-1, 1, 1)$

Área $= |\vec{AB} \times \vec{AD}| = 2\sqrt{2}\ u^2$

Para profundizar

79. Dados los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ tales que $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 1$ y $|\vec{c}| = 4$ y $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, calcula la siguiente suma de productos escalares: $\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{a}\cdot\vec{c}$

Solución:

Si se multiplica $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\,(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$, se tiene:

a) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\,(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 0$, ya que $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$

b) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\,(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) =$

$= \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a} + \vec{c}\cdot\vec{b} + \vec{c}\cdot\vec{c} =$

$= \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b} + \vec{c}\cdot\vec{c} + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 2\vec{a}\cdot\vec{c} + 2\vec{b}\cdot\vec{c} =$

$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2(\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}) =$

$= 9 + 1 + 16 + 2(\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c})$

Se tiene:

$$9 + 1 + 16 + 2(\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}) = 0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c} = -13$$

80. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores ortogonales y de módulo 1. Halla los posibles valores del parámetro real **a** para que los vectores $\vec{u} + a\vec{v}$ y $\vec{u} - a\vec{v}$ formen un ángulo de 60°

Solución:

$$\cos 60° = \frac{(\vec{u} + a\vec{v})(\vec{u} - a\vec{v})}{|\vec{u} + a\vec{v}| \cdot |\vec{u} - a\vec{v}|}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{u}\cdot(-a\vec{v}) + (a\vec{v})\cdot\vec{u} - a^2(\vec{v}\cdot\vec{v})}{\sqrt{(\vec{u} + a\vec{v})\cdot(\vec{u} + a\vec{v})}\,\sqrt{(\vec{u} - a\vec{v})\cdot(\vec{u} - a\vec{v})}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{|\vec{u}|^2 - a(\vec{u}\cdot\vec{v}) + a(\vec{v}\cdot\vec{u}) - a^2|\vec{v}|^2}{\sqrt{|\vec{u}|^2 + a(\vec{u}\cdot\vec{v}) + a(\vec{v}\cdot\vec{u}) + a^2|\vec{v}|^2}} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\sqrt{|\vec{u}|^2 - a(\vec{u}\cdot\vec{v}) - a(\vec{v}\cdot\vec{u}) + a^2|\vec{v}|^2}}$$

Teniendo en cuenta que:

$\vec{u}\cdot\vec{u} = |\vec{u}|^2 = 1$

$\vec{v}\cdot\vec{v} = |\vec{v}|^2 = 1$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u} = 0$

se tiene:

$$\frac{1}{2} = \frac{1 - a^2}{\sqrt{1 + a^2}\cdot\sqrt{1 + a^2}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1 - a^2}{1 + a^2}$$

$$1 + a^2 = 2 - 2a^2$$

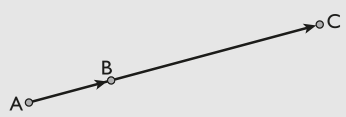
$$a^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow a = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

81. Sean los puntos A(1, k, 0); B(1, 1, k – 2) y C(1, – 1, k)

a) Comprueba que los tres puntos no están alineados, cualquiera que sea el valor que tome **k**

b) Halla el área del triángulo determinada por los tres puntos.

Solución:



a) Si los tres puntos estuvieran alineados, los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{BC}$ estarían en la misma dirección, es decir, sus coordenadas serían proporcionales:

$\vec{AB}(0, 1 - k, k - 2)$

$\vec{AB}(0, -2, 2)$

$$\frac{1 - k}{-2} = \frac{k - 2}{2}$$

$2 - 2k = -2k + 4 \Rightarrow 2 = 4$

Es una contradicción.

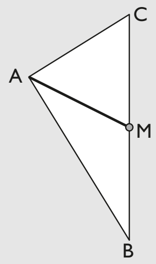
Luego los puntos no están alineados.

b) $\vec{AB} \times \vec{BC} = (-2, 0, 0)$

Área $= \dfrac{1}{2}\,|\vec{AB} \times \vec{BC}| = 1$ unidad cuadrada.

82. En el triángulo formado por los vértices A(3, – 1, 5), B(4, 2, –5) y C(–4, 0, 3), calcula la longitud de la mediana trazada desde el vértice A

Solución:



La longitud de la mediana es el módulo del vector $\vec{AM}$, siendo M el punto medio del lado BC

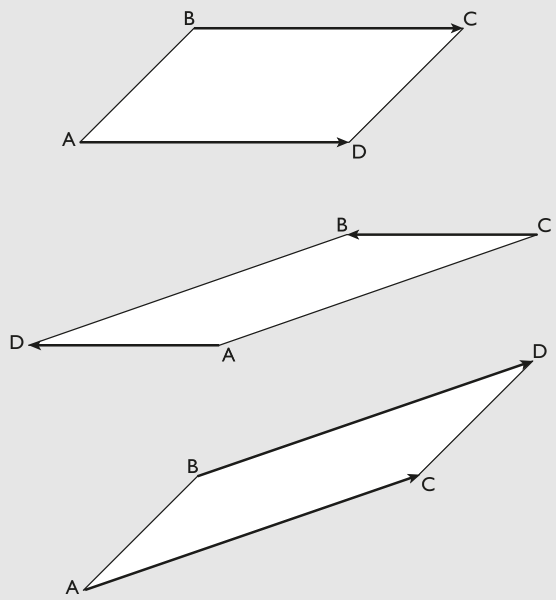
M(0, 1, – 1)

$\vec{AM}(-3, 2, -6)$

$|\vec{AM}| = 7$ unidades.

83. Dados los puntos A(1, – 1, 3), B(1, 2, 1) y C(1, 0, – 1), halla las coordenadas de todos los puntos posibles D para que ABCD formen un paralelogramo.

Solución:



$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{BC} = (1, -1, 3) + (0, -2, -2) = (1, -3, 1)$

$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{CB} = (1, -1, 3) + (0, 2, 2) = (1, 1, 5)$

$\vec{OD} = \vec{OB} + \vec{AC} = (1, 2, 1) + (0, 1, -4) = (1, 3, -3)$

84. Se considera el tetraedro cuyos vértices son los puntos A(1, 0, 0), B(1, 1, 1), C(–2, 1, 0) y D(0, 1, 3).

a) Calcula el área del triángulo ABC

b) Calcula el volumen del tetraedro ABCD

Solución:

a) $\overrightarrow{AB}(0, 1, 1)$

$\overrightarrow{AC}(-3, 1, 0)$

$\text{Área} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{19}\ u^2$

b) $\overrightarrow{AD}(-1, 1, 3)$

$\text{Volumen} = \frac{1}{6} \cdot \left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]\right| = \frac{7}{6} = 1{,}17\ u^3$

85. Calcula el volumen de una pirámide que tiene por base el triángulo ABC y por vértice el punto D(3, –1, 1), siendo A(5, 0, 0), B(0, 1, 0) y C(0, 0, –5)

Solución:

$\overrightarrow{AB}(-5, 1, 0)$

$\overrightarrow{AC}(-5, 0, -5)$

$\overrightarrow{AD}(-2, -1, 1)$

$\text{Volumen} = \frac{1}{6} \cdot \left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]\right| = 20/3 = 6{,}67\ u^3$

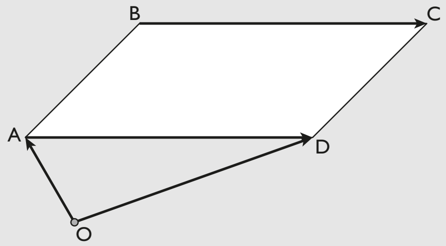
86. Los puntos A(1, 0, –1), B(3, 2, 1) y C(–7, 1, 5) son los vértices consecutivos de un paralelogramo ABCD

a) Halla las coordenadas del vértice D

b) Halla el área del paralelogramo.

Solución:

A(1, 0, –1), B(3, 2, 1) y C(–7, 1, 5)



a) Se calcula el vértice D:

El vector $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BC}(-10, -1, 4)$

$\overrightarrow{OD} = (1, 0, -1) + (-10, -1, 4) = (-9, -1, 3)$

D(–9, –1, 3)

b) $\overrightarrow{AB}(2, 2, 2)$

$\overrightarrow{AD}(-10, -1, 4)$

$\text{Área} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = 2\sqrt{302} = 34{,}76\ u^2$

87. Se consideran los puntos A(0, 0, 0), B(1, 2, 1), C(2, 3, 1) y D(5, 8, 3). Calcula el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos ABCD. Interpreta el resultado. (No hay errores en los datos).

Solución:

$\overrightarrow{AB}(1, 2, 1)$

$\overrightarrow{AC}(2, 3, 1)$

$\overrightarrow{AD}(5, 8, 3)$

$\text{Área} = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]\right| = 0$

Los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ son linealmente dependientes, es decir, los cuatro puntos, A, B, C y D, están en el mismo plano.

88. Se consideran los puntos A(1, –3, 1); B(2, 3, 1); C(1, 3, –1) y D(0, 0, 0). Calcula el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos ABCD

Solución:

$\overrightarrow{AB}(1, 6, 0)$

$\overrightarrow{AC}(0, 6, -2)$

$\overrightarrow{AD}(-1, 3, -1)$

$\text{Área} = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]\right| = 2$ unidades cúbicas.

Paso a paso

89. Halla el módulo del vector $\vec{v}(3, -2, 5)$ y representa el vector.

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

90. Halla el baricentro del triángulo cuyos vértices son los puntos A(3, 2, 5), B(–5, 1, 3) y C(–1, 6, 4). Representa el triángulo y el baricentro.

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

91. Calcula el valor de **k** para que el vector (7, 4, k) sea perpendicular al vector (–2, –1, 6). Represéntalos.

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

92. Calcula el producto vectorial de los vectores $\vec{u}(3, -1, 2)$ y $\vec{v}(4, 2, 5)$. Representa los vectores y el producto vectorial.

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

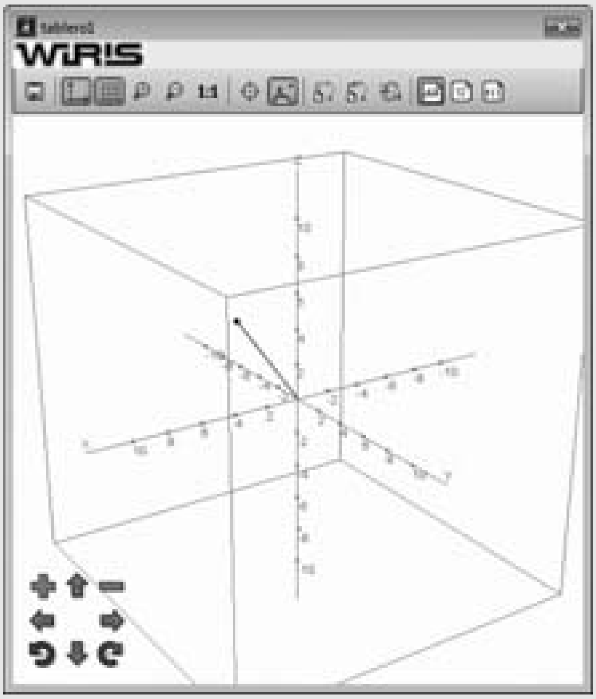
93. **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es** y elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

Practica

94. Dibuja el vector de posición del punto P(2, –3, 4)

Solución:

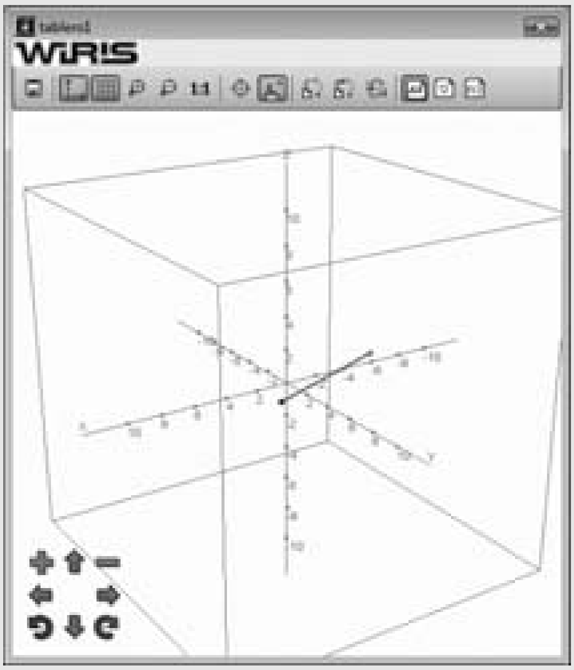
```
Ejercicio 94
O := punto(0, 0, 0) → punto(0,0,0)
P := punto(2, -3, 4) → punto(2,-3,4)
dibujar3d(P, {color = azul}) → tablero1
dibujar3d(segmento(O, P), {color = rojo, anchura_linea = 2})
```



95. Dados los puntos A(3, 4, 1) y B(–2, 5, 3), representa el vector $\overrightarrow{AB}$

Solución:

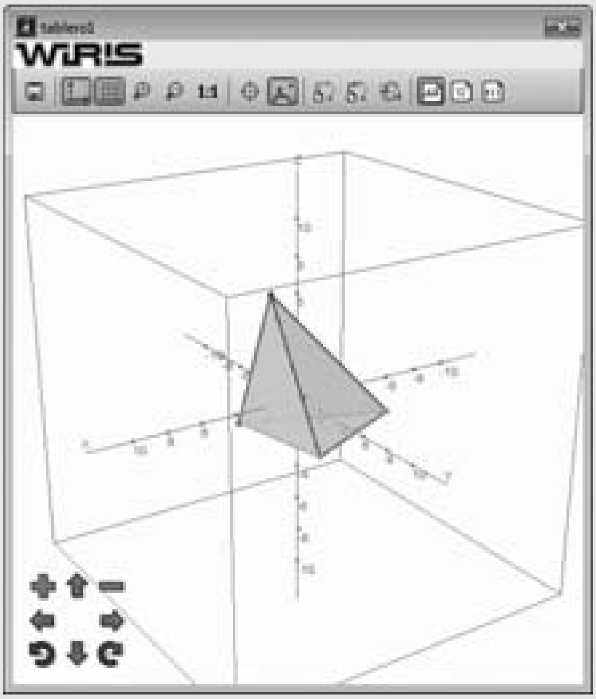
```
Ejercicio 95
A := punto(3, 4, 1) → (3,4,1)
B := punto(-2, 5, 3) → (-2,5,3)
dibujar3d(A, {color = azul}) → tablero1
dibujar3d(B, {color = verde}) → tablero1
dibujar3d(segmento(A, B), {color = rojo, anchura_linea = 2})
```



96. Calcula el centro de gravedad del tetraedro cuyos vértices son los puntos A(2, –3, –2), B(2, 5, –1), C(–3, 4, 0) y D(3, 2, 7). Dibuja el tetraedro y el centro de gravedad.

Solución:

```
Ejercicio 96
A := punto(2, -3, -2) → punto(2,-3,-2)
B := punto(2, 5, -1) → punto(2,5,-1)
C := punto(-3, 4, 0) → punto(-3,4,0)
D := punto(3, 2, 7) → punto(3,2,7)
G := (A + B + C + D)/4 → (A+B+C+D)/4
dibujar3d(A, {color = verde}) → tablero1
dibujar3d(B, {color = cian}) → tablero1
dibujar3d(C, {color = rosa}) → tablero1
dibujar3d(D, {color = magenta}) → tablero1
dibujar3d(G, {color = rojo}) → tablero1
dibujar3d(segmento(A, B), {color = azul, anchura_linea = 2})
dibujar3d(segmento(A, C), {color = azul, anchura_linea = 2})
dibujar3d(segmento(A, D), {color = azul, anchura_linea = 2})
dibujar3d(segmento(B, C), {color = azul, anchura_linea = 2})
dibujar3d(segmento(B, D), {color = azul, anchura_linea = 2})
dibujar3d(segmento(C, D), {color = azul, anchura_linea = 2})
dibujar3d(poligono(A, B, C), {color = amarillo, llenar = cierto})
dibujar3d(poligono(A, B, D), {color = cian, llenar = cierto})
dibujar3d(poligono(A, C, D), {color = naranja, llenar = cierto})
dibujar3d(poligono(B, C, D), {color = rosa, llenar = cierto})
```



97. Halla el producto escalar de los vectores $\vec{u}(5, -3, 2)$ y $\vec{v}(2, 1, 4)$

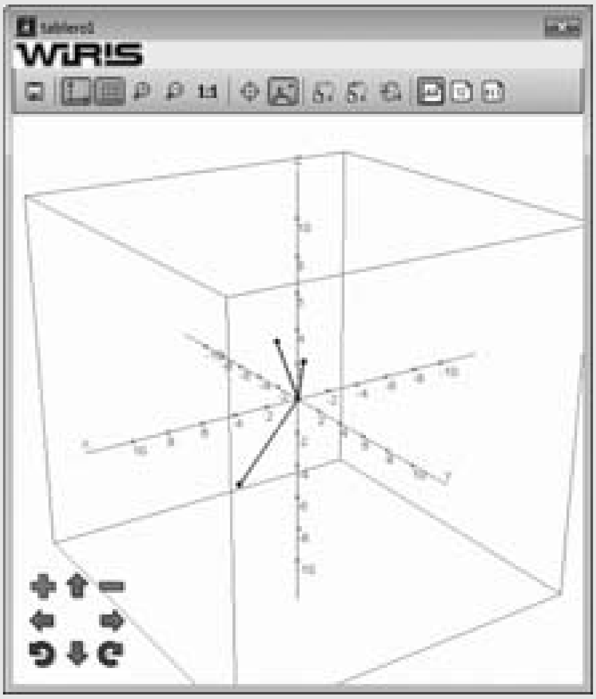
Solución:

```
Ejercicio 97
[5, -3, 2] · [2, 1, 4] → 15
```

98. Halla un vector perpendicular a los vectores $\vec{u}(1, 2, 3)$ y $\vec{v}(2, 1, 4)$. Representa los tres vectores.

Solución:

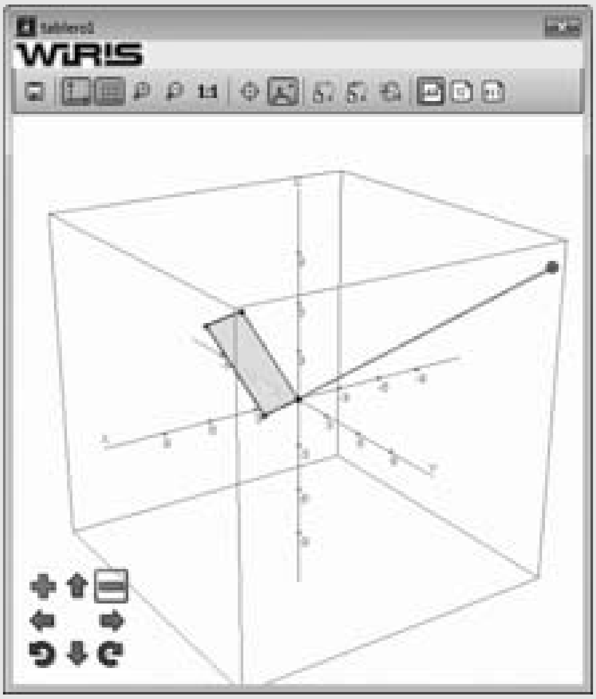
```
Ejercicio 98
[1, 2, 3] × [2, 1, 4] → [5,2,-3]
O := punto(0, 0, 0) → punto(0,0,0)
A := punto(1, 2, 3) → punto(1,2,3)
B := punto(2, 1, 4) → punto(2,1,4)
C := punto(5, 2, -3) → punto(5,2,-3)
dibujar3d(O, {color = azul}) → tablero1
dibujar3d(A, {color = azul}) → tablero1
dibujar3d(B, {color = azul}) → tablero1
dibujar3d(C, {color = azul}) → tablero1
dibujar3d(segmento(O, A), {color = azul, anchura_linea = 2})
dibujar3d(segmento(O, B), {color = azul, anchura_linea = 2})
dibujar3d(segmento(O, C), {color = rojo, anchura_linea = 2})
```



99. Halla y dibuja el área del paralelogramo definido por los vectores $\overrightarrow{AB}(2, -3, 5)$ y $\overrightarrow{AC}(3, 1, 0)$.

Solución:

```
Ejercicio 99
[2, -3, 5] × [3, 1, 0] → [-5,15,11]
|[-5,15,11]| → √371
√371. → 19.261
Área = 19,26 u²
A := punto(0, 0, 0) → punto(0,0,0)
B := punto(2, -3, 5) → punto(2,-3,5)
C := punto(3, 1, 0) → punto(3,1,0)
D := B + C → B+C
E := punto(-5, 15, 11) → punto(-5,15,11)
dibujar3d(A, {color = negro}) → tablero1
dibujar3d(B, {color = azul}) → tablero1
dibujar3d(C, {color = rojo}) → tablero1
dibujar3d(D, {color = magenta}) → tablero1
dibujar3d(E, {color = rojo, tamaño_punto = 10}) → tablero1
dibujar3d(segmento(A, B), {color = azul, anchura_linea = 2})
dibujar3d(segmento(A, C), {color = azul, anchura_linea = 2})
dibujar3d(segmento(B, D), {color = azul, anchura_linea = 2})
dibujar3d(segmento(C, D), {color = azul, anchura_linea = 2})
dibujar3d(poligono(A, B, D, C), {color = amarillo, llenar = cierto})
dibujar3d(segmento(A, E), {color = rojo, anchura_linea = 2})
```



100. Calcula el producto mixto de los vectores $\vec{u}(1, 2, -3)$, $\vec{v}(4, 1, 1)$ y w(5, –2, 6)

Solución:

Ejercicio 100

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 6 \end{vmatrix} \rightarrow 9$$

101. Halla el volumen del tetraedro definido por los puntos A(1, 0 –2), B(3, 1, 5), C(–4, 3, 0), D(–6, –2, 3). Dibuja el tetraedro.

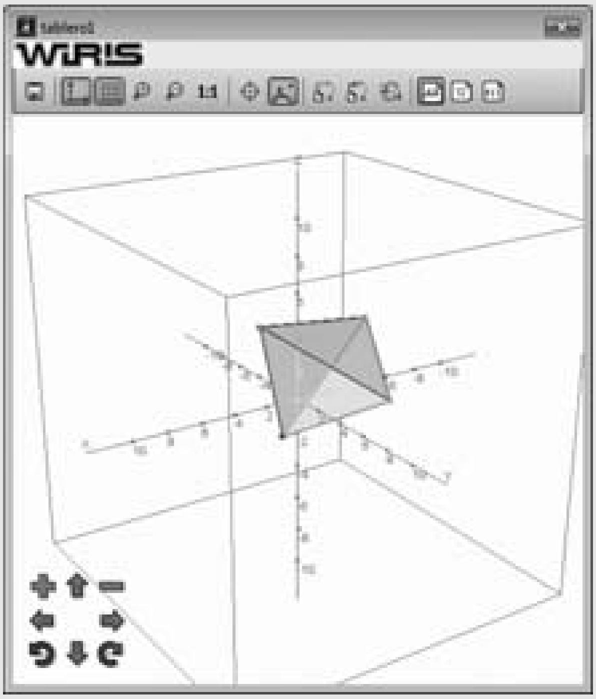
Solución:

```
Ejercicio 101
A := punto(1, 0, -2) → punto(1,0,-2)
B := punto(3, 1, 5) → punto(3,1,5)
C := punto(-4, 3, 0) → punto(-4,3,0)
D := punto(-6, -2, 3) → punto(-6,-2,3)
AB = vector(A, B) → [2,1,7]
AC = vector(A, C) → [-5,3,2]
AD = vector(A, D) → [-7,-2,5]
```

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ -5 & 3 & 2 \\ -7 & -2 & 5 \end{vmatrix} \rightarrow 266$$

$$\frac{266.}{6} \rightarrow 44.333$$

```
Volumen = 44,33 u³
dibujar3d(A, {color = rojo}) → tablero1
dibujar3d(B, {color = verde}) → tablero1
dibujar3d(C, {color = cian}) → tablero1
dibujar3d(D, {color = rosa}) → tablero1
dibujar3d(segmento(A, B), {color = azul, anchura_linea = 2})
dibujar3d(segmento(A, C), {color = azul, anchura_linea = 2})
dibujar3d(segmento(A, D), {color = azul, anchura_linea = 2})
dibujar3d(segmento(B, C), {color = azul, anchura_linea = 2})
dibujar3d(segmento(B, D), {color = azul, anchura_linea = 2})
dibujar3d(segmento(C, D), {color = azul, anchura_linea = 2})
dibujar3d(poligono(A, B, C), {color = amarillo, llenar = cierto})
dibujar3d(poligono(A, B, D), {color = cian, llenar = cierto})
dibujar3d(poligono(A, C, D), {color = naranja, llenar = cierto})
dibujar3d(poligono(B, C, D), {color = rosa, llenar = cierto})
```



102. Considera los vectores $\vec{u}(1, 1, 1)$, $\vec{v}(2, 2, a)$ y $\vec{w}(2, 0, 0)$. Determina los valores de **a** para que los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{w}$ sean ortogonales.

Solución:

Ejercicio 102

u = [1, 1, 1] → [1,1,1]

v = [2, 2, a] → [2,2,a]

w = [2, 0, 0] → [2,0,0]

(u + v) · (u − w) → a+1

resolver(a + 1 = 0) → {{a=−1}}

103. Dados los vectores $\vec{u}(2, 1, -1)$, $\vec{v}(-3, 5, 1)$ $\vec{w}(4, k, 2)$, calcula el valor de **k** para que el volumen del paralelepípedo definido por dichos vectores sea igual a 26 unidades cúbicas.

Solución:

Ejercicio 103

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \\ 4 & k & 2 \end{vmatrix} \rightarrow k+50$$

resolver(|k + 50| = 26) → {{k=−76},{k=−24}}