9 Continuidad

ACTIVIDADES INICIALES

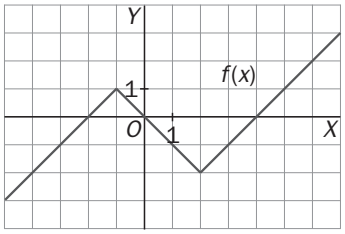
9.I. Dibuja la gráfica de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{si } x<-1 \\ -x & \text{si } -1\le x\le 2 \\ x-4 & \text{si } x>2 \end{cases}$

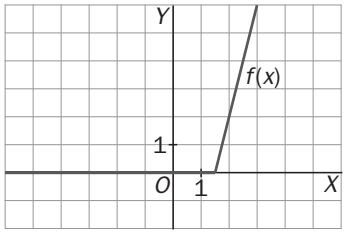
b) $f(x)=2x-3+|2x-3|$

a) Si $x\in(-\infty,1)$. El arco de parábola pasa por el punto (−1, 0) y se acerca al (1, 0). El vértice está en el punto (0, −1).

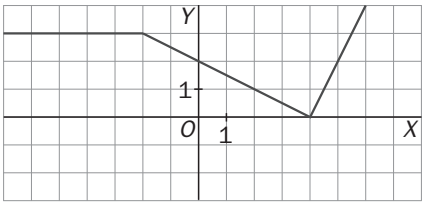
Si $x\in(1,+\infty)$, el segmento de recta pasa por los puntos (1, 1) y (2, 3).



b)



9.II. Escribe la expresión algebraica de la función.



$$f(x)=\begin{cases} 3 & \text{si } x<2 \\ -\frac{1}{2}x+2 & \text{si } 2\le x\le 4 \\ \frac{3}{2}x-6 & \text{si } x>4 \end{cases}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

9.1. Indica si las siguientes funciones son o no continuas en el punto $x = 2$.

a) $f(x)=\begin{cases} 3x^2-1 & \text{si } x>2 \\ \frac{2}{x}+10 & \text{si } x\le 2 \end{cases}$ **b)** $f(x)=\sqrt{-2x^2+6}$

a) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{2}{x}+10\right)=11$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left(3x^2-1\right)=11$; $f(2) = 11$

Por tanto, la función es continua en $x = 2$.

b) No existe $f(2)$, ya que $\sqrt{-8+6}=\sqrt{-2}$ no es un número real. Por tanto, f no es continua en $x = 2$.

9.2. Señala el mayor conjunto de números reales para los que la función *f*(*x*) sea continua en cada uno de los siguientes casos.

a) $f(x) = x^3 - 2x^2$ **b)** $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ **c)** $f(x) = \sqrt{x+1}$

a) Continua en todo el conjunto de los números reales.

b) Continua en todo el conjunto de los números reales excepto en $x = 1$.

c) Continua en $(-1, +\infty)$ y continua en $x = -1$ por la derecha.

9.3. Indica el valor o los valores de *a*, si es que existen, para que la función: $f(x) = \begin{cases} ax + a & \text{si } x \leq -2 \\ \dfrac{x}{x+4} & \text{si } x > -2 \end{cases}$

a) Sea continua en *x* = –2.

b) Presente una discontinuidad evitable en *x* = –2.

c) Presente una discontinuidad de salto finito en *x* = –2.

d) Presente discontinuidad de salto infinito en *x* = –2.

a)

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x}{x+4} = -1 \\ \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2} (ax + a) = -a \end{array}\right\}$$

$f(-2) = -a$. Por tanto: *f* es continua en $x = -2$ si $a = 1$.

b) Para ningún valor de *a*, la función presenta una discontinuidad evitable en $x = -2$.

c) Para cualquier valor de *a* distinto de 1, la función presenta en $x = -2$ una discontinuidad de salto finito.

d) Para ningún valor de *a*, la función presenta una discontinuidad de salto infinito en $x = -2$.

9.4. Estudia la continuidad de las funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{x + 2 - x^2}}$ **c)** $f(x) = \sqrt{x^2 - 5}$

b) $f(x) = \log(x^2 + 1)$ **d)** $g(x) = \sqrt{2 + |2x - 3|}$

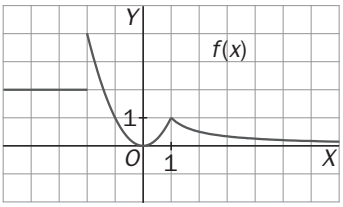
a) $x^2 - x - 2 < 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) < 0 \Rightarrow x \in (-1, 2)$

b) $x^2 - 5 \leq 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty, -\sqrt{5}\right] \cup \left[\sqrt{5}, +\infty\right)$

c) $x^2 + 1 > 0$ para cualquier *x*. Por tanto, siempre se puede hallar su logaritmo. La función es continua en **R**.

d) Para cualquier *x*, $2 + |2x - 3| \geq 0$ y, por tanto, siempre se puede calcular su raíz cuadrada.

9.5. Dada la función *f*, represéntala y estudia su continuidad: $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -2 \\ x^2 & \text{si } -2 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$



Los tres tramos 2, x^2 y $\dfrac{1}{x}$ son continuos en su dominio.

Además, es continua en $x = 1$ y discontinua, con una discontinuidad de salto finito, en $x = -2$.

9.6. Comprueba que las siguientes funciones cortan al eje *X* y, en cada caso, establece un intervalo abierto donde esté incluido el punto de corte.

a) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 7$ **b) $f(x) = 2x - \cos x$**

a) Es continua en todo **R** por ser polinómica: $\left.\begin{matrix} f(1) = 1 > 0 \\ f(0) = -7 < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \exists\, c \in (0,1) / f(c) = 0$

b) Es continua en todo **R** por ser diferencia de funciones continuas en todo **R**.

$\left.\begin{matrix} f(1) = 2 - 0{,}54 = 1{,}46 > 0 \\ f(0) = -1 < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \exists\ c \in (0,1)\ /\ f(c) = 0$

9.7. (TIC) Demuestra que la ecuación $x^4 + x - 1 = 0$ tiene solución positiva. Halla la anterior solución con una cifra decimal exacta.

Se considera la función $f(x) = x^4 + x - 1$ que, por ser polinómica, es continua en todo **R**.

$\left.\begin{matrix} f(0) = -1 < 0 \\ f(1) = 1 > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \exists\, c \in (0,1) / f(c) = 0$

$\left.\begin{matrix} f(0{,}5) = -0{,}4375 < 0 \\ f(1) = 1 > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \exists\, c \in (0{,}5;\ 1) / f(c) = 0$

$\left.\begin{matrix} f(0{,}5) = -0{,}4375 < 0 \\ f(0{,}75) = 0{,}066 > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \exists\, c \in (0{,}5;\ 0{,}75) / f(c) = 0$

$\left.\begin{matrix} f(0{,}625) = -0{,}22 < 0 \\ f(0{,}75) = 0{,}066 > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \exists\, c \in (0{,}625;\ 0{,}75) / f(c) = 0$

$\left.\begin{matrix} f(0{,}71875) = -0{,}014 < 0 \\ f(0{,}75) = 0{,}066 > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \exists\, c \in (0{,}71875;\ 075) / f(c) = 0$

La raíz aproximada es $x = 0{,}7$.

9.8. (PAU) Dada la función $f(x) = \ln x$:

a) Comprueba que es continua en el intervalo $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$ para cualquier número natural *n*.

b) Halla un intervalo de la forma $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$ en el que haya algún punto donde la función tome el valor −2.

a) La función $f(x) = \ln x$ es continua en todo su dominio $(0, +\infty)$ y, en cualquier intervalo $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$ con *n* natural.

b) Para $n = 8$, $f\left(\frac{1}{8}\right) = \ln\frac{1}{8} = -2{,}079$ y $f(1) = \ln 1 = 0$. Aplicando el teorema de los valores intermedios, la función toma en $\left[\frac{1}{8}, 1\right]$ todos los valores entre −2,079 y 0. En particular, existe un punto donde tome el valor −2.

9.9. Al hacer un recorrido continuo por una carretera con una pendiente muy pronunciada, un ciclista lleva una velocidad de 8 km/h cuando pasa por el kilómetro 125 y de 6 km/h cuando pasa por el kilómetro 124.

a) ¿Existe algún punto entre los dos kilómetros donde el ciclista haya llevado una velocidad de 7 km/h?

b) ¿Puede asegurarse que no ha habido ningún momento entre los dos puntos donde el ciclista haya llevado una velocidad de 20 km/h?

a) Sí, se puede asegurar gracias al teorema de los valores intermedios.

b) No se puede asegurar que no exista.

9.10. (PAU) Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x+2 & \text{si} \quad x\le 0 \\ \frac{1}{2}x+2 & \text{si} \quad 0<x\le 1 \\ \frac{5}{2} & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

a) Estudia su acotación en los intervalos: [–1, 1], [–2, 2], [–3, 3].

b) Estudia si la función toma el valor *M* = 3 y, en caso afirmativo, indica un intervalo de longitud 1 donde haya un punto que verifique esta propiedad.

a) La función es continua en todos los puntos. En el intervalo [–1, 1] la función está acotada. El máximo vale $\frac{5}{2}$ y se alcanza en $x = 1$. El mínimo vale 1 y se alcanza en $x = -1$. En el intervalo [–2, 2] la función está acotada. El máximo vale $\frac{5}{2}$ y se alcanza en cualquier punto del intervalo [1, 2]. El mínimo vale 1 y se alcanza en $x = -1$. En el intervalo [–3, 3] la función está acotada. El máximo vale 5 y se alcanza en $x = -3$. El mínimo vale 1 y se alcanza en $x = -1$.

b) Como $f(-3) = 5$ y $f(-2) = 2$, la función toma cualquier valor comprendido entre 5 y 2 en el intervalo [−3, −2] y, por tanto, existe algún punto de (−3, −2) donde la función vale 3.

EJERCICIOS

Continuidad de una función

9.11. Indica si las siguientes funciones son o no continuas en el punto que se indica.

a) $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x^2-3x+2}$, en $x = 2$

b) $f(x)=\dfrac{x}{2-\sqrt{3-2x}}$, en $x = \dfrac{3}{2}$

c) $f(x)=\ln(2x^2+4x-6)$, en $x = -3$

d) $f(x)=\ln(2x^2+4x-6)$, en $x = 0$

e) $f(x)=\ln\left|2x^2+4x-6\right|$, en $x = 0$

f) $f(x)=\text{tg}\,x$, en $x = \pi$

g) $f(x)=\text{tg}\,x$, en $x = \dfrac{\pi}{2}$

a) No es continua en $x = 2$ porque $f(x)$ no está definida en $x = 2$, ya que en dicho punto, el denominador se anula.

b) Sí, es continua ya que $f\left(\frac{3}{2}\right)=\dfrac{\frac{3}{2}}{2-\sqrt{3-2\cdot\frac{3}{2}}}=\dfrac{\frac{3}{2}}{2}=\dfrac{3}{4}$ y $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}} f(x)=\dfrac{\frac{3}{2}}{2-\sqrt{3-2\cdot\frac{3}{2}}}=\dfrac{3}{4}$.

c) No es continua en $x = -3$ ya que no existe el logaritmo de cero.

d) No es continua en $x = 0$ ya que no existe el logaritmo de los números negativos.

e) Sí, es continua en $x = 0$ ya que $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\ln|-6|=\ln 6$.

f) Sí, es continua en $x = \pi$ ya que $f(\pi)=\lim\limits_{x\to\pi} f(x)=\text{tg}\,\pi=0$.

g) No es continua en $x = \frac{\pi}{2}$ ya que no existe $\text{tg}\,\frac{\pi}{2}$. Observa que la tangente es el cociente entre el seno y el coseno, que se anula en $\frac{\pi}{2}$.

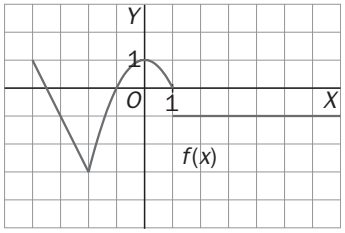
9.12. (TIC) Traza la gráfica de las siguientes funciones definidas a trozos, indica su dominio y estudia su continuidad, especificando, en su caso, el tipo de discontinuidad.

a) $f(x)=\begin{cases}-2x-7 & \text{si} \quad x\le -2\\ 1-x^2 & \text{si} \quad -2<x<1\\ -1 & \text{si} \quad x\ge 1\end{cases}$

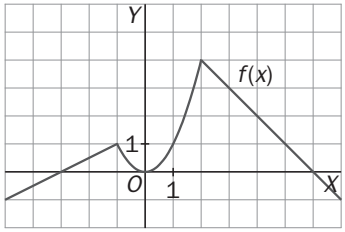
b) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} & \text{si} \quad x<-1\\ x^2 & \text{si} \quad -1\le x\le 2\\ -x+6 & \text{si} \quad x>2\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}-1 & \text{si} \quad x<-1\\ x^3 & \text{si} \quad -1\le x\le 1\\ -x^2+4x-2 & \text{si} \quad x>1\end{cases}$

a) Es continua en todos los puntos excepto en $x = 1$ donde se presenta un punto de discontinuidad no evitable de salto finito.



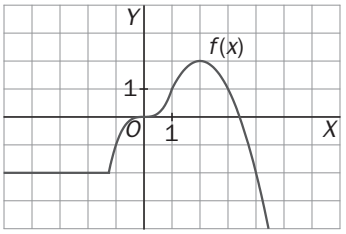
b) Es continua en todo el conjunto de los números reales.



c) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-1$, $f(-1)=-1$;

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1$, $f(1)=1$

La función es continua en 1 y en –1 y, en consecuencia, en todo **R**.



9.13. Estudia la continuidad de las siguientes funciones estableciendo en cada caso el subconjunto de números reales más amplio posible donde la función sea continua.

a) $f(x)=\dfrac{3x+4}{x^4+x^2+4}$

b) $f(x)=\dfrac{2x^2-1}{x^3-x-6}$

c) $f(x)=e^{-x^2}+x\cdot\cos x$

d) $f(x)=e^{2x^2}+2x\cdot e^x+3$

e) $f(x)=\dfrac{2x+x^2}{3-\sqrt{x+4}}$

f) $f(x)=\sqrt{x^3-3x+2}$

g) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-3x+2}{x+2}}$

h) $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x}{x-1}}$

i) $f(x)=x\cdot e^x$

j) $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$

k) $f(x)=x^2\cdot\ln(x-1)$

l) $f(x)=\dfrac{x}{1+\ln x}$

m) $f(x)=\dfrac{1}{\cos x}$

n) $f(x)=\dfrac{1}{1-2\cos^2 x-\operatorname{sen} x}$

a) La función es continua en todos los números reales excepto en aquellos en que se anula el denominador.

$x^4+x^2+4=0\Rightarrow x^2=\dfrac{-1\pm\sqrt{-15}}{2}\Rightarrow$ No existe ningún real que anule el denominador.

Por tanto, la función es continua en todo **R**.

b) La función es continua en todos los números reales excepto en aquellos en que se anula el denominador.
$x^3 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x-2)(x^2+2x+3) = 0 \Rightarrow x = 2$. La función es continua en todo **R** excepto en $x = 2$.

c) Continua en todo **R** ya que es suma y producto de funciones continuas en todo **R**.

d) Continua en todo **R** ya que es suma y producto de funciones continuas en todo **R**.

e) $3 - \sqrt{x+4} = 0 \Rightarrow \sqrt{x+4} = 3 \Rightarrow x + 4 = 9 \Rightarrow x = 5$

$\begin{cases} x + 4 \geq 0 \\ 3 - \sqrt{x+4} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x \neq 5 \end{cases} \Rightarrow$ Es continua en $(-4, 5) \cup (5, +\infty)$.

Además es continua en $x = -4$ por la derecha.

f) Sólo existe la raíz cuadrada de los números positivos o nulos. Por tanto:
$x^3 - 3x + 2 \geq 0 \Rightarrow (x+2)(x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \Rightarrow$ La función es continua en $(-2, +\infty)$.
Además, es continua en $x = 2$ por la derecha.

g) $\begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x+2} \geq 0 \\ x \neq -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-2)(x-1)}{x+2} \geq 0 \\ x \neq 5 \end{cases} \Rightarrow$ La función es continua en $(-2, 1) \cup (2, 4)$. Además, es continua en $x = 1$ por la izquierda y en $x = 2$ por la derecha.

h) Las raíces cúbicas están definidas tanto para números positivos como para números negativos.
La función es continua en todo **R** excepto en $x = 1$.

i) Continua en todo **R** ya que es producto de funciones continuas en todo **R**.

j) $\begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow$ Continua en $(0, 1) \cup (1, +\infty)$.

k) Continua en todo el dominio de definición del logaritmo neperiano, que, dado que $x - 1 > 0$ implica que $x > 1$, es, en este caso, el intervalo $(1, +\infty)$.

l) $\begin{cases} x > 0 \\ 1 + \ln x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \dfrac{1}{e} \end{cases}$ Continua en $\left(0, \dfrac{1}{e}\right) \cup \left(\dfrac{1}{e}, +\infty\right)$.

m) $\cos x \neq 0 \Rightarrow$ Continua en todo **R** excepto en los puntos de la forma $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ con k entero.

n) $-2\cos^2 x - \operatorname{sen} x + 1 = 0 \Rightarrow -2 + 2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x + 1 = 0 \Rightarrow 2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = \dfrac{1 \pm 3}{4} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 1 \\ \operatorname{sen} x = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Continua en todo **R** excepto en los puntos $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \dfrac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$ con k cualquier número real.

9.14. (PAU) Calcula el valor o los valores que se deben dar a *k* para que las siguientes funciones sean continuas en todo el conjunto de los números reales.

a) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2+1 & \text{si } x\le -2\\ 2x+k & \text{si } x>-2\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}x^2-2k & \text{si } x\le 1\\ x^2-3x-k & \text{si } x>1\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{vmatrix}x^2+kx & \text{si } x<3\\ \ln(x-2) & \text{si } x\ge 3\end{vmatrix}$

d) $f(x)=\begin{cases}kx^2-1 & \text{si } x\le 3\\ e^{x^2-9} & \text{si } x>3\end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x-3} & \text{si } x\ne 3\\ 2k-3 & \text{si } x=3\end{cases}$

a) $\frac{1}{2}(-2)^2+1=2(-2)+k\Rightarrow k=7$

Para k = 7: $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2}\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)=3$, $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2}(2x+7)=3$ y $f(-2)$ = 3 por lo que la función es continua en x = −2 y, por tanto, en todo **R**.

b) $1-2k=-2-k\Rightarrow k=3$

Para k = 3: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x^2-6)=-5$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x^2-3x-3)=-5$ y $f(1)$ = −5 por lo que la función es continua en x = 1 y, por tanto, en todo **R**.

c) $9+3k=\ln 1=0\Rightarrow k=-3$

Para k = −3 : $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}(x^2-3x)=0$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\ln(x-2)=0$ y $f(3)$ = 0 por lo que la función es continua en x = 3 y, por tanto, en todo **R**.

d) $9k-1=e^0=1\Rightarrow k=\frac{2}{9}$

Para $k=\frac{2}{9}$: $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{2}{9}x^2-1\right)=1$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}e^{x^2-9}=1$ y $f(3)$ = 1 por lo que la función es continua en x = 3 y, por tanto, en todo **R**.

e) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-2}{x+1}=\frac{1}{4}$. Por tanto, $2k-3=\frac{1}{4}\Rightarrow k=\frac{13}{8}$.

9.15. (PAU) Calcula los valores de *a* y *b* para que la función $f(x)=\begin{cases}x+b & \text{si } x\le 1\\ e^{x-1}+ax & \text{si } 1<x<3\\ x^2-2x-2 & \text{si } x\ge 3\end{cases}$ **sea continua en todo R.**

$$\begin{cases}1+b=e^{1-1}+a\\ e^{3-2}+3a=1\end{cases}\Rightarrow b=a=\frac{1-e}{3}$$

9.16. Expresa las siguientes funciones como funciones definidas a trozos y estudia su continuidad.

a) $f(x) = |x-2|$

b) $f(x) = 2x + |x-2|$

c) $f(x) = |x-2| + |x+1|$

d) $f(x) = \dfrac{x^2+x}{|x+1|}$

e) $f(x) = \dfrac{x+|x|}{2+|x+1|}$

f) $f(x) = e^{2|x|+1}$

g) $f(x) = \dfrac{x^2}{2|x|+2x-4}$

a) $f(x) = |x-2| = \begin{cases} 2-x & \text{si } x < 2 \\ x-2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow$ Continua en todo **R**.

b) $f(x) = 2x + |x-2| = \begin{cases} 2x-x+2 & \text{si } x < 2 \\ 2x+x-2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2 & \text{si } x < 2 \\ 3x-2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow$ Continua en todo **R**.

c) $f(x) = |x-2| + |x+1| = \begin{cases} -2x+1 & \text{si } x < -1 \\ 3 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ 2x-1 & \text{si } x > 2 \end{cases} \Rightarrow$ Continua en todo **R**.

d) $f(x) = \dfrac{x^2+x}{|x+1|} = \begin{cases} \dfrac{x(x+1)}{-(x+1)} & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{x(x+1)}{x+1} & \text{si } x > -1 \end{cases} = \begin{cases} -x & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } x > -1 \end{cases} \Rightarrow$ Es continua en todo **R** excepto en $x = -1$.

e) $f(x) = \dfrac{x+|x|}{2+|x+1|} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ \dfrac{2x}{x+3} & \text{si } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{2x}{x+3} & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow$ Continua en todo **R**.

f) $f(x) = e^{2|x|+1} = \begin{cases} e^{-2x+1} & \text{si } x < 0 \\ e^{2x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$ Continua en todo **R**.

g) $f(x) = \dfrac{x^2}{2|x|+2x-4} = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{4} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x^2}{4x-4} & \text{si } x \geq 0, x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow$ La función es continua en todo **R** excepto en $x = 1$.

Teorema de Bolzano y teorema de los valores intermedios

9.17. Comprueba que las siguientes funciones cortan al eje *X* en al menos un punto, e indica un intervalo de extremos de números enteros consecutivos al cual pertenezca dicho punto.

a) $f(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 - 1$

b) $f(x) = \cos x - x + 1$

c) $f(x) = x \cdot e^x - x - 16$

d) $f(x) = x^3 + x^2 - \cos \pi x + 2$

a) $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 1 > 0 \Rightarrow$ La función corta al eje *X* en un punto del intervalo (0, 1).

b) $f(1) = \cos 1 > 0$, $f(2) = \cos 2 - 1 < 0 \Rightarrow$ La función corta al eje *X* en un punto del intervalo (1, 2).

c) $f(2) = 2e^2 - 18 < 0$, $f(3) = 3e^3 - 19 > 0 \Rightarrow$ La función corta al eje *X* en un punto del intervalo (2, 3).

d) $f(-2) = -4 + 2 < 0$, $f(-1) = 2 > 0 \Rightarrow$ La función corta al eje *X* en un punto del intervalo (−2, −1).

9.18. (PAU) Comprueba que las siguientes funciones toman el valor *M* indicado en algún punto del intervalo propuesto.

a) $f(x) = x^5 - x^3 - x + 5$; $M = -1$ **en** $(-2, -1)$

b) $f(x) = x \cdot e^{-x} + 3$; $M = \frac{3}{2}$ **en** $(-1, 0)$

c) $f(x) = \operatorname{sen} x - \cos x + 2$; $M = 3$ **en** $(1, 2)$

a) $f(-2) = -17$, $f(-1) = 6$. En $(-2, -1)$ toma todos los valores comprendidos entre -17 y 6. En particular, toma el valor -1.

b) $f(-1) = 0{,}2817$, $f(0) = 2$. En $(-1, 0)$ toma todos los valores comprendidos entre 0,28 y 2. En particular, toma el valor 1,5.

c) $f(1) = 2{,}3$, $f(2) = 3{,}32$. En $(1, 2)$ toma todos los valores comprendidos entre 2,3 y 3,32. En particular, toma el valor 3.

9.19. (PAU) Para cada una de las siguientes funciones, y considerando el intervalo señalado, estudia, si es acotada, e indica, si es que existen, el valor del supremo, ínfimo, máximo y mínimo.

a) $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ **en** $[1, 3]$

b) $f(x) = -x^2 - 2x - 1$ **en** $[-1, 0]$

c) $f(x) = \frac{x}{2x - 4}$ **en** $[-2, 1]$

d) $f(x) = \frac{2x - 1}{x + 1}$ **en** $[-2, 0]$

e) $f(x) = x^2 + 5x - 6$ **en** $(-3, 0)$

f) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}$ **en** $(0, 1]$

a) La función es continua en un intervalo cerrado. Por Weierstrass, existe máximo y mínimo. Supremo y máximo en $x = 2{,}5$ y vale $M = 0{,}25$. Ínfimo y mínimo en $x = 1$ y vale $m = -2$.

b) La función es continua en un intervalo cerrado. Por Weierstrass, existe máximo y mínimo.

Supremo y máximo en $x = -1$ y vale $M = 0$. Ínfimo y mínimo en $x = 0$ y vale $m = -1$.

c) La función es continua en un intervalo cerrado. Por Weierstrass, existe máximo y mínimo.

Supremo y máximo en $x = -2$ y vale $M = 0{,}25$. Ínfimo y mínimo en $x = 1$ y vale $m = -0{,}5$.

d) La función no es acotada ni superiormente ni inferiormente. Por tanto, no posee ni ínfimo, ni mínimo, ni supremo ni máximo.

e) La función es acotada. Ínfimo y mínimo en $x = 2{,}5$ y vale $m = -12{,}25$. Sin máximo pero supremo $M = -6$.

f) La función no es acotada superiormente pero sí inferiormente. No tiene, pues, supremo ni máximo. El ínfimo y mínimo se alcanza en $x = 1$ y vale $m = 1$.

PROBLEMAS

9.20. Escribe la expresión de una función continua en todo R y tal que coincida con $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$ **en todos los puntos del dominio de esta última.**

$\frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{(x-1)(x+1)} = x^2 + 1$. El dominio de $f(x)$ es todo **R** excepto $x = 1$ y $x = -1$.

La función $g(x) = x^2 + 1$ es continua y coincide con $f(x)$ en todos los puntos del dominio de esta última.

9.21. Halla el valor que se debe dar a *f* (7) para que la función $f(x) = \frac{\sqrt{x-3} - 2}{x - 7}$ **sea continua en [3, +∞).**

$$\lim_{x \to 7} \frac{\sqrt{x-3} - 2}{x - 7} = \lim_{x \to 7} \frac{\left(\sqrt{x-3} - 2\right)\left(\sqrt{x-3} + 2\right)}{(x-7)\left(\sqrt{x-3} + 2\right)} = \lim_{x \to 7} \frac{x - 3 - 4}{(x-7)\left(\sqrt{x-3} + 2\right)} = \lim_{x \to 7} \frac{1}{\sqrt{x-3} + 2} = \frac{1}{4}$$

La función $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x-3} - 2}{x - 7} & \text{si} \quad x \in [3, 7) \cup (7, +\infty) \\ \frac{1}{4} & \text{si} \quad x = 7 \end{cases}$ es continua en $[3, +\infty)$.

9.22. (TIC) a) Comprueba que la ecuación sen$x$ − 2x + 3 = 0 tiene una solución en el intervalo (1, 2).

b) Calcula dicha solución con aproximación a las centésimas.

a) La función $f(x)$ = sen$x$ − 2x + 3 es continua y verifica que: $f(1) > 0$, $f(2) < 0$, luego por Bolzano tiene una solución en el intervalo.

b) Como $f(1) \cdot f(2) < 0 \Rightarrow$ puede aplicarse el método de la bisección:

	Intervalo [a_n, b_n]		Punto medio	Valor de f (c_n)
Paso	a_n	b_n	c_n	
1	1	2	1.5	0,9975
2	1,5	2	1,75	0,4840
3	1,75	2	1,875	0,2041
4	1,875	2	1,9375	0,0585
5	1,9375	2	1,9687	-0,0156
6	1,9375	1,9687	1,9531	0,0216
7	1,9531	1,9687	1,9609	0,0031
8	1,9609	1,9687	1,9648	0,0062

La solución aproximada con dos decimales exactos es c = 1,96.

9.23. (PAU) Un equipo de investigación ha estimado que el número de bacterias, en miles, de un cultivo, en función del tiempo t que ha pasado desde un instante inicial t = 0 horas, viene dado por la función.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}x^2 + 1 & \text{si } 0 \le x \le 3 \\ \frac{4x}{x+1} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

a) Comprueba que la función es continua en todo su dominio.

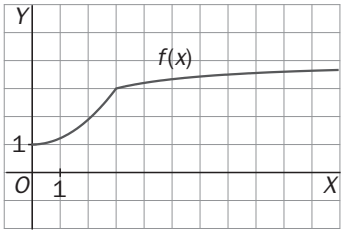
b) Haz una representación de la función.

c) Demuestra que existe algún instante en el que el número de bacterias es de 3500. Da un intervalo de tiempo de longitud menor a 30 minutos en el que esté incluido ese instante.

a) $\lim_{t \to 3^-} f(t) = \lim_{t \to 3}\left(\frac{2}{9}t^2 + 1\right) = 3$, $\lim_{t \to 3^+} f(t) = \lim_{t \to 3} \frac{4t}{t+1} = \frac{12}{4} = 3$, $f(3) = 3$

La función es continua en t = 3 y, por tanto, en todo su dominio [0, + ∞).

b)



c) $3{,}5 = \frac{4t}{t+1} \Rightarrow 3{,}5t + 3{,}5 = 4t \Rightarrow 0{,}5t = 3{,}5 \Rightarrow t = 7$

En el intervalo $(6\text{h}\,45\text{min},\ 7\text{h}\,15\text{min})$, en t = 7, en el que el número de bacterias es 3,5 miles (3500).

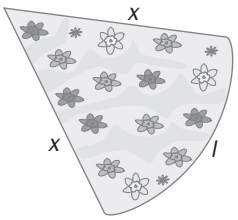
9.24. (TIC) a) Comprueba que la ecuación $x^3 + 4x^2 - 5x - 4 = 0$ tiene tres raíces reales. Para eso, estudia el signo de la función en algunos valores enteros.

b) Calcula tres intervalos de longitud 1 en los que estén incluidas las raíces.

a) $f(-5) = -4$, $f(-4) = 16$, $f(-1) = 4$, $f(0) = -4$, $f(1) = -4$, $f(2) = 10$

b) La función tiene raíces en los intervalos (−5, –4), (−1, 0) y (1, 2).

9.25. Para hacer un adorno con forma de cono, se quiere recortar en una cartulina un sector circular de 50 cm de perímetro, contando los lados rectos y el arco. Se quiere saber qué longitud deben tener los lados rectos para que el área sea máxima. Escribe la función que determina el área en función del radio y estudia su acotación.



Si el ángulo de sector es α radianes $\Rightarrow$ el perímetro del sector circular es

$P = \alpha \cdot x + 2x = 50 \Rightarrow \alpha = \dfrac{50 - 2x}{x}$.

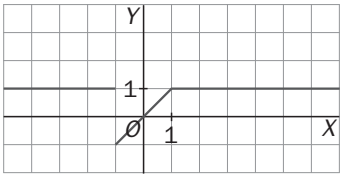
El área del sector es $S = \dfrac{\alpha x^2}{2} = \dfrac{50 - 2x}{x} \cdot \dfrac{x^2}{2} = (25 - x) \cdot x = 25x - x^2$.

El máximo de esta función se alcanza en el vértice de la parábola. Es decir, en x = 12,5 cm.

PROFUNDIZACIÓN

9.26. Representa gráficamente la función y estudia su continuidad: $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } |x| \le 1 \\ 1 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$



Es discontinua en $x = -1$ ya que:

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -1 \neq 1 = \lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$ y continua en los demás números reales.

9.27. Se considera una función $f(x)$ continua en $[a, b]$ y que verifica que $f(a) \cdot f(b) < 0$. El teorema de Bolzano asegura que existe un punto $x = c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$. Mediante el método de la bisección, se construye la sucesión de intervalos encajados: $[a, b] = [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$ con la ayuda de los puntos medios c_n.

a) Comprueba que, cuando se ha dado un paso en el método de la bisección, se verifica que:

$$|c_1 - c| < \frac{b - a}{2}$$

b) Comprueba que, cuando se han dado dos pasos en el método de la bisección, se verifica que $|c_2 - c| < \dfrac{b - a}{4}$ y cuando se han dado tres $|c_3 - c| < \dfrac{b - a}{8}$.

c) ¿Qué relación se verifica entre c_n y c cuando se han dado n pasos en el método de la bisección?

d) ¿Cuántos decimales exactos se obtienen al considerar c_n como aproximación de la solución de la ecuación $f(x) = 0$, si el intervalo es $[a, b] = [1, 2]$ y se han dado 10 pasos en el método de la bisección?

e) ¿Cuántos pasos es necesario dar para asegurar cuatro decimales exactos en las condiciones del apartado d?

a) c_1 es el punto medio de a y b. Por tanto, la distancia entre c_1 y la raíz c es menor que el radio del intervalo que es $\dfrac{b - a}{2}$. Es decir, $|c_1 - c| < \dfrac{b - a}{2}$.

b) c_2 es el punto medio de a_2 y b_2. Por tanto, la distancia entre c_2 y la raíz c es menor que el radio del intervalo que es $\dfrac{b_2 - a_2}{2} = \dfrac{b - a}{4}$. Es decir, $|c_2 - c| < \dfrac{b - a}{4}$.

c_3 es el punto medio de a_3 y b_3. Por tanto, la distancia entre c_3 y la raíz c es menor que el radio del intervalo que es $\dfrac{b_3 - a_3}{2} = \dfrac{b - a}{2^3}$. Es decir, $|c_3 - c| < \dfrac{b - a}{8}$.

c) Razonando de forma análoga, $|c_n - c| < \dfrac{b - a}{2^n}$.

d) $|c_n - c| < \dfrac{b - a}{2^n} = \dfrac{2 - 1}{2^{10}} = \dfrac{1}{2^{10}} = 0{,}00098$. Lo cual quiere decir que hay tres decimales exactos.

e) $\dfrac{b - a}{2^n} < 10^{-4} \Rightarrow \log\left(\dfrac{2 - 1}{2^n}\right) < \log 10^{-4} \Rightarrow \log 1 - n \log 2 < -4 \Rightarrow n \log 2 > 4 \Rightarrow n > \dfrac{4}{\log 2} = 13{,}29 \Rightarrow n = 14$

9.28. Estudia la continuidad de las funciones siguientes.

a) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sen}\dfrac{1}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$ **b)** $f(x)=\begin{cases}x\cdot\operatorname{sen}\dfrac{1}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$

a) $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$ no existe ya que cuando x se hace muy próximo a cero, $\dfrac{1}{x}$ se hace muy grande. Sin embargo, por muy grande que se haga el ángulo, el seno sigue oscilando indefinidamente entre –1 y 1 y no se acerca a ningún valor fijo. Por tanto, la función es discontinua en $x = 0$.

b) $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}=0$ ya que cuando x se acerca a 0, y aunque $\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$ oscile entre –1 y 1, al multiplicar el valor de $\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$ por un valor cada vez más pequeño, el resultado es cada vez más pequeño.

La función es continua en $x = 0$.

RELACIONA Y CONTESTA

Elige la única respuesta correcta en cada caso:

9.1. Los valores de *a* y *b* para que la función $f(x)=\begin{cases}x^2-ax-5 & \text{si } -5<x<-3\\ -2 & \text{si } -3\le x\le 2\\ \log_2 x^b & \text{si } 2<x<3\end{cases}$ **sea continua en todo su dominio son:**

A) $a = 2$ $b = -2$

B) $a = -2$ $b = 2$

C) $a = -2$ $b = -2$

D) $a = 2$ $b = 2$

E) La función es continua en todo su dominio.

La respuesta correcta es C.

Para que sea continua, los límites laterales en $x = –3$ y $x = 2$ deben coincidir y ser iguales al valor de la función en el punto.

En $x = –3$, $9 + 3a – 5 = –2$, luego $a = –2$ y en $x = 2$, $– 2 = \log_2 2^b$ que se verifica para $b = –2$. Por tanto, la respuesta válida es C.

9.2. El valor de *k* para que la función $f(x)=\begin{cases}x-\dfrac{x^2}{1+x} & \text{si } x\neq -1\\ k & \text{si } x=-1\end{cases}$ **sea continua en todo R es:**

A) $k = -1$

B) $k = 1$

C) $k = 0$

D) Para cualquier valor de *k*, la función es continua en R.

E) No existe ningún valor de *k* que haga continua la función en todo R.

E) No es continua para ningún k pues en $x = –1$, los límites laterales se van al infinito, pues queda 0 en el denominador de la fracción.

9.3. La función $f(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x-3}$

A) Es continua en $x = 3$.

B) Presenta una discontinuidad evitable en $x = 3$.

C) Presenta una discontinuidad de salto finito en $x = 3$.

D) Presenta una discontinuidad de salto infinito en $x = 3$.

E) Ninguna de las anteriores opciones es cierta.

B) En $x = 3$, la función no está definida, pero tomando límites:

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-x-6}{x-3}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 3^-}\frac{(x+2)(x-3)}{x-3}=5 \text{ y } \lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-x-6}{x-3}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 3^+}\frac{(x+2)(x-3)}{x-3}=5$$

9.4. La función *f* es continua en [−2, 3] y verifica que *f* (−2) = 6 y *f* (3) = 4.

A) La ecuación *f*(*x*) = 0 tiene, por lo menos, una solución en [−2, 3].

B) La ecuación *f*(*x*) = 0 no tiene solución en [−2, 3].

C) La ecuación *f*(*x*) = 5 tiene, por lo menos, una solución en [−2, 3].

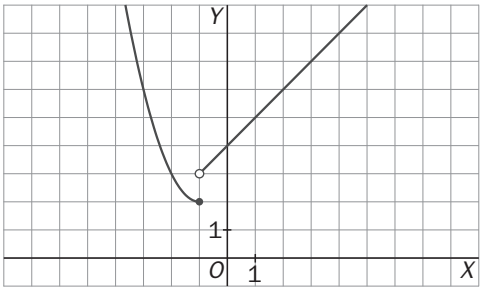
D) La ecuación *f*(*x*) = 5 no tiene solución en [−2, 3].

E) Ninguna de las respuestas anteriores es cierta.

C) Dado que *f* es una función continua en un intervalo cerrado y toma los valores 4 y 6 en sus extremos, podemos asegurar por el teorema de los valores intermedios que *f* toma en ese intervalo todos los valores comprendidos entre 4 y 6, por tanto, en particular, tomará el valor 5.

Las respuestas A y B no son válidas porque no podemos garantizar que tome el valor 0 en este intervalo por no ser intermedio entre el 4 y el 6.

9.5. La función cuya gráfica es:



A) Es continua en *x* = −1.

B) Es continua por la derecha en *x* = −1.

C) Es continua por la izquierda en *x* = −1.

D) Es continua por la derecha y por la izquierda en *x* = −1.

E) No es continua ni por la izquierda ni por la derecha en *x* = −1.

C) Pues existe el límite por la izquierda y coincide con el valor de la función en el punto.

No es continua por la derecha por no coincidir el límite lateral derecho con el valor de la función.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas:

9.6. La ecuación $x^5 + ax^3 + b = 0$:

A) Tiene, al menos, una solución.

B) Tiene, al menos, dos soluciones.

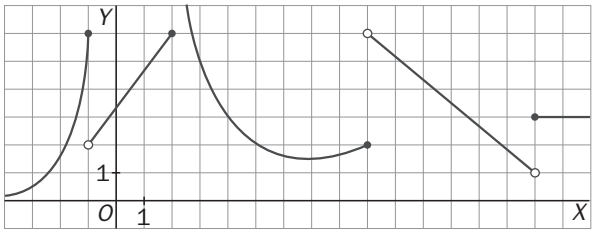
C) Puede no tener solución.

D) Puede tener sólo una solución.

E) Puede tener más de una solución.

A, D y E. Por tener grado impar sus límites en $\pm\infty$ son $\pm\infty$, respectivamente, y por ser además continua, la función debe cortar al menos una vez al eje de abscisas, es decir tener una solución. Puede que sólo lo corte una vez o puede que lo corte hasta 5 veces, dependerá de si las soluciones son reales o complejas.

9.7. A la vista de la gráfica de la siguiente función, se puede afirmar que:



A) Tiene una discontinuidad evitable en *x* = −1.

B) Tiene una discontinuidad de salto finito en *x* = −1.

C) Tiene una discontinuidad de salto infinito en *x* = 2.

D) Tiene una discontinuidad de salto finito en *x* = 9.

E) Es continua por la derecha y por la izquierda en *x* = 15.

B, C, y D. La discontinuidad en $x = -1$ no es evitable porque el límite por la derecha no coincide con el límite por la izquierda, y sí es de salto finito porque los límites laterales se diferencian en 4 unidades.

En $x = 2$, tiene una discontinuidad de salto infinito, pues el límite por la derecha es $+\infty$.

En $x = 9$, tiene una discontinuidad de salto finito porque los límites laterales se diferencian en 4 unidades.

Y finalmente, no es continua por la derecha ni por la izquierda en $x = 15$ porque ni siquiera está definida en ese punto.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas:

9.8. El dominio de la función *f* es el intervalo [3, 7] y es continua en dicho dominio.

a) $f(x) = 0$ tiene una raíz en el intervalo (3, 7). **b) $f(3) \cdot f(7) < 0$.**

A) a es equivalente a b.

B) a implica b pero b no implica a.

C) b implica a pero a no implica b.

D) a y b no se pueden dar a la vez.

E) Ninguna de las dos afirmaciones se puede verificar.

C) Es clara por el teorema de Bolzano, que asegura al menos una raíz si hay cambio de signo en los extremos.
A y B no son correctas, porque por ejemplo la función constante 0 verifica a, pero no b.
Finalmente, la D sería un contraejemplo del teorema de Bolzano.

Señala el dato innecesario para contestar:

9.9. Se desea estudiar si la ecuación $f(x) = 6$ tiene o no solución en el intervalo $[-3, 3]$, y para ello se dan los siguientes datos:

a) El dominio de la función es todo R. **c) $2 < f(-3) < 4$**

b) *f* es continua en $[-3, 3]$. **d) $8 < f(3) < 10$**

A) Puede eliminarse el dato a.

B) Puede eliminarse el dato b.

C) Puede eliminarse el dato c.

D) Puede eliminarse el dato d.

E) No puede eliminarse ningún dato.

A) Para el teorema de los valores intermedios basta que la función sea continua en el intervalo cerrado (por tanto, su dominio se puede reducir a ese intervalo) y que tome ciertos valores en los extremos, de manera que el valor que buscamos resulte ser uno intermedio entre aquellos.
Por tanto, las respuestas C y D no son válidas al eliminar los valores extremos que hacen que el 6 sea, en cualquiera de los rangos que admiten, un valor intermedio.

Analiza si la información suministrada es suficiente para contestar la cuestión:

9.10. Para demostrar que los únicos puntos donde la función $y = f(x)$ puede cambiar de signo son $x = -2$, $x = 0$ y $x = 1$, se afirma que:

a) *f* es una función polinómica de tercer grado. **b) Se verifica que $f(-2) = f(0) = f(1) = 0$**

A) Cada afirmación es suficiente por sí sola.

B) a es suficiente por sí sola, pero b no.

C) b es suficiente por sí sola, pero a no.

D) Son necesarias las dos juntas.

E) Hacen falta más datos.

D) a es necesaria pues indica que *f* puede tener como máximo tres raíces y, por tanto, tres lugares de cambio de signo y b es necesaria para concretar los puntos en los que se cambia el signo.